

*Cingöz Recai: Cingöz Recai*

*Carşı Karşı Holmes'e*

*Recai Babilde*



*D. PAMUKTULUM 2006*

## Önsöz

Bu makaleyi Mayıs-Ağustos 2006'da yazdım ama ağırlık 2006 yazındadır. Notere onaylattığım dosyamın özellikleri özetle şöyledir:

"Sherlock Holmes'e Karşı Cingöz Recai: Cingöz Recai Babil'de" Dosyasının Orijinali	
Özellik	Değer
Açıklama	
Başlık:	"Çatalhöyük Tableti" ve "Plimpton 322 No'lu Tablet" Adlı Antik Matematiksel Astronomi Tabletlerinde <i>Mathquake</i> 'in Dedektiflik Çalışması, <i>Mathquake</i> -2006
Kaynak	
Yazarlar:	Mathquake ( <i>Peyami Safa</i> 'nın "Server Bedi" takma adındaki gibi takma adım)
Son Kaydeden:	Mathquake
Düzeltilme Numarası:	43
Programın Adı:	Microsoft Office Word
Şirket:	Giza Piramitleri
İçerik Oluşturma:	14.07.2006, 03:57
Son Kaydetme:	17.07.2006, 10:34
Son Yazdırma Tarihi:	17.07.2006, 10:15
Toplam Düzenleme Süresi:	22:08:00
İçerik	
Sayfa:	86
Sözcük Sayımı:	24042
Karakter Sayısı:	137044
Satır Sayımı:	1142
Paragraf Sayımı:	
Dosya	
Ad:	<a href="#">AMAT-Noter.doc</a>
Tür:	Microsoft Word 97-2003 Belgesi
Oluşturma Tarihi:	14.07.2006, 03:57
Değiştirme Tarihi:	17.07.2006, 10:34:35
Boyut:	7.93 MB
Format:	A4

Şimdi bu dosyada olup bitenleri anlayabilmeniz için başa dönmem gerekiyor. 2000'in başında internette bedava site veren <http://members.lycos.co.uk>'dan bedava bir hosting almıştım ve orada matematikle ilgili bilimsel araştırmalarımın sonuçlarını yayımlıyordum. 2006'da eski Babil tabletlerinde çalışırken bunlardan YBC 7289 no'lu tabletine ilişkin çalışmamı "*Hesabın Destanında İlk Gerçek Algoritma: YBC 7289 no'lu Tabletindeki Babil Algoritması, 1. Baskı: 20.04.2006, 17:00:00*"da yayımladım (ki orijinal linki <http://members.lycos.co.uk/gizapyramids/YBC7289/index.html> idi). Daha sonra Plimpton 322 no'lu tablet hakkında araştırmalarımaya başladım ve bu tabletin deşifresi zor olduğundan, çalışmalarıyla birlikte birçok eski Babil tabletini incelemek zorunda kaldım.

### Siberallem'de Bilimsel Araştırma Yapmak!

O sırada [www.siberallem.com](http://www.siberallem.com) sitesindeki "Mısır Piramitleri" adlı bir grup kurmuştum ve oradan da araştırma sonuçlarımı canlı yayımlıyordum (ki [www.siberallem.com](http://www.siberallem.com) bir arkadaş bulma sitesiydi ama ne yaparsınız ki, o sıradaki imkânsızlıklar adama tavuğu çığ çığ yediriyordu). Bu grupta Plimpton 322 no'lu tablet için en son şu mesajlarımı yayımlamıştım:

804	<a href="#">Plimpton 322 'de ŞOK!!! ŞOK!!! ŞOK!!! (1)</a> Arkadaşlar Plimpton 322 no 'lu ...	<a href="#">Mathquake</a>	05/05/06 20:00
805	<a href="#">Plimpton 322 'de ŞOK!!! ŞOK!!! ŞOK!!! (2)</a> Kenarlarının uzunlukları birer...	<a href="#">Mathquake</a>	05/05/06 20:01

İşte tam bu şokları arka arkaya yaşarken bulgularıyla ilgili internette araştırma yapıyordum ve 07.05.2006'da son derece ilginç bir makaleye tesadüf ettim: "*Mathematics in Search of History*". Bu makalenin orijinali "*Mathematics in Search of History*"dedir ama şimdi kaldırılmıştır!

Bu makaledeki tablete keşfedildiği yer nedeniyle "Çatalhöyük Tableti" adını verdim ve makalemin 3. Bölümü'nde inceledim. Tabii ki böyle bir şey ilk kez başıma geldiğinden bir şok daha geçirdim ve bu şaşkınlık içinde ilkin grubumuzda tabletimiz hakkındaki bilgilendirici

806	<a href="#">Yine Bir Mathquake Şoku: Pisagor Teoremi için Yeni Bir Tablet (Bu tablet yurdumuzda keşfedildi!)-1</a> Türkiye 'nin güneyindeki Neolit...	<a href="#">Mathquake</a>	07/05/06 04:21
807	<a href="#">Yine Bir Mathquake Şoku: Pisagor Teoremi için Yeni Bir Tablet-2</a> Uyarı: 1) Herhalde yurdumuz...	<a href="#">Mathquake</a>	07/05/06 04:38

mesajlarımı yayımladıktan sonra gün boyu internetten araştırma yaptım. Sonuç, nafile. Ben de zorunlu olarak "*Mathematics in Search of History*" makalesindeki bilgilerden hareketle, ki "*Plimpton 322 no'lu tablet*" örnek verilerek tabletimizdeki dik üçgenler için "*Ne yazık ki Pisagor üçlülerinin bir sıralı koleksiyonu ya da bir rastgele koleksiyonu olup olmadığını anlamak için tablete çalışmadık. Tablet'in 3'te 1'lik kayıp kısmı olan alt tarafındaki girişleri tanımlayamadık!*" bilgileri harekete geçmem için yeter nedenlerdi, tabletimizle ilgilenmeye başladım ve Plimpton 322 no'lu tableti için oluşturduğum MATHSCAN analizini (bir analiz yöntemi) tabletimize de uyguladığımda derhal çözüme eriştim, çünkü çözüm yüzeydeydi!

Bu müjdeli haberi derhal

810	<a href="#">ŞOK'un Babası: Alt tarafı kayıp tablet deşifre edildi! (0 Cevap)</a> Evet, arkadaşlar. Son mesajlar...	<a href="#">Mathquake</a>	07/05/06 17:49
-----	---	---------------------------	----------------

mesajıyla grubumuza ilettikten sonra daha rahat bir ortamda okuyabilmeleri için şu son mesajımı yayınladım:

811	<a href="#">Yine Bir Mathquake Şoku: Pisagor Teoremi için Yeni Bir Tablet (Bu tablet yurdumuzda keşfedildi!)</a> Pisagor Teoremi için Yurdumuzda Keşfedilen Yeni Bir Tablet'in Deşifresi...	<a href="#">Mathquake</a>	07/05/06 19:00
-----	--	---------------------------	----------------

Bu mesajdan sonra kendi web sitemde "[Yurdumuzda Keşfedilen 'Pisagor Teoremi'ne Ait Matematiksel Bir Tablet, Mathquake, 08.05.2006, 20:45:00](#)" başlığıyla bir duyuru yaptım ve sonra "[Plimpton 322 no'lu Tableti İçin Mathquake Deşifreyonları-1, Mathquake, 27.05.2006, 22:00](#)" (ki orijinal linki <http://members.lycos.co.uk/gizapyramids/Plimpton322/1/index.htm> idi) ve "[Plimpton 322 no'lu Tableti İçin Mathquake'in İnanılmaz Tahmini, Mathquake, 08.06.2006, 23:00](#)" (ki orijinal linki <http://members.lycos.co.uk/gizapyramids/Plimpton322/2/index.htm> idi) çalışmalarımı yayınladım. Şimdi bu çalışmalar aşağıdaki makalemin Bölüm 1'inde mevcuttur.

### Donald T. Barry ile Yazışmalarım!

Söz konusu "[Mathematics in Search of History](#)" makalesinde Çatalhöyük tableti için verilen adresin sırtması nedeniyle bu makalenin bir senaryo olduğu açıktı ve bu yüzden makalenin sahibi **Donald T. Barry**'e 15.07.2006, 00:48:56 günü 2 soruluk bir mesaj göndermiştim. Ama Çatalhöyük tabletini bu tarihten, dolayısıyla **Donald T. Barry**'nin bana gönderdiği mesajdan çok daha önce çözdüğümden 3. bölümde yer alan Çatalhöyük tableti hakkındaki değerlendirmemi değiştiremedim ve öylece kaldı. O mesajda **Donald T. Barry**'den tabletin keşfedildiği yer hakkında bilgi istemiştim (ki adres her ne kadar absürt de olsa Türkiye'deki resmi makamlardan izin alınması gerekiyordu, çünkü yanlış anlaşılmalara neden olabilir. Ama Amerikalılar 28.09.2006, 17:23 tarihli "[NATO'da Bölünmüş Türkiye' haritası](#)"ndan gördüğümüz gibi böyle şeylere pek takmıyorlardı) ve "[Mathematics in Search of History, Donald T. Barry, Vol. 93, No. 8, P. 647-650, November 2000](#)" makalesinden gördüğümüz üzere Amerikan Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi tarafından hazırlanan bir yarışma için bir grup öğrencisi tarafından yürütülen çalışmada Amerikan Bölgeler Matematik Ligi'nde Problem Yazma Kürsüsü'nde başkanlık yaptığı ve Phillips Akademisi'nde matematik öğretmenliğinden (Andover, MA 01810, [dbarry@andover.edu](mailto:dbarry@andover.edu)) önce 7 yıl Tarsus'taki Amerikan Koleji'nde ve Robert Kolej'de matematik öğretmenliği yaptığı için böyle bir egzersiz verdiğini söyledi. Yarışma için hazırlanan egzersiz şu idi: 3'te 2'si mevcut olan aşağıdaki Resim 1'deki tabletin kayıp olan 3'te 1'inde neler yazıyordu? Hatırladığım kadarıyla o mesajımda **Donald T. Barry**'e tableti tamamen çözdüğümü söyleyince yanıt mesajında çok şaşırdığını söylemişti!

### TÖRE Dergisinin Eylül 2006 Sayısı Toplatıldı!

Bu bölümdeki değerlendirmelerim, **Donald T. Barry**'nin makaledeki beyanlarını esas alarak tamamen iyi niyetle değerlendirmemden gelir. Bu nedenle makaledeki tablet her ne kadar bir senaryo gereğince oluşturulmuş olsa da Ön-Türkçe uzmanı olan **Kâzım MİRŞAN**'dan yardım istedim. Bu, o kadar iyi bir senaryoydu ki, tabletteki semboller Köktürkçe uzmanlarına (ki o sırada **Kazım Mirşan** ile yazışmalarım olmuştu) gösterdiğimde onlar bile bu tabletin gerçek olduğunu sandılar. Çünkü tabletlere yazıt, kayıp bir uygarlığın yazısıydı ve Amerikalıların yaptıkları araştırmaya göre "O, belki tüm Hint-Avrupa dillerinin anası idi" sonucu çıkmış. Fakat **Atatürk**'e göre bu tabletin bulunduğu yer, Anadolu en aşağı 7000 yıllık Türk yurdu olduğuna göre, tabletteki yazıt bir Ön-Türk uygarlığına işaret ediyor gibiydi. **Kazım Mirşan**, tabletteki yazıtın Runik Türk alfabesi olduğunu tespit etti.

TÖRE (Türkçe Düşünenlerin Dergisi) dergisi yetkilileri, Bölüm 3'teki çalışmayı **Kazım Mirşan**'ın aracılığıyla benden istedi ve Eylül-2006 sayısında yayınladı. Fakat bu çalışma dergide yayınlandıktan sonra toplatıldı (ki daha sonra dergi yetkileriyle görüşüğümde, Eylül-2006 sayısına ve ilgili tüm materyallere el konulduğunu söylemişlerdi) ve bu arada bana da bir operasyon çekildi. Ortada bir casus vardı ama o biz değildik!

Bu çalışma hakkında şu linklere bakabilirsiniz:

1. <https://www.turk.org.au/catalhoyuk-tabletindeki-yazi-turkcedir/>
2. <https://ekitap.link/details?no=42725&c=50513>
3. <https://fr.scribd.com/document/263415542/catalhoyuk-tableti>

### 20. Yıl Dönümüne Hazırlık!

Yukarıdaki ilk tablodaki dosya orijinalde A4 formatında, 86 sayfa ve boyutu 7.93 MB olan bir Microsoft Word 97-2003 belgesidir (ki bunu noterde onaylatmışım) ve 17.06.2025, 00:11:07'de Microsoft Office Professional Plus 2024 belgesi olarak A3'te yeniden düzenlediğimde sayfa sayısı 47'ye ve boyutu 3.02 MB'a düştü. Bu dosyayı 17 Haziran 2025 Salı, 00:11:07-26.07.2025, 03:51:43 tarihleri arasında yeniden düzenlemem nedeniyle (ki bunun için web sitemde 23.06.2025 tarihinde "[Plimpton 322 No'lu Tablet'in Çözümünün Tanıtımı](#)"nı yapmış ve 31.07.2025, 01:06-29.08.2025, 21:18 tarihleri arasında [Testo 5.6](#) ve [Tavole 5.6](#) (bkz. "[Khafre Piramiti'nin Yeni Planı](#)") ile [Bonus](#) (bkz. "[Bonus](#)") adlı çalışmalarımı yapmışım) **Donald T. Barry**'ye 18.06.2025, 17:22'de "About An Old Message!" başlıklı

"Good afternoon Donald T. Barry. I sent you the following e-mail in 2006, but I have difficulty remembering the message you sent me. If you can remember, how did you answer the 2 questions in my message below? As a colleague, the answers to these questions are very important to me.

To Mr. Donald T. Barry,

I have read and evaluated your article which is about "Mathematics Teacher, Mathematics in Search of History, November 2000, Volume 93, Issue 8, Page 647". But I have some questions about your article. I hope you will reply my questions as your colleague.

1) You pointed out that old clay tablet was found in Neolithic village of Çatalhöyük. But when we searched, we have found out that the places like "Olmazköy" and "İmkansızdere" are not existent. Consequently, this address which is given to you is not correct. Would you give information about tablet? For example, discovery date of tablet, the date of the address that was sent to you, who discovered and gave this address, information about your study group.

2) You also mentioned about mathematical tablet. According to this in your article, one of the characters in tablets that have been shown in figure 1 equal to twelve, could be found from logical derivation and also can be exist in other tablets. In addition, when we take into consideration not to be existent of one third of tablet that you had just estimated the place of loss fragment in somewhere in the cavern, Is it possible for you to send facsimile and the pictures of inscription in other tablets. Because It is likely that the inscription to be used in tablet must have been used in other tablets.

## Önsöz

I thank you for giving information honestly and telling the truth about the discovery place (Çatalhöyük but the address is not correct). I'm waiting your reply as soon as possible. I wish you success in your studies.

Sincerely, **Derya PAMUKTULUM**

e-postasını gönderdiğimde 17:23'te

"Delivery has failed to these recipients or groups:

[dbarry@andover.edu](mailto:dbarry@andover.edu)

The email address you entered couldn't be found. Please check the recipient's email address and try to resend the message. If the problem continues, please contact your email admin."

şeklinde geri döndü ve bunun nedenini araştırdığımda **Donald T. Barry**'nin 2017'de öldüğünü öğrendim (Bkz. "[Donald Thomas "Don" Barry Obituary](#)").

Özetle burada söz konusu olan Çatalhöyük tableti Plimpton 322 no'lu tableti için sadece bir alıştırmaydı. Buna göre Bölüm Bölüm 2'yi tetikledi ve Bölüm 3 bunlardan ayrı olarak Bölüm 4 için sadece bir egzersiz olarak kaldı. Bölüm 1 ve 2'deki hiçbir modern metotların hiçbirisi Bölüm 4'teki Plimpton 322 no'lu tabletin çözümüne neden olmadı. Aranılan çözüm 06.08.2006, 01:00'da "*Babililerin Seçme Metodu*" ile ortaya çıktı ve bu metoda göre 2 bölümde tabletteki 15 dik üçgen, hatta 46. sayfadaki Tablo 17'deki 38 dik üçgen sıralı bir şekilde elde edildi!

### Muhtemel Kayıp Dik Üçgenler (!)

Dr. **Eleanor Robson**, Tablo 17'de mevcut olmayan dik üçgenleri "*Muhtemel Kayıp Dik Üçgenler (Possible Missing Lines in Plimpton 322)*" olarak ilân eder ama bu dik üçgenleri veren sıralı üçlüler "*Babilonya Seçme Metodu*"na göre  $q$ 'nun  $1 < q < 60 = 1,0$  aralığında değil minimum  $1 < q < 300 = 5,0$  aralığında ortaya çıkarlar!

Buna göre **Eleanor Robson** tarafından verilen

$$(1) p_{8,9} = 135, q_{8,9} = 64$$

doğuranlarını göz önüne alırsak

$$(2) \begin{cases} a_{8,9} = p_{8,9}^2 - q_{8,9}^2 = 135^2 - 64^2 = 14129 = 3,55,29, \\ h_{8,9} = 2p_{8,9}q_{8,9} = 2 \times 135 \times 64 = 17280 = 4,48,0, \\ r_{8,9} = p_{8,9}^2 + q_{8,9}^2 = 135^2 + 64^2 = 22321 = 6,12,1 \end{cases}$$

dik üçgeni elde edilir ve bu dik üçgenin eğim açısı

$$(3) \theta_{8,9} = \text{Tan}^{-1}\left(\frac{a_{8,9}}{h_{8,9}}\right) = \text{Tan}^{-1}\left(\frac{14129}{17280}\right) = 39^\circ 16' 16''$$

olarak bulunur ki, bu dik üçgen tablette 8. ile 9. satırların arasına girer:

$n$	$p_n$	$q_n$	$a_n$	$h_n$	$r_n$	$\theta_n$
8	32	15	799	960	1249	$39^\circ 46' 13''$
	135	64	14129	17280	22321	$39^\circ 16' 16''$
9	25	12	481	600	769	$38^\circ 43' 05''$

Bu tabloya göre dik üçgenlerin ardışık eğim açılarının farklarına ilişkin tablo da şu şekilde ortaya çıkar:

$n$	$\nabla(\theta_n)$
8	$39^\circ 46' 13'' - 39^\circ 16' 16'' = 0^\circ 29' 57''$
9	$39^\circ 16' 16'' - 38^\circ 43' 05'' = 0^\circ 33' 11''$

Gerçekten de İnterpolasyon metoduna elverişli bir şekilde yazılan 8. ve 9. satırlardaki dik üçgenlerin eğim açılarının aritmetik ortalaması (Orta Nokta Bulma Problemi'nden)

$$(4) \frac{38^\circ 43' 05'' + 39^\circ 46' 13''}{2} = 39^\circ 14' 39''$$

olup, ardışık fark açısı 1 ila 2 dakika arasında olan dik üçgenlerin hep bu düşünceye göre yazıldığını kanıtlayan güzel bir örnek olarak karşımıza çıkmaktadır. Ve şüphesiz böyle bir açılı söz konusu olduğunda 8. ve 9. satırlardaki dik üçgenlerden kolaylıkla buna ulaşabiliyorduk!

Yine **Eleanor Robson** tarafından keşfedilen bir başka kayıp dik üçgen (!) için

$$(5) p_{12,13} = 256, q_{12,13} = 135$$

doğuranlarını göz önüne alırsak

## Önsöz

$$(6) \begin{cases} a_{12,13} = p_{12,13}^2 - q_{12,13}^2 = 256^2 - 135^2 = 47311 = 13,8,31, \\ h_{12,13} = 2p_{12,13}q_{12,13} = 2 \times 256 \times 135 = 69120 = 19,12,0, \\ r_{12,13} = p_{12,13}^2 + q_{12,13}^2 = 256^2 + 135^2 = 83761 = 23,16,1 \end{cases}$$

dik üçgeni elde edilir ve bu dik üçgenin eğim açısı

$$(7) \theta_{12,13} = \tan^{-1}\left(\frac{a_{12,13}}{h_{12,13}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{47311}{69120}\right) = 34^\circ 23' 27''$$

olarak bulunur ki, bu dik üçgenin de tablette 12. ile 13. satırların arasına girer:

$n$	$p_n$	$q_n$	$a_n$	$h_n$	$r_n$	$\theta_n$
12	48	25	1679	2400	2929	$34^\circ 58' 34''$
	256	135	47311	69120	83761	$34^\circ 23' 27''$
13	15	8	161	240	289	$33^\circ 51' 18''$

Bu tabloya göre dik üçgenlerin ardışık eğim açılarının farklarına ilişkin tablo şu şekilde ortaya çıkar:

$n$	$\nabla(\theta_n)$
12	$34^\circ 58' 34'' - 34^\circ 23' 27'' = 0^\circ 35' 07''$
13	$34^\circ 23' 27'' - 33^\circ 51' 18'' = 0^\circ 32' 09''$

Gerçekten de İnterpolasyon metoduna elverişli bir şekilde yazılan 12. ve 13. satırlardaki dik üçgenlerin eğim açılarının aritmetik ortalaması

$$(8) \frac{38^\circ 58' 34'' + 33^\circ 51' 18''}{2} = 34^\circ 24' 56''$$

olup, yine aynı bulgunun geçerli olduğu görülür.

Özetle **Robson**, "[Neither Sherlock Holmes nor Babylon: A Reassessment of Plimpton 322, 2001](#)" makalesinde (1)'deki doğuranları 197. sayfadaki (PDF'de 31. sayfa) tablodaki 2. satırda ve (5)'teki doğuranları aynı tablodaki son satırda verir ve aynı tablodaki diğer satırlardaki doğuranlar da "[Babilonya Seçme Metodu](#)"na göre  $1 < q < 300$  aralığında sıralı bir şekilde elde edilirler (Bkz. [Tablo 19](#)). Şimdi Mathematica'da yazdığım bu programın ardından Tablo 17'yi de Mathematica'da doğruladım (Bkz. [Tablo 17](#)). Fakat Tablo 17'deki ilk 15 dik üçgeni veren ve Plimpton 322 no'lu tabletinde geçen doğuranları 35-46. sayfalarında elle doğrularken 16-40. satırlarındaki dik üçgenleri **Manuel Benito Muñoz**'un "[Birkaç Diofant Problemi \(Algunos problemas diofánticos\)](#)" adlı makalesinin 9. sayfasındaki Tablo 1.2'den almıştım ama hesaplamamıştım. Ancak tahminim 1964'ten beri bilinen [Tablo 1.2](#)'nin doğru olduğuydu!

Bana göre Plimpton 322 no'lu tabletin değerlendirmesi çözümünden daha zor oldu: 9 maddede 22 sayfa. Bu, makalemin yaklaşık 3'te 1'idir. Özellikle 8. Maddede dik üçgende metrik bir bağıntı olarak bilinen "Pisagor Bağıntısı" ni ya da "Pisagor Teoremi" ni diğer kaynaklarda görülmesini araştırırken Osmanlı ve Cumhuriyet dönemlerinde karşılaştırmalı araştırma sonuçları beni derinden etkiledi. Yani **Robson**'un, makalesinin başlığında "[Ne Sherlock Holmes ne de Babil: Plimpton 322'nin Yeniden Değerlendirilmesi \(Neither Sherlock Holmes nor Babylon: A Reassessment of Plimpton 322\)](#)" dediği gibi her şeyi bir kenara bıraktım ve kendi derdimizin peşine düştüm. **Atatürk**'ün Pisagor Teoremi'ni Osmanlıcadan Türkçeye çevirirken büyük bir gayret sarf etmesi ve bunu "[Geometri](#)" kitabına koyması şapka çıkartılacak cinstendi ve **Atatürk**'ün çalışmasını Şekil 14'te günümüz Türkçesiyle tekrar ele aldım. Ona göre "*bir dik üçgende dik kenarların üzerlerine kurulu karelerin alanlarının toplamı, çapın üzerindeki karenin alanına eşittir*" ve bu ifade TDK Başuzmanı **Agop Dilaçar**'a göre Türkçe olarak tamamen doğrudur!

### "Çap" Teriminde Osmanlıca-Türkçe Karşılaştırma

Osmanlıcada bir dik üçgende dik açının karşısında bulunan kenara "1. Veteri kaime" ya da "2. Kaim veter" deniliyordu. "[Kaim](#)" en temel anlamda namazdan bilindiği üzere "ayakta duran" ya da "ayakta bulunan" demektir ve geometride "Zâviye-i kaime: Dik açı", "dıl'ı kaim: Dik kenar" iken "[Veter](#)" en temel anlamda "kiriş" demektir ve geometride de bu şekilde geçer. Her 2 kelimeyi birleştirdiğiniz zaman "dik kiriş" ya da en iyi bilinen şekliyle "hipotenüs" anlamına gelir ki, **Atatürk**, buna "dikeyin çapı" demiştir. Aslında sadece "çap" demek de yeterliydi ve nitelikim **Atatürk**, Şekil 13'te bir üçgen çizdikten sonra hipotenüsün üzerine "Ç. K." Yani "Çapın Karesi" diyerek zaten bunu bildiğini gösteriyor. Yani Osmanlı döneminde "hipotenüs" yerine sadece "çap" bile deseniz, bu, "1. [Veter-i kaim](#)" ya da "2. Kaim veter"den daha açık bir anlam taşımaktaydı. Bu noktada **Agop Dilaçar**, şu bilgiyi verir: "*Pedagojide bir gerçek var: Fikir yolunun açık olması, bir ipucunun bulunması lazımdır. Yoksa bir külçe gibi çöker.*" Bu ipucu ta Babil döneminden kalma "*çapı gören çevre açı diktir*" bilgisidir ve üçgende buna karşılık gelen kenar "çap" olmaktadır. **Atatürk**, bu yoğunluğu Yunanca, Osmanlıca, Fransızca ve Türkçe dilleri arasında yaptı ve buna "çap" yerine "dikeyin çapı" dedi. Bu nedenle **Peyami Safa**, "[Osmanlıca-Türkçe-Uydurmaca](#)"da terim rezaletini dile getirirken aslında Osmanlıcadaki uydurmacayı dile getiriyordu. Çünkü sorun orada başlamıştı ama bu matematik terimini düzeltmek bir edebiyatçının işi değildi. **Atatürk**'ün ölümünden sonra, 1939'da "Türk Hümanizmi" kültür politikaları gereğince Batıya entegre olabilmek için "hipotenüs" terimi kullanılmaya başlandı ve bu kullanım günümüze kadar ulaşmıştır. Bana göre bunun dışında bir art niyet aramak doğru değildir. Eğer bu terimi en iyi şekilde ifade etmeye çalışırsak **Peyami Safa**'nın "[Cingöz Recai](#)" romanındaki gibi Doğu ile Batıyı aynı vücutta buluşturmak gerekir ki, bu da imkânsız istemek gibi bir şey olur.

### Sherlock Holmes'e Karşı Cingöz Recai: Cingöz Recai Babil'de

Makalemin orijinal başlığı "[Antik Matematiksel Astronomi Plimpton 322 No'lu Tableti & Çatalhöyük Tabletinde Mathquake'in Dedektiflik Araştırması, 2006](#)" idi, çünkü makaledeki bulgular **R. Creighton Buck**'ın 1980'de yayımladığı "[Sherlock Holmes Babil'de \(Sherlock Holmes In Babylon\)](#)" makalesindeki gibi esaslı bir dedektiflik araştırması gerektiriyordu. Bunun Türkçedeki karşılığı **Peyami Safa**'ya göre "[Cingöz Recai Babil'de](#)" olmalıdır ve makalemin başlığını buna göre değiştirdim. Buna bir edebiyat romanı değil matematik romanıdır, diyebiliriz. Hesapta **Peyami Safa**'nın 16. kitabına karşılık gelir!

## Önsöz

**Cingöz Recai**, **Peyami Safa**'nın "Server Bedi" adı altında yazdığı ve **Arsen Lüpen**'den esinlenmiş olduğu hırsız karakteridir. **Cingöz Recai**; yakışıklı, kurnaz, cesur, soğukkanlı, zarif, tahsilli, görgülü, cömert ve kibar bir serseridir. Maceralarında "helal" para kazanmış kimselere dokunmaz, haksız yolla servet sahibi olmuş kimselerden hile ile para çalar, elde ettiklerini muhtaçlara dağıtır. **Cingöz Recai** bu yönüyle **Robin Hood**'a benzer!

1928'de yayımlanan "**Sherlock Holmes'e Karşı Cingöz Recai**" 15 kitaplık serisinde **Homi Bhabba**, **René Girard** ve **Fredric Jameson**'un taklit ve orijinal ilişkisine dair yaklaşımlar mevcuttur. **Cingöz Recai**, Türk edebiyatında taklit ve orijinal ilişkisine farklı bir yaklaşım getirmiştir. Bu yaklaşımda yazarın kahramanı üzerinden ortaya koyduğu strateji bir taraftan Doğu-Batı meselesini gündeme getirirken diğer taraftan taklit ve orijinal ilişkisini sorgulamaya açar.

Bu serideki 6. kitabın orijinali şöyledir:



**Peyami Safa**'nın "Server Bedi" mahlasıyla (takma adıyla) Osmanlıca "Sherlock Holmes'e Karşı Cingöz Recai" serisinden "**Ateşten Gözler**", İstanbul Gündoğdu Matbaa ve Kütüphanesi, 1928, 16 sayfa.

### **Peyami Safa Arapça Yazıyor, Türkçe Konuşuyordu!**

**Peyami Safa**'nın 1925'te yayımladığı "**Cingöz'ün Esrarı**" adlı romanı notlandırılarak yeni harflere aktırılırken **Didem Ardalı Büyükarman**'ın şu tespiti bunu doğrular (Bkz. "**Cingöz'ün Esrarı**", S. 9, son paragraf): "**Cingöz'ün Esrarı** romanını Yıldız Teknik Üniversitesi Türk Dili ve Edebiyatı Bölümü 4. sınıf öğrencilerinden **Süheyla Ağan** ile birlikte hazırladık. Kendisi lisans öğrencilerinde az bulunur azim ve titizlikle bu işe sarıldı. Eseri önce Osmanlıca aslından Latin alfabesine aktarıp karşılıklı okumalarla kontrolünü yaptık. Daha önceki baskıların aksine herhangi bir sansüre ya da sadeleştirmeye yeltenmeden orijinal haliyle Latin alfabesine aktardık."

Film endüstrisinde 1954 yapımı "**Beyaz Cehennem/Cingöz Recai**" adlı filmin yönetmeni **Metin Erksan**, **Cingöz Recai** karakterini canlandıran oyuncu **Turan Seyfioğlu**'dur. 1969 yılında çekilen "**Cingöz Recai**" filminde **Ayhan Işık**, **Mehmet Rıza** karakterini **Abdurrahman Palay** canlandırmıştır. Ve 2017'de "**Cingöz Recai: Bir Efsanenin Dönüşü**" filminin yönetmenliğini **Onur Ünlü** üstlenmiş ve **Cingöz Recai** karakterini **Kenan İmirzaloğlu** oynamıştır. Makalemin kapağına **Cingöz Recai** karakteri **Sherlock Holmes**'deki (kasketli ve pipolu. Bkz. "**Sherlock Holmes In Babylon**", ön kapak) gibi belli bir sureti olmadığından, ki binbir surat olduğu bilinmektedir, **Kenan İmirzaloğlu**'nun **Sherlock Holmes**'i andıran (kasketli ve purolu) fotoğrafını koydum!

D. PAMUKTULUM, 12.03.2026, 23:19.

Derya PAMUKTULUM

1. Rasyonel Kenarlı Dik Üçgenlerle Trigonometrik Cetvelin İnşası İçin Bir Metot.....	1
1.1. Babil Metodu .....	1
1.2. $(p_n, q_n, \sqrt{p_n^2 + q_n^2})$ Doğuran Dik Üçgeni İle $(a_n, h_n, r_n)$ Doğurulan Dik Üçgeni Arasındaki İlişkiler .....	2
1. 2'ye Katlama Bağlantısı.....	2
2. $(a_n, h_n, r_n)$ Dik Üçgeni ve $(p_n, q_n)$ Doğuranlarının Trigonometrik Formülleri .....	3
3. [10] Denkleminin Genel Çözümüne Göre $(a_n, h_n, r_n)$ 'nin ve $(p_n, q_n)$ Doğuranlarının $(p_1, q_1)$ İlk Doğuranları Cinsinden Bulunması .....	5
Teorem (Fermat, 1640) .....	6
Genelleştirilmiş Fermat Teoremi .....	6
[30] Genel Denkleminin 2 Terimli Formüle Göre Genel Çözümünün Bulunması.....	6
1.3. Plimpton 322 No'lu Tableti'ndeki $(a_n, h_n, r_n)$ Dik Üçgenlerinin Metoda Göre Analizi.....	8
2. Babil Dik Üçgenleriyle Trigonometrik Cetvelin İnşası .....	11
Genelleştirilmiş Babil Teoremi .....	13
3. Yurdumuzda Keşfedilen "Çatalhöyük Tableti" .....	14
3.1. Çatalhöyük Tableti'nin Matematiksel-Astronomiksel Çözümü .....	17
3.2. Sonuçlar .....	19
1. $(30^\circ, 60^\circ, 90^\circ)$ 'ne En Yakın Dik Üçgen .....	19
2. Doğuran Dik Üçgenlerin Eğimleri .....	19
3. Tek Sayıdaki Ardışık Doğuran Dik Üçgenlerin Eğimlerinin Aritmetik Ortalaması Ortancanın Eğime Eşittir .....	19
4. Tabletin Tamamlanması.....	20
5. Tabletin Keşif ve Çözüm Hikâyesi.....	20
Çözüm Yüzeydeydi! .....	21
6. Donald T. Barry'nin Makalesi Hakkında .....	21
4. Plimpton 322 No'lu Tablet .....	24
4.1. Dik Üçgende Metrik Bağlantı: Pisagor Teoremi.....	25
1. YBC 6967 No'lu Tablete Göre Babil Metodunun Geometrik Yorumu.....	27
2. Susa Tablete Göre Babil Metodunun Geometrik Yorumu ve Diğer Geometrik İlişkiler.....	28
4.2. Plimpton 322 No'lu Tabletin Matematiksel-Astronomik Çözümü.....	29
4.2.1. Çıkmaz Sokakta Karmaşık Bir Metot.....	30
4.2.1.1. Ardışık 2 Doğuran Dik Üçgene Ait Eğimler Oranı .....	30
4.2.1.2. Mesahacı Formülü.....	31
4.2.2. Babillilerin Seçme Metodu (Mathquake, 06.08.2006 01:00) .....	35
I. Bölüm .....	35
II. Bölüm.....	40
4.3. Plimpton 322 No'lu Tabletin Değerlendirilmesi.....	47
1. Tabletin Son Sütunundaki "1" Rakamı Hakkında .....	47
2. Tabletin Son Sütunundaki "0" Rakamı Hakkında .....	48
"0"ın Kısa Bir Tarihi.....	49
3. Tabletteki Hatalı Rakamlar .....	49
4. Tablo 17'deki Dik Üçgenlerin Doğuranlarının Bulunması Hakkında .....	50
Bir Doktora Tezi .....	50
5. Tabletteki Dik Üçgenlerin Bulunması Hakkında.....	52
Babilli Kâtibin Doğuranları Hesaplama Yöntemi.....	54
6. Neugebauer'in Tahminleri ve Sonuçları.....	55
YBC 7289 No'lu Tablette Düzgün Olmayan Sayılar İçin Yaklaşık Değerlerin Kullanılması Hakkında .....	56
BM 96957 ve VAT 6598 No'lu Tabletlerdeki $\sqrt{28, 20}$ 'ye Rasyonel Yaklaşıklıklar.....	56
7. Dik Üçgende Metrik Bağlantının Antik Greklerde Görülmesi .....	57
Khafre Piramiti $k(3, 4, 5)$ Dik Üçgenine Göre İnşa Edildi!.....	57
Ölümcül Hata!.....	57
Öklid'in Fare Kapanı.....	58
Schopenhauer'in Geometrideki Sentetik Yönteme Eleştirisi.....	58
Yeni Teoremler.....	60
8. Dik Üçgende Metrik Bağlantının Diğer Kaynaklarda Görülmesi.....	61

Osmanlı Döneminde Pisagor Teoremi .....	62
Cumhuriyet Döneminde Pisagor Teoremi .....	62
<i>Atatürk</i> 'ün Fransızcadan Türkçeye Geçişi.....	62
<i>Atatürk</i> 'ün Geometri Kitabı.....	63
Dikeyin Çapı ve Dikeyin Çapının Karesi .....	63
<i>Atatürk</i> Öldükten Sonra Ne Oldu? .....	65
“Hipotenüs” Teriminin Osmanlı ve Türkiye Cumhuriyeti Dönemlerindeki Kullanımları .....	66
Osmanlıca-Türkçe Uydurmaca .....	67
<i>Atatürk</i> 'ün Metrik Bağlıntıdaki Terimleri Türkçeleştirmesi .....	67
Batının İkiyüzlülüğü! .....	68
9. Bu Tablet, Bir Astronomi Tableti Mi İdi?.....	68
3.700 Yıllık Babil Kil Tableti Matematik Tarihini Sonsuza Dek Değiştiriyor!.....	68
4.4. <i>Robson</i> 'un Plimpton 322 No'lu Tabletindeki “Muhtemel Kayıp Satırlar”ı .....	69
4.4.1. <i>Robson</i> 'a Göre Trigonometrik Cetvel.....	70
4.4.1.1. $m_1$ , $\overline{m_0}$ ve $m_0$ 'ın Geometriden Bulunması .....	70
4.4.2. Sonuç.....	73
4.4.3. Larsa'nın Fethi ve Sonuçları .....	73
4.4.4. Thuban'ın MÖ 1820'lerdeki Larsa'daki Yüksekliği .....	74
4.4.4.1. Thuban'ın Hüküm Sürdüğü Dönem .....	74
4.5. YBC 7289 ve Plimpton 322 No'lu Tabletlere Göre Trigonometrik Cetvel.....	75
4.5.1. $\sqrt{2}$ 'nin Alt ve Üst Sınırları .....	75
Kenar-Köşegen Sayıları .....	75
Larsa ve Babil'e Bir Gönderme!.....	85
4.6. Dik Üçgenlerin Doğuranlarının Aritmetik Ortalamaya Göre Bulunması.....	85
4.6.1. Sonuç.....	88

**1. Rasyonel Kenarlı Dik Üçgenlerle Trigonometrik Cetvelin İnşası İçin Bir Metot.** Karmaşık sayılar düzleminde  $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Q}^+$  için öyle  $x_1 + y_1i$  ve  $x_2 + y_2i$  karmaşık sayıları vardır ki  $N(x_1 + y_1i) = z_1$  ve  $N(x_2 + y_2i) = z_2$  olacak şekilde  $z_1, z_2 \in \mathbb{Q}^+$  mevcut olduğundan bu karmaşık sayıların normlarından

$$[1] \quad \begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = z_1^2, \\ x_2^2 + y_2^2 = z_2^2 \end{cases}$$

denklem sistemi ve bu kompleks sayıların çarpımının normundan da

$$[2] \quad (x_1y_2 - x_2y_1)^2 + (x_1x_2 + y_1y_2)^2 = (z_1z_2)^2 = z_1^2z_2^2 = (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)$$

özdeşliği ortaya çıkar. Bu özdeşliği ilkin İskenderiyeli **Diofant**'ın "*Arithmetica (Aritmetik)*" adlı eserinde görüyoruz ama, **Heron**'un "*Metrica*" adlı eserinde olduğu gibi, bu eserde geçen "*Diofant Denklemleri*"nin ilk kez kadim Babillilere ait tabletlerde görülmesi (ki bu özdeşliğin kullanıldığını gösteren Susa tabletleri mevcuttur) nedeniyle bir derlemeler kitabı olduğu anlaşılmaktadır. Daha sonra bu özdeşlik Sayılar Teorisi'nde "*Fermat'ın 2-Kare Toplamı*" olarak yer alır.

Öte yandan bu özdeşliği Vektör Cebri ile yorumlarsak  $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, 0)$  ve  $\vec{v}_2 = (x_2, y_2, 0)$  vektörleri için şu özdeşlik geçerli olur:

$$[3] \quad \|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\|^2 + (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)^2 = \|\vec{v}_1\|^2 \|\vec{v}_2\|^2 = (\|\vec{v}_1\| \|\vec{v}_2\|)^2.$$

Şu hâlde böyle bir trigonometrik cetvelin ilk satırında yer alan  $a_1, h_1, r_1 \in \mathbb{Q}^+$ ,  $a_1 < h_1$  için  $(a_1, h_1, r_1)$  dik üçgeni  $a_0, h_0 \in \mathbb{Q}^+$ ,  $a_0 > h_0$  için  $(a_0, h_0, \sqrt{a_0^2 + h_0^2})$  dik üçgeni tarafından

$$[4] \quad \begin{aligned} a_1 &= \|(a_0, h_0, 0) \times (h_0, a_0, 0)\| = \begin{vmatrix} a_0 & h_0 \\ h_0 & a_0 \end{vmatrix} = a_0^2 - h_0^2, \\ h_1 &= \|(a_0, -h_0, 0) \times (a_0, h_0, 0)\| = \begin{vmatrix} a_0 & -h_0 \\ a_0 & h_0 \end{vmatrix} = 2a_0h_0, \\ r_1 &= (a_0, h_0, 0) \cdot (a_0, h_0, 0) = a_0a_0 + h_0h_0 = a_0^2 + h_0^2 \end{aligned}$$

olacak şekilde doğrulursa,

$$[5] \quad a_1^2 + h_1^2 = r_1^2$$

denkleme göre [2] özdeşliğinden

$$[6] \quad a_1^* = h_1^2 - a_1^2, h_1^* = 2a_1h_1, r_1^* = r_1^2$$

için

$$[7] \quad a_1^{*2} + h_1^{*2} = r_1^4$$

yardımcı denklemi elde edilir ki, genel olarak trigonometrik cetveldeki ardışık dik üçgenlerin eğim açıları arasındaki farkların  $\theta$  civarında seyretmesine neden olan asıl faktör, bu denklemden kaynaklanan dik üçgenin eğim açısıdır.

Şu hâlde trigonometrik cetveldeki  $n = 1, 2, \dots$  için  $(a_n, h_n, r_n)$  dik üçgenlerinin bulunması problemi, [2] özdeşliği altında  $(a_1^*, h_1^*, r_1^2)$  dik üçgeniyle ardışık olarak diğer dik üçgenlere geçmeye dönüşür. Buna göre [2] özdeşliği altında  $(a_1, h_1, r_1)$  ve  $(a_1^*, h_1^*, r_1^2)$  dik üçgenlerinden

$$[8] \quad a_2 = \begin{vmatrix} a_1 & h_1 \\ a_1^* & h_1^* \end{vmatrix} = a_1h_1^* - a_1^*h_1, h_2 = a_1a_1^* + h_1h_1^*, r_2 = r_1 \cdot r_1^2 = r_1^3$$

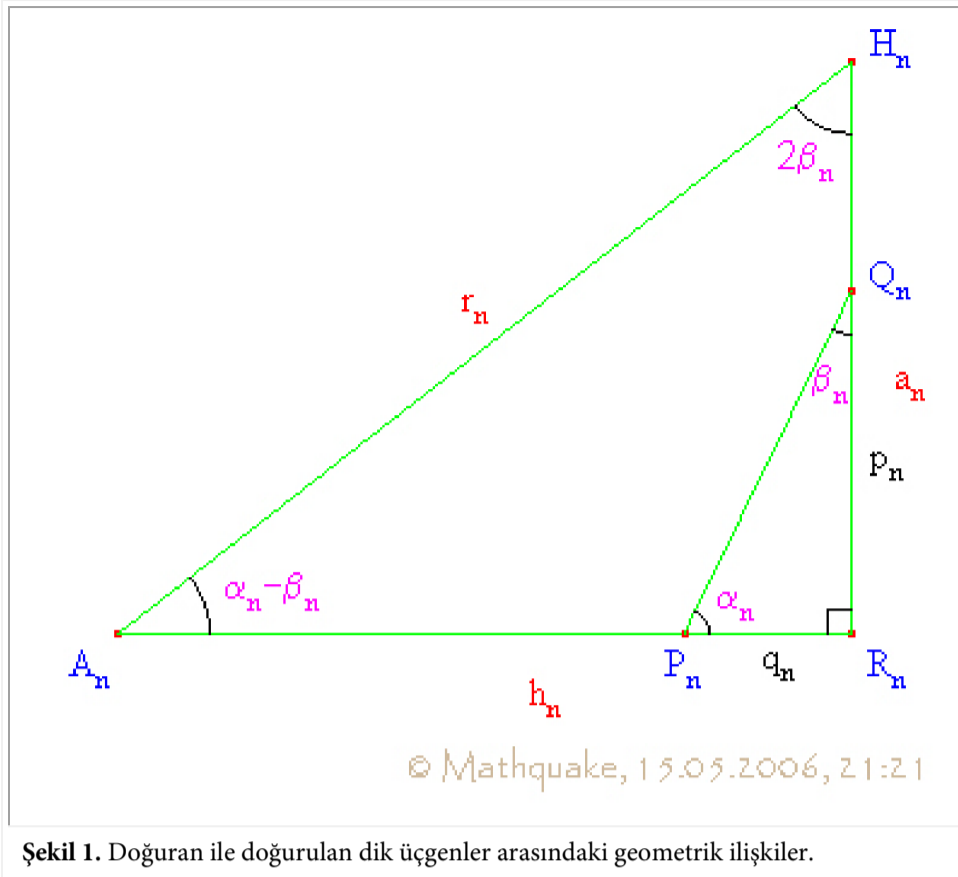
bağıntılarıyla  $(a_2, h_2, r_2) = (a_2, h_2, r_1^3)$  dik üçgeni elde edilir ve genelde de MEM (Matematiksel Endüksiyon Metodu) gereğince  $(a_1^*, h_1^*, r_1^2)$  ve  $(a_{n-1}, h_{n-1}, r_{n-1}) = (a_{n-1}, h_{n-1}, r_1^{2(n-1)-1})$  dik üçgenlerinden

$$[9] \quad \begin{aligned} a_n &= \begin{vmatrix} a_{n-1} & h_{n-1} \\ a_1^* & h_1^* \end{vmatrix} = a_{n-1}h_1^* - a_1^*h_{n-1}, \\ h_n &= a_{n-1}a_1^* + h_{n-1}h_1^*, \\ r_n &= r_1^2 \cdot r_1^{2(n-1)-1} = r_1^{2n-1} \end{aligned}$$

bağıntılarıyla  $(a_n, h_n, r_n) = (a_n, h_n, r_1^{2n-1})$  dik üçgeni bulunmuş olur.

**1.1. Babil Metodu.** Görüldüğü gibi  $(a_n, h_n, r_n)$  dik üçgeni ilk doğuranları  $a_0$  ve  $h_0$  olmak üzere karmaşık bir yapıya sahiptir. Çünkü yukarıdaki metoda göre dik üçgenlerin devamlı suretle birbirinden doğrulması sonucunda  $n + 1$ -inci adımda  $(a_n, h_n, r_n)$  dik üçgeni elde edilmektedir. Oysa Plimpton 322 no'lu tabletle aynı döneme ait Susa Matematik Tableti'nden de kolaylıkla görüleceği gibi,  $(a_n, h_n, r_n)$  dik üçgeninin  $(p_n, q_n)$  doğuranlarıyla  $(p_n, q_n, \sqrt{p_n^2 + q_n^2})$  dik üçgeni tarafından doğrulduğu göz önüne alınırsa, bu durumda  $(p_n, q_n, \sqrt{p_n^2 + q_n^2})$  dik üçgeninden hareketle  $(a_n, h_n, r_n)$  dik üçgenine ulaşıldığında tepe açısının 2 katı alınmış olur. Böylece Plimpton 322 no'lu tableti 1945'te ilk kez okuyup "*Matematiksel Çivi Yazıtları (Mathematical Cuneiform Texts), New Heaven, Conn., 1945*" ortak çalışmasıyla tüm dünyanın dikkatini çeken **Otto Neugebauer (1899-1990)** ve **Abraham Joseph Sachs (1914-1983)**'in ortak tahmini,  $m_n = \tan(\alpha_n) = \frac{p_n}{q_n}$  ve  $m_n^{-1} = \left(\frac{p_n}{q_n}\right)^{-1}$  oranlarının (ki **Neugebauer** bunları  $m_n =: \alpha$  ve  $m_n^{-1} =: \bar{\alpha}$  olarak gösterir. Bkz. S. 41)

$$[10] \quad a_n^2 + h_n^2 = r_1^{2(2n-1)}$$



Şekil 1. Doğuran ile doğurulan dik üçgenler arasındaki geometrik ilişkiler.

denklemden

$$a_n^2 + h_n^2 = r_1^{2(2n-1)} \Rightarrow 1 = \frac{r_1^{2n-1} - a_n}{h_n} \cdot \frac{r_1^{2n-1} + a_n}{h_n} = \frac{q_n}{p_n} \cdot \frac{p_n}{q_n}$$

eşitliklerine göre

$$[11] \quad \frac{q_n}{p_n} = \frac{r_1^{2n-1} - a_n}{h_n}, \quad \frac{p_n}{q_n} = \frac{r_1^{2n-1} + a_n}{h_n}$$

şeklinde bulunmasıyla gerçekleşmiş olmaktadır. Burada  $(p_n, q_n)$  çiftine  $(a_n, h_n, r_1^{2n-1})$  dik üçgeninin doğuranları denir ve  $(a_n, h_n, r_1^{2n-1})$  dik üçgenine ait bileşenlerin  $(p_n, q_n)$  doğuranları cinsinden ifadeleri

$$[12] \quad a_n = p_n^2 - q_n^2, h_n = 2p_n q_n, r_1^{2n-1} = p_n^2 + q_n^2$$

olarak elde edilirler ve bu doğuranlar arasında  $q_n < p_n$  ilişkisi vardır. Aksi takdirde çözümden de görüleceği gibi,  $p_n < q_n$  için  $1 < m_n^{-1} = \frac{q_n}{p_n}$  oranının 2. çarpan olarak alınması gerekir.

Şimdi  $(a_n, h_n, r_n)$  dik üçgeninin inşası için tutmuş olduğumuz bu yol tipik

bir "Babil Metodu"dur. Çünkü bu yol,  $(a_n, h_n, r_n)$  dik üçgeninin inşasını  $(m_n, 1, \sqrt{m_n^2 + 1})$  dik üçgeninin inşasına indirgemiş olmaktadır. Bu problem daha önce BM 34568 no'lu tablette ortaya atılarak çözülmüştür.

## 1.2. $(p_n, q_n, \sqrt{p_n^2 + q_n^2})$ Doğuran Dik Üçgeni İle $(a_n, h_n, r_n)$ Doğurulan Dik Üçgeni Arasındaki İlişkiler

1. 2'ye Katlama Bağıntısı. Şekil 1'e göre  $(p_n, q_n, \sqrt{p_n^2 + q_n^2})$  dik üçgenindeki tepe açısı olan  $\beta_n$ ,

$$[13] \quad \beta_n = \text{Tan}^{-1}\left(\frac{q_n}{p_n}\right) \Rightarrow 2\beta_n = 2\text{Tan}^{-1}\left(\frac{q_n}{p_n}\right) = \text{Tan}^{-1}\left(\frac{2p_n q_n}{p_n^2 - q_n^2}\right) \stackrel{[12]}{=} \text{Tan}^{-1}\left(\frac{h_n}{a_n}\right) \Rightarrow 2\beta_n = \text{Tan}^{-1}\left(\frac{h_n}{a_n}\right)$$

şeklinde 2'ye katlanmış olduğundan  $(a_n, h_n, r_n)$  dik üçgeninin tepe açısı  $(p_n, q_n, \sqrt{p_n^2 + q_n^2})$  dik üçgeninin tepe açısının 2 katı olarak elde edilir.

Diğer yandan

$$[14] \quad \text{Tan}^{-1}\left(\frac{a_n}{h_n}\right) + \text{Tan}^{-1}\left(\frac{h_n - a_n}{h_n + a_n}\right) = \frac{\pi}{4}$$

özdeşliğindeki

$$[15] \quad 2\beta_n = \text{Tan}^{-1}\left(\frac{h_n}{a_n}\right), \quad \frac{-a_n + 3\beta_n}{2} = \text{Tan}^{-1}\left(\frac{h_n - a_n}{h_n + a_n}\right)$$

açıları bir kez daha 2'ye katlanırsa, ki bu durumda  $(a_n, h_n, r_n)$  dik üçgeninin tepe açısı 2'ye katlanmış olmaktadır,  $(1, 1, \sqrt{2})$  ile  $(a_1, h_1, r_1)$  dik üçgenlerinin eğim açıları arasındaki fark,

$$[16] \quad \begin{aligned} \frac{-\alpha_1 + 3\beta_1}{2} &= \text{Tan}^{-1}\left(\frac{h_1 - a_1}{h_1 + a_1}\right) \Rightarrow 2 \cdot \frac{-\alpha_1 + 3\beta_1}{2} = 2\text{Tan}^{-1}\left(\frac{h_1 - a_1}{h_1 + a_1}\right) = \text{Tan}^{-1}\left(\frac{2(h_1 + a_1)(h_1 - a_1)}{(h_1 + a_1)^2 - (h_1 - a_1)^2}\right) \\ &= \text{Tan}^{-1}\left(\frac{h_1^2 - a_1^2}{2a_1 h_1}\right) \stackrel{[6]}{=} \text{Tan}^{-1}\left(\frac{a_1^*}{h_1^*}\right) \Rightarrow -\alpha_1 + 3\beta_1 = \text{Tan}^{-1}\left(\frac{a_1^*}{h_1^*}\right) \end{aligned}$$

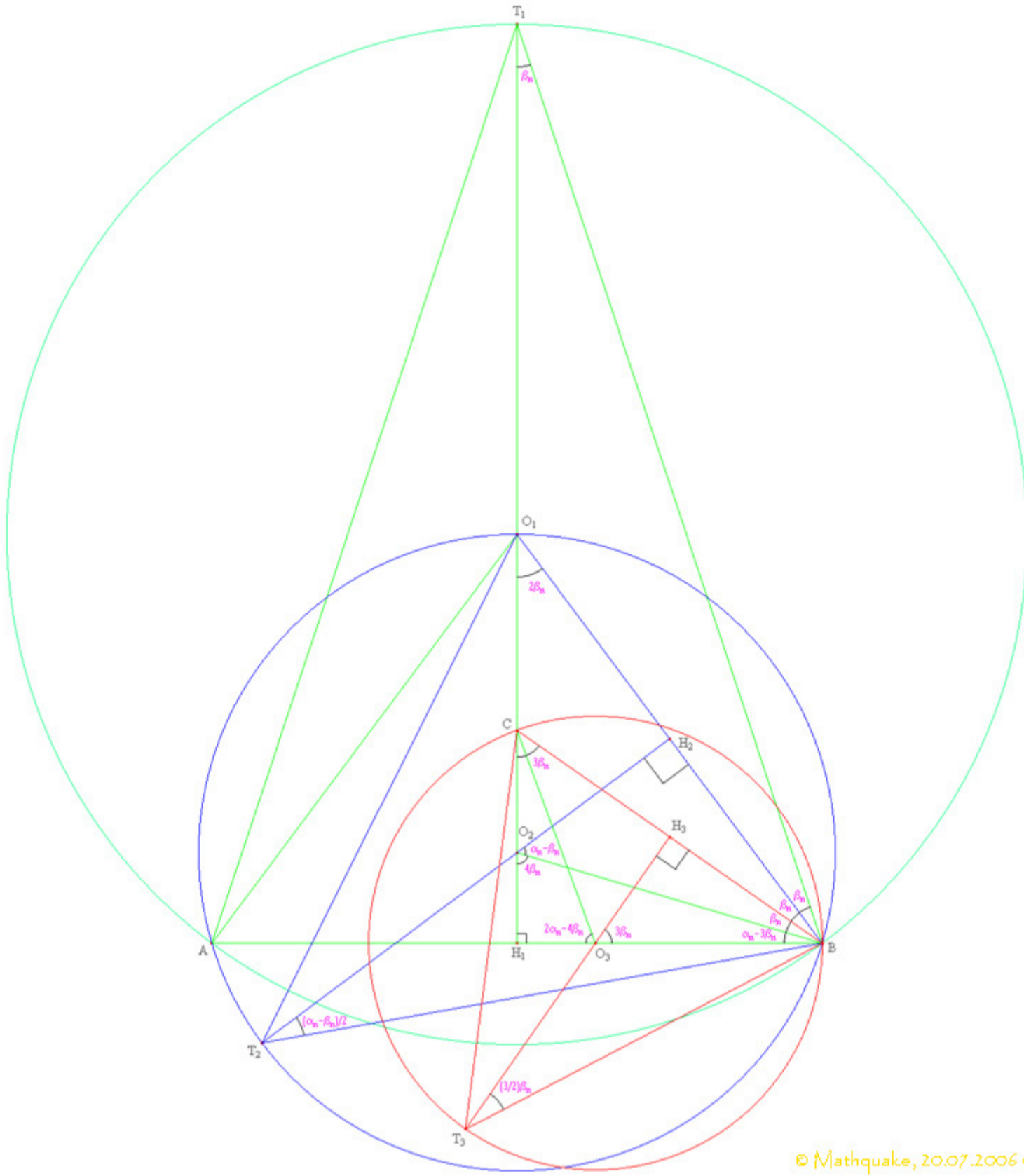
şeklinde 2'ye katlanarak  $(a_1^*, h_1^*, r_1^2)$  dik üçgeninin eğim açısı elde edildiğinden,  $(a_1, h_1, r_1)$  dik üçgeninden  $(a_1^*, h_1^*, r_1^2)$  dik üçgenine geçilmiş olur.

Susa Matematik Tableti'nde ise 2'ye katlama bağıntısı şu şekilde ortaya çıkar: Aşağıdaki Şekil 2'de Susa tabletindeki  $|AT_1| = |BT_1|$  için  $ABT_1$  ikizkenar üçgeni ve çevrel çemberi yer almaktadır. Eğer kenarlarının uzunluklarına göre  $BH_1T_1$  dik üçgeni  $(p_n, q_n, \sqrt{p_n^2 + q_n^2})$  sıralı üçlüsüyle gösterilirse  $BH_1O_1$  dik üçgeni  $(\frac{p_n^2 - q_n^2}{2p_n}, q_n, \frac{p_n^2 + q_n^2}{2p_n})$  sıralı üçlüsüne karşılık geldiğinden,  $n = 1$  için  $(a_1, h_1, r_1)$  dik üçgeni bu son sıralı üçlünün  $2p_1$  katı olarak elde edilir.

Şimdi ilkin  $BH_1O_1$  dik üçgeninin  $[BO_1]$  hipotenüsünün orta dikmesi çizilirse,  $[T_2H_2]$  orta dikmesinin  $[T_1H_1]$  orta dikmesini kestiği  $O_2$  noktası 2. çemberin merkezi olur ve  $|BO_2| = |O_2O_1|$  eşitliği nedeniyle mavi renkli çevrel çemberiyle birlikte  $|BT_2| = |O_1T_2|$  için  $BO_1T_2$  ikizkenar üçgeni ortaya çıkar. Dikkat edilirse  $BH_1O_1$  dik üçgeninin tepe açısının 2'ye katlanmasıyla  $BH_1O_2$  dik üçgeninin tepe açısının  $4\beta_1$  ve eğim açısının da  $\alpha_1 - 3\beta_1$  olduğu görülür. Bu da açıkça  $BH_1O_2$  dik üçgeninin eğim açısının  $(a_1^*, h_1^*, r_1^2)$  dik üçgeninin eğim açısının ters işaretlisi olup,

$$[17] \quad \angle(H_1BO_2) = \alpha_1 - 3\beta_1 = -\text{Tan}^{-1}\left(\frac{a_1^*}{h_1^*}\right) = \text{Tan}^{-1}\left(\frac{a_1^2 - h_1^2}{2a_1 h_1}\right)$$

eşitlikleri nedeniyle  $h_1 < a_1$  şartını ortaya koyar.



© Mathquake, 20.07.2006 01:11

Şekil 2. Susa Matematik Tableti'nde  $(a_n, h_n, r_n)$  dik üçgenine benzer olan dik üçgenlerde 2'ye katlama bağıntısı (Bkz. "New Angles on Ancient Babylonian Geometry (Part 2)").

İkinci olarak  $[BO_1]$  açıortay olarak göz önüne alınırsa –ki  $BT_1O_1$  üçgeninin  $[BO_1]$  kenarı sabit olmak üzere düzlem üzerine katlanmasıyla  $[BO_1]$  kenarının  $[T_1H_1]$  orta dikmesini kestiği nokta C olur ve bu durumda  $[BO_1], BT_1C$  üçgeninin açıortayı olarak ortaya çıkmış olur–  $BH_1C$  dik üçgeninin  $[BC]$  hipotenüsünün orta dikmesi çizildiği takdirde  $[T_3H_3]$  orta dikmesinin  $[BH_1]$  kenarını kestiği  $O_3$  noktası da 3. çemberin merkezi olur ve  $|BO_3| = |O_3C|$  eşitliği nedeniyle kırmızı renkli çevrel çemberiyle birlikte  $|BT_3| = |CT_3|$  için  $BCT_3$  ikizkenar üçgeni ortaya çıkar. Dolayısıyla  $O_3H_1C$  dik üçgeninin eğim açısının

$$[18] \quad \angle(H_1O_3C) = \angle(H_1BO_1) + \angle(H_1BO_2) = (\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_1 - 3\beta_1) = 2\alpha_1 - 4\beta_1$$

olması hem "Bir çemberde aynı yayı gören merkez açının ölçüsü çevre açının ölçüsünün 2 katıdır" kuralına göre  $BH_1C$  dik üçgeninin eğim açısı 2'ye katlanmış olmaktadır hem de trigonometrik cetveldeki  $(a_2, h_2, r_2) = (a_2, h_2, r_1^3)$  dik üçgeni ile  $O_3H_1C$  dik üçgeninin benzer oldukları sonucu ortaya çıkmış olmaktadır.

Sonuçta işleme bu şekilde devam edilirse trigonometrik cetveldeki  $(a_n, h_n, r_n) = (a_n, h_n, r_1^{2n-1})$  dik üçgenlerine benzer olan dik üçgenler Susa tabletinden hareketle elde ettiğimiz yukarıdaki şekilden geometrik olarak elde edilebilirler. Üstelik, burada  $(a_1^*, h_1^*, r_1^2)$  transit dik üçgen olduğundan  $(a_n, h_n, r_1^{2n-1})$  dik üçgenlerinde  $a_1 < h_1$  ters şartı geçerli olmaktadır.

**2.  $(a_n, h_n, r_n)$  Dik Üçgeni ve  $(p_n, q_n)$  Doğuranlarının Trigonometrik Formülleri.** Öncelikle  $(p_1, q_1, \sqrt{p_1^2 + q_1^2})$  dik üçgenindeki tepe açısı  $\beta_1$ 'i 2'ye katlarsak [13]'ten

$$[19] \quad \beta_1 = \text{Tan}^{-1}\left(\frac{q_1}{p_1}\right) \Rightarrow 2\beta_1 = 2\text{Tan}^{-1}\left(\frac{q_1}{p_1}\right) = \text{Tan}^{-1}\left(\frac{2p_1q_1}{p_1^2 - q_1^2}\right) = \text{Tan}^{-1}\left(\frac{h_1}{a_1}\right) \Rightarrow 2\beta_1 = \text{Tan}^{-1}\left(\frac{h_1}{a_1}\right)$$

ve  $2\beta_1$  açısını tekrar 2'ye katlarsak

$$[20] \quad 2\beta_1 = \text{Tan}^{-1}\left(\frac{h_1}{a_1}\right) \Rightarrow 2(2\beta_1) = 2\text{Tan}^{-1}\left(\frac{h_1}{a_1}\right) = \text{Tan}^{-1}\left(\frac{2a_1h_1}{h_1^2 - a_1^2}\right) = \text{Tan}^{-1}\left(\frac{h_1^*}{a_1^*}\right) \Rightarrow 4\beta_1 = \text{Tan}^{-1}\left(\frac{h_1^*}{a_1^*}\right)$$

sonuçları elde edilir.

Şu hâlde bu sonuçlara göre

$$[21] \quad \begin{aligned} \tan^{-1}\left(\frac{a_1}{h_1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{a_1^*}{h_1^*}\right) &= \tan^{-1}\left(\frac{a_1 h_1^* - a_1^* h_1}{a_1 a_1^* + h_1 h_1^*}\right) \stackrel{[8]}{=} \tan^{-1}\left(\frac{a_2}{h_2}\right) \\ (\alpha_1 - \beta_1) - (-\alpha_1 + 3\beta_1) &= 2\alpha_1 - 4\beta_1 \end{aligned}$$

özdeşliği elde edilir ve işleme yine aynı şekilde devam edilirse,

$$[22] \quad \begin{aligned} \tan^{-1}\left(\frac{a_2}{h_2}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{a_1^*}{h_1^*}\right) &= \tan^{-1}\left(\frac{a_2 h_1^* - a_1^* h_2}{a_2 a_1^* + h_2 h_1^*}\right) \stackrel{[9]}{=} \tan^{-1}\left(\frac{a_3}{h_3}\right) \\ (2\alpha_1 - 4\beta_1) - (-\alpha_1 + 3\beta_1) &= 3\alpha_1 - 7\beta_1 \end{aligned}$$

özdeşliği bulunur ve sonuçta işleme bu şekilde devam edildiği takdirde MEM metoduna göre

$$[23] \quad \begin{aligned} \tan^{-1}\left(\frac{a_{n-1}}{h_{n-1}}\right) &= (n-1)\alpha_1 - (3(n-1) - 2)\beta_1 = (n-1)\alpha_1 - (3n-5)\beta_1 \\ \tan^{-1}\left(\frac{a_1^*}{h_1^*}\right) &= -\alpha_1 + 3\beta_1 \end{aligned}$$

özdeşliklerinin doğruluğu altında

$$[24] \quad \begin{aligned} \tan^{-1}\left(\frac{a_{n-1}}{h_{n-1}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{a_1^*}{h_1^*}\right) &= \tan^{-1}\left(\frac{a_{n-1} h_1^* - a_1^* h_{n-1}}{a_{n-1} a_1^* + h_{n-1} h_1^*}\right) \stackrel{[9]}{=} \tan^{-1}\left(\frac{a_n}{h_n}\right) \\ ((n-1)\alpha_1 - (3n-5)\beta_1) - (-\alpha_1 + 3\beta_1) &= n\alpha_1 - (3n-2)\beta_1 \end{aligned}$$

genel özdeşliğini bulmuş oluruz.

Buna göre  $(a_n, h_n, r_n)$  dik üçgenindeki  $\frac{a_n}{h_n}$  oranı için trigonometrik formül,

$$\begin{aligned} \tan^{-1}\left(\frac{a_n}{h_n}\right) &= n\alpha_1 - (3n-2)\beta_1 = n\left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right) - (3n-2)\beta_1 = \frac{n}{2}\pi - (4n-2)\beta_1 \\ \Rightarrow \frac{a_n}{h_n} &= \tan\left(\frac{n}{2}\pi - (4n-2)\beta_1\right) = \frac{\tan\left(\frac{n}{2}\pi\right) - \tan((4n-2)\beta_1)}{1 + \tan\left(\frac{n}{2}\pi\right)\tan((4n-2)\beta_1)} = \frac{4(-1)^{n+1}\tan((4n-2)\beta_1)}{(1 + (-1)^n)^2 + (-1 + (-1)^n)^2 \tan^2((4n-2)\beta_1)} \end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$[25] \quad \frac{a_n}{h_n} = \frac{4(-1)^{n+1}\tan((4n-2)\beta_1)}{(1 + (-1)^n)^2 + (-1 + (-1)^n)^2 \tan^2((4n-2)\beta_1)}$$

olarak bulunur. Burada n'nin tek ve çift oluşlarına göre k doğal sayısı için bu trigonometrik fonksiyon,

$$[26] \quad \frac{a_{2k+1}}{h_{2k+1}} = \cot((8k+2)\beta_1), \frac{a_{2k+2}}{h_{2k+2}} = -\tan((8k+6)\beta_1) = \tan((8k+6)\alpha_1)$$

şeklinde 2 parçaya ayrılmaktadır.

Şimdi  $(a_n, h_n, r_1^{2n-1})$  dik üçgeninde  $(p_n, q_n, \sqrt{p_n^2 + q_n^2})$  doğuran dik üçgeninin  $m_n = \frac{p_n}{q_n}$  eğimi göz önüne alınırsa, ilkin

$$\begin{aligned} \frac{m_{2k+1} - m_{2k+1}^{-1}}{2} &= \frac{a_{2k+1}}{h_{2k+1}} = \cot((8k+2)\beta_1) \Rightarrow \\ m_{2k+1} &= \cot((8k+2)\beta_1) \pm \sqrt{1 + \cot^2((8k+2)\beta_1)} = \begin{cases} \frac{\cos((8k+2)\beta_1) - 1}{\sin((8k+2)\beta_1)} = -\frac{2\sin^2((4k+1)\beta_1)}{2\sin((4k+1)\beta_1)\cos((4k+1)\beta_1)} = -\tan((4k+1)\beta_1) \\ \frac{\cos((8k+2)\beta_1) + 1}{\sin((8k+2)\beta_1)} = \frac{2\cos^2((4k+1)\beta_1)}{2\sin((4k+1)\beta_1)\cos((4k+1)\beta_1)} = \cot((4k+1)\beta_1) \end{cases} \end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$m_{4k+3} = m_{2(2k+1)+1} = -\tan((4(2k+1)+1)\beta_1) = -\tan((8k+5)\beta_1), m_{4k+1} = m_{2(2k)+1} = \cot((4(2k)+1)\beta_1) = \cot((8k+1)\beta_1)$$

genel çözümüne ulaşılır ve buradan da

$$[27] \quad m_{4k+1} = \cot((8k+1)\beta_1), m_{4k+3} = -\tan((8k+5)\beta_1)$$

eşitliklerini elde ederiz.

İkinci olarak

$$\frac{m_{2k+2} - m_{2k+2}^{-1}}{2} = \frac{a_{2k+2}}{h_{2k+2}} = -\tan((8k+6)\beta_1) \Rightarrow m_{2k+2} = -\tan((8k+6)\beta_1) \pm \sqrt{1 + \tan^2((8k+6)\beta_1)} = \begin{cases} \frac{-\sin((8k+6)\beta_1) - 1}{\cos((8k+6)\beta_1)} \\ \frac{-\sin((8k+6)\beta_1) + 1}{\cos((8k+6)\beta_1)} \end{cases}$$

eşitlikleri nedeniyle

$$m_{4k+2} = m_{2(2k)+2} = -\frac{1 + \sin((8(2k) + 6)\beta_1)}{\cos((8(2k) + 6)\beta_1)} = -\frac{1 + \sin((16k + 6)\beta_1)}{\cos((16k + 6)\beta_1)}, m_{4k+4} = m_{2(2k+1)+2} = \frac{1 - \sin((8(2k+1) + 6)\beta_1)}{\cos((8(2k+1) + 6)\beta_1)} = \frac{1 - \sin((16k + 14)\beta_1)}{\cos((16k + 14)\beta_1)}$$

genel çözümünden

$$[28] \quad m_{4k+2} = -\frac{1 + \sin((16k + 6)\beta_1)}{\cos((16k + 6)\beta_1)}, m_{4k+4} = \frac{1 - \sin((16k + 14)\beta_1)}{\cos((16k + 14)\beta_1)}$$

eşitlikleri elde edilir.

### 13 Hakkında

**Ramanujan**, tam sayılar arasındaki bağılıkları bulma bakımından üstün ve parlak bir zekâyâ sahipti.

Putney'deki bir hastanede ölüm döşeginde yatarken **Hardy** onu ziyarete giderdi. Taksi plaka no'su ile ilgili olay bu ziyaretlerin birinde gerçekleşti. **Hardy** o gün de her zamanki ulaşım aracı olan taksi ile gitmişti. **Ramanujan**'ın yattığı odaya girdi. **Hardy**, konuşma başlatmakta her zamanki beceriksizliği ile, muhtemelen daha selâmlaşmadan ve mutlaka ilk söz olarak, "Geldiğim taksinin plaka no'su 1729'du. Bana çok alelade bir sayı gibi geldi" dedi. **Ramanujan**'ın buna yanıtı şu oldu (ki o sırada **Hardy**'nin aklına bu sayının 1729 = 7.13.19 şeklinde asal çarpanlarına ayrılışındaki 13'ün uğursuz olduğu gelmişti): "Hayır **Hardy**! Hayır **Hardy**! Çok ilginç bir sayı. 2 küpün toplamı olarak 2 ayrı şekilde ifade edilebilen en küçük sayı"

C. P. Snow

**Not.** **Hardy**'nin ifadesine göre **Snow** tarafından aktarılan konuşma bu şekilde geçmiştir. **Hardy**, 13'ün uğursuzluğuna inananlardan biri olarak hastanede **Ramanujan**'ın ölüm haberini alacağını sanmıştı ve **Ramanujan**'ı sağlıklı görünce bu korkusunu dile getirmiş.

Bir not da bizden olsun: İstanbul'un fethedildiği yıl olan 1453 sayısı asaldır ancak bu sayının 1 + 4 + 5 + 3 = 13 şeklinde rakamları toplamı 13'tür. Bu nedenle 13 sayısı o günden bu yana Batılılar tarafından "uğursuz" olarak kabul edilmiştir. Dolayısıyla **Hardy**'nin korkusu buradan gelebilir, ancak 13 için 2 tableten "0" rakamı ile ilgili elde ettiğim şu bulgular daha ilginçtir:

Plimpton 322 no'lu tablette 2 yerde "0" rakamı için bir "boşluk" bırakılmıştır: 1. Satır-4. Sütun'daki "0" rakamına karşılık gelen boşluğun olduğu (tabletin kırık kısmında olması nedeniyle) tartışılabilir ancak 13. Satır-4. Sütun'daki "0" rakamını temsil eden boşluk tartışmasız bir şekilde, açıkça görülmektedir ki, bu da "0" rakamının tarihini bilinenenden çok daha geriye götürür. Ama esas ilginçlik şurada yatar: Bu satırlardaki dik üçgenleri doğuran dik üçgenler de rasyonel kenarlı dik üçgenlerdir ve bu doğuran dik üçgenleri doğuran dik üçgenlerin de dik kenarları da rasyoneldir).

Oysa bu tabletin kardeşi olan YBC 7289 no'lu tablette "0" rakamının olup olmadığı hakkında Matematik Dünyası'nda bir tartışma başlatılmış ve sonuçlanamamıştı!

Bu konuda

[Hesabın Destanında İlk Gerçek Algoritma: YBC 7289 no'lu Tabletindeki Babil Algoritması, 1. Baskı, 20.04.2006, 17:00:00.](#)

çalışmasıyla YBC 7289 no'lu tabletinin tam bir deşifresini verdiğimde, orada da "0" rakamı için 2 yerde boşluk kullanıldığı ortaya çıktı! Ne ilginç değil mi?

**Mathquake'in Hardy'e Yanıtı:** Hayır dostum, korkmana gerek yok! Bu sayının çalışmamızda bir başka ilginç özelliği şu şekilde ortaya çıktı: 13 sayısı, aynı zamanda en küçük (triviyal olmayan) 2 tam sayının karelerinin toplamıdır:

$$2^2 + 3^2 = 13.$$

**Not 1.** Plimpton 322 no'lu tabletindeki ilk satırdaki dik üçgen,  $(p_1, q_1, \sqrt{p_1^2 + q_1^2}) = (12, 5, 13)$  doğuran dik üçgeniyle elde edilen  $(a_1, h_1, r_1) = (119, 120, 169)$  dik üçgenidir. Ancak  $(12, 5, 13)$  doğuran dik üçgeni de  $(p_0, q_0, \sqrt{p_0^2 + q_0^2}) = (2, 3, \sqrt{13})$  dik üçgeni tarafından doğrulamaktadır ki [13] bağıntısına göre

$$[29] \quad \frac{\alpha_1}{2} = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow 2\tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = \alpha_1 = \tan^{-1}\left(\frac{12}{5}\right) \Rightarrow 2\alpha_1 = -\tan^{-1}\left(\frac{120}{119}\right)$$

eşitlikleri 2'ye katlama bağıntısına güzel bir örnek teşkil etmektedir. Tablette bunun gibi güzel bir örnek daha var: 13. satırdaki  $(a_{13}, h_{13}, r_{13}) = (161, 240, 289)$  dik üçgeni. Her iki dik üçgenin hipotenüs uzunlukları birer kare sayı olduklarından, her iki dik üçgen de Susa tabletindeki orijinal problemle tamamen uyumludur.

**3. [10] Denkleminin Genel Çözümüne Göre  $(a_n, h_n, r_n)$ 'nin ve  $(p_n, q_n)$  Doğuranlarının  $(p_1, q_1)$  İlk Doğuranları Cinsinden Bulunması.** Sayılar Teorisi'nde [10] denklemi  $2(2n - 1) =: m$  için  $a_{\frac{m+2}{4}}^2 +$

$h_{\frac{m+2}{4}}^2 = r^m$  ya da kısaca  $a^2 + h^2 = r^m$  şeklinde göz önüne alınırsa  $1 < m$  ( $m \in \mathbb{Z}^+$ ) için

$$[30] \quad a^2 + h^2 = r^m$$

denkleminin özel bir hali olduğundan, bu denklemin genel çözümünden [10] denkleminin genel çözümüne ulaşılabilir.

Diğer taraftan burada  $h < a$  şartı altında

$$[31] \quad a^2 - h^2 = x^m$$

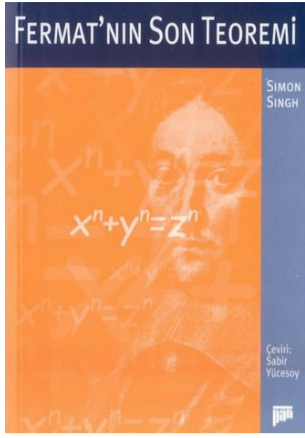
denklemi de göz önüne alınırsa [30] veya [31] denkleminin pozitif tam sayılar kümesinde çözümü olmasına rağmen her ikisinin birden pozitif tam sayılar kümesinde çözümü yoktur. Bu konuda **Pierre De Fermat**'ın; "Bunun gerçekten dikkat çekici güzellikte bir kanıtını buldum, ancak sayfadaki boşluk kanıtı yazamayacak kadar küçük!!!" sözünü söylemiş olması ihtimali daha yüksek görünmektedir. Çünkü [30] ve [31] sisteminin çözümsüzlüğü "**Çift Kuvvetler İçin Fermat'ın Son Teoremi**"nin doğru olduğunu söylemektedir.

Bu sistemin çözümsüzlüğüne ilişkin en basit ispat için **Fermat**'ın şu bilgisi oldukça dikkat çekmektedir. **Diofant**'ın "**Arithmetica**" adlı eserinin 4. cildindeki 26. problemde sonra **Fermat** şu sonucu veriyor:

"Kenarları rasyonel sayılar olan bir dik üçgenin alanı, bir rasyonel sayının karesi olamaz. Bu teoremi ancak uzun ve zorlu bir çalışma sonucu kanıtlayabildim. Kanıtı burada veriyorum çünkü kullandığım yöntem sayılar teorisinde büyük ilerlemelere yol açabilir", "**İskenderiyeli Diofant: Yunan Cebir Tarihi Üzerine Bir Çalışma**", S. 293.

Sonra oldukça karmaşık bir dille ve hiçbir sembol kullanmadan kanıtı anlatıyor ve "sayfadaki boşluğun yeterli olmaması nedeniyle tüm ayrıntıları veremeyeceğini" yazarak bitiriyor. **Fermat** bu yeni yönteme "**Sonsuz Azalma**" adını verdi.

Eğer **Fermat**'ın yukarıdaki sonucu bir teorem olarak ifade edersek son teorem çift kuvvetler için ispatlanmış olur. Bu konuda **Fermat**'ın 4. kuvvet için ayrıca bir ispat yaptığını biliyoruz ama bulduğu sonuç aslında çift kuvvetler için genel bir ispattı!



**Teorem (Fermat, 1640).** Kenarları birer rasyonel sayı olan bir dik üçgenin alanı kare sayı olamaz!

Çünkü

$$[32] \quad x^{2m} + y^{2m} = r^{2m}$$

denkleminin genel çözümü Babilliler'in çözüm formülüne göre  $(a, h)$  doğuranları cinsinden

$$[33] \quad x^m = a^2 - h^2, y^m = 2ah, r^m = a^2 + h^2$$

şeklinde göz önüne alınırsa, **Fermat**'ın teoremine göre  $(x^m, y^m, r^m)$  dik üçgeninin alanı için  $s$  bir pozitif tam sayı olmak üzere

$$[34] \quad A = \frac{x^m y^m}{2} = \frac{(a^2 - h^2)(2ah)}{2} = ah(a^2 - h^2) \neq s^2$$

olurdu. Eğer bu denklemi sağlayan  $a$  ve  $h$  pozitif tam sayıları olsaydı, eşitliğin solundaki çarpanların birer tam kare (sayı) olmaları gerekirdi. Örneğin  $m = 2$  için  $a = a_0^2$  ve  $h = h_0^2$  olduklarını gözönüne alırsak,

$$[35] \quad a^2 - h^2 = \left(\frac{s}{a_0 h_0}\right)^2 (= x^2)$$

olması gerekirdi. Oysa **Fermat**'ın teoremine göre bu mümkün değildir ve bu da  $a$  ve  $h$  pozitif tam sayıları mevcut olsa bile,  $x$  pozitif tam sayısının mevcut olmadığını gösterir. Bu sonuç ise genel olarak  $m = 2k$  için [32] denkleminin pozitif tam sayılar kümesinde çözümünün olmadığını gösterir. O halde genel olarak bu ispata göre  $a$  ve  $h$  pozitif tam sayıları için  $a^2 + h^2 = r^{4k}$  denkleminin pozitif tam sayılarda çözümü olmasına rağmen  $a^2 - h^2 = x^{4k}$  denkleminin pozitif tam sayılar kümesinde çözümü yoktur. Çünkü  $x$  pozitif bir tam sayı değildir!

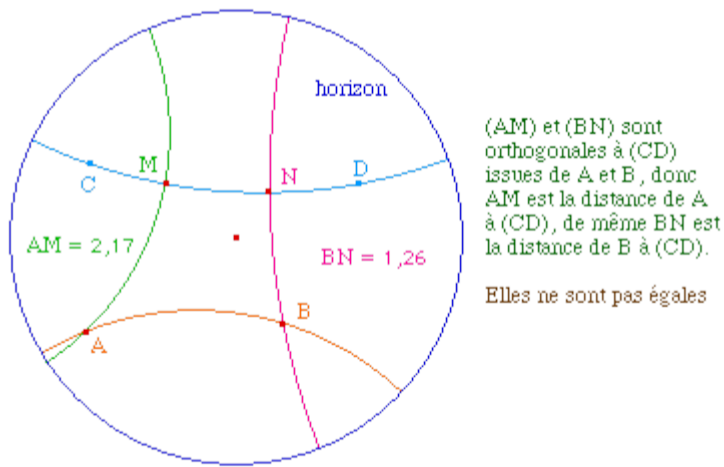
Şimdi çalışma alanımızın dışına çıkmamak için [30] ve [31] denklemlerinin genel çözümlerine göre sistemin çözümsüzlüğünün nasıl bulunduğunu bir kenara bırakırsak **Fermat**'ın teoremi şu şekilde genelleşmiş olur:

**Genelleştirilmiş Fermat Teoremi.** Kenarları birer rasyonel sayı olan bir dik üçgenin alanı kare olamaz, bir tam küp olamaz. Aynı özellik 4. kuvvet ve genel olarak 4'ten büyük tüm kuvvetler için de doğrudur!

İşte bu son teoreme göre **Fermat**'ın teoreminin genelleştirilmişini düşündüğünüzde çift kuvvetler için **Fermat**'ın son teoreminin doğru olduğunu görürsünüz.

Peki, tek kuvvetler için **Fermat**'ın son teoremi hakkında ne söylenebilir?

Bunun için de şu gelişmeye bir bakalım: [Fermat'a Duyurulur!](#)



17. yüzyıl Fransız matematikçisi **Pierre Fermat**'a (1601-1663) atfedilen ve "**Fermat'ın Son Teoremi**"nin özel bir hâli olan

$$[36] \quad x^3 + y^3 = z^3$$

denkleminin tam sayılarla çözülemeyeceğini büyük bir ustalıklı gösteren **Ömer Hayyam**, **Fermat**'tan tam 550 yıl önce göstermiştir. Bilindiği üzere **Ömer Hayyam** rubailerıyla tanındığı kadar, Matematik alanında yaptığı çalışmalarla da meşhur oldu. Cebirde Babillilerden sonra ilk kez ve esaslı bir şekilde 2. dereceden denklemlerin geometrik ve cebirsel çözümleriyle birlikte 3. dereceden denklemlerin tasvirini yapmıştır. Birçok cebrik denkleminin çözümünü geometrik olarak açıklamıştır. Çünkü Babillilerden Türk-İslâm dünyası matematikçilerine kadar geçen zamanda bu denklemleri çözen çıkmamıştı! Kübik denklemlerin kısmî çözüm şekillerini

sistemik bir şekilde tarif ve tasvir etmiştir. Örneğin yandaki resimde **Hayyam**'ın kübik bir denklem için geometrik tasvirini görebilirsiniz. Zaten [30] denkleminin genel çözümü bir çember üzerinde trigonometrik fonksiyonlarla ve [31] denkleminin genel çözümü ise bir hiperbolde hiperbolik fonksiyonlarla temel özdeşliklerle elde edildiğinden, [30] ve [31] sisteminin çözümü bir çember ile hiperbolün kesim noktaları olarak karşımıza çıkar. Bunun güzel bir örneğini aynı metodu kullanan **Ömer Hayyam**'ın 3. dereceden bir denklemin pozitif tam sayılı kökünü konikleri nasıl kesiştirerek elde ettiğini bu resimde görebilirsiniz. Özetle bu ve diğer bütün bilgiler bir araya getirildiğinde **Fermat**'ın "**Son Teoremi**" nasıl oluşturduğunu tahmin etmek güç olmasa gerek!

Şimdi [10] denkleminin genel çözümü için [30] denkleminin genel çözümüne geçebiliriz.

**[30] Genel Denkleminin 2 Terimli Formüle Göre Genel Çözümünün Bulunması.** [30] denkleminin genel çözümü için birim çemberdeki

$$[37] \quad \cos^2(mt) + \sin^2(mt) \equiv 1 \equiv (\cos^2(t) + \sin^2(t))^m$$

temel özdeşliğinden her  $m$  doğal sayısı için

$$[38] \quad (e^{\pm ti})^m = (\cos(t) \pm i\sin(t))^m \equiv \cos(mt) \pm i\sin(mt) = e^{\pm mti}$$

özdeşliği geçerli olur ve bu özdeşlikten 2 terimli açılımla

$$[39] \quad (\cos(t) + i\sin(t))^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \cos^{m-k}(t) (i\sin(t))^k = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} i^k \cos^{m-k}(t) \sin^k(t)$$

eşitlikleri ortaya çıkar. Buna göre [39] özdeşliğinde “2 karmaşık sayı birbirine eşit ise, reel ve sanal kısımları birbirine eşittir” kuralına göre [37] denkleminin, dolayısıyla [30] denkleminin genel çözümü bulunmuş olur!

Söz konusu bu genel çözüm şu yolla daha kolay şekilde bulunmaktadır: Öncelikle  $z_1$  ve  $z_2$  herhangi 2 karmaşık sayı olmak üzere 2 terimli açılıma göre

$$[40] \quad (z_1 + z_2)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} z_1^{m-k} z_2^k$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $a_k$  karmaşık sayıları ne olursa olsun sonlu tane karmaşık sayının toplamı için

$$[41] \quad \sum_{k=0}^m a_k = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} a_{2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} a_{2k+1}$$

özdeşliği vardır. O halde  $z_1$  ve  $z_2$  karmaşık sayıları için

$$[42] \quad (z_1 + z_2)^m = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \binom{m}{2k} z_1^{m-2k} z_2^{2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \binom{m}{2k+1} z_1^{m-(2k+1)} z_2^{2k+1}$$

özdeşliği geçerli olur. Eğer bu özdeşlikte  $z_1 = \cos(t)$  ve  $z_2 = i \sin(t)$  değişken dönüşümleri yapılırsa,

$$\begin{aligned} (\cos(t) + i \sin(t))^m &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \binom{m}{2k} \cos^{m-2k}(t) (i \sin(t))^{2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \binom{m}{2k+1} \cos^{m-(2k+1)}(t) (i \sin(t))^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{m}{2k} \cos^{m-2k}(t) \sin^{2k}(t) + i \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{m}{2k+1} \cos^{m-(2k+1)}(t) \sin^{2k+1}(t) \end{aligned}$$

olur ve özdeşliğin sol tarafında [38]'deki *Euler*'in kuralı uygulanırsa,

$$[43] \quad \cos(mt) + i \sin(mt) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{m}{2k} \cos^{m-2k}(t) \sin^{2k}(t) + i \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{m}{2k+1} \cos^{m-(2k+1)}(t) \sin^{2k+1}(t)$$

özdeşliği elde edilir ve burada yine 2 karmaşık sayının birbirine eşitliğinden şu eşitlikler elde edilir:

$$[44] \quad \begin{aligned} \cos(mt) &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{m}{2k} \cos^{m-2k}(t) \sin^{2k}(t), \\ \sin(mt) &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{m}{2k+1} \cos^{m-(2k+1)}(t) \sin^{2k+1}(t). \end{aligned}$$

Şu hâlde [30] denkleminin genel çözümü için [44]'de  $\cos(t) = p_1$  ve  $\sin(t) = q_1$  için  $\cos(mt) = a_m$  ve  $\sin(mt) = h_m$  değişken dönüşümleri yapılırsa,

$$[45] \quad \begin{aligned} a_m(p_1, q_1) &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{m}{2k} p_1^{m-2k} q_1^{2k}, \\ h_m(p_1, q_1) &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{m}{2k+1} p_1^{m-(2k+1)} q_1^{2k+1} \end{aligned}$$

çözümlerine karşılık  $r$ 'nin formu değişmez:

$$[46] \quad r = p_1^2 + q_1^2.$$

Sonuçta [10] denkleminin genel çözümü ise yalnızca  $\frac{m+2}{4} = n$  pozitif tam sayılarına karşılık geldiğinden, [45]&[46]'dan

$$[47] \quad \begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \binom{4n-2}{2k} p_1^{2(2n-k-1)} q_1^{2k}, \\ h_n &= \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \binom{4n-2}{2k+1} p_1^{2(2n-k-1)-1} q_1^{2k+1}, \\ r_1 &= p_1^2 + q_1^2 \end{aligned}$$

çözümleri elde edilir. Buna göre  $p_n$  ve  $q_n$  doğuranları da [12]'deki çözümden  $p_1$  ve  $q_1$  ilk doğuranları cinsinden bulunmuş olurlar!

### 1.3. Plimpton 322 No'lu Tableti'ndeki $(a_n, h_n, r_n)$ Dik Üçgenlerinin Metoda Göre Analizi

Bu bölümde  $(a_n, h_n, r_1^{2n-1})$  dik üçgeni yardımıyla tabletteki  $(a_n, h_n, r_n)$  dik üçgenlerinin nasıl bulduklarına ilişkin bir analiz çalışması yapacağım. Ancak bunu yaparken bu çalışmanın yalnız 4000 yıl öncesindeki Babilliler için değil, günümüz için de hâlâ ağır bir çalışma olduğu görülecektir.

Bunun için ilkin tabletteki  $(a_1, h_1, r_1) = (119, 120, 169)$  ilk dik üçgeni ve eğim açısının ölçüsü  $30'$  civarında olan  $(a_1^*, h_1^*, r_1^2) = (120^2 - 119^2, 2 \times 120 \times 119, 120^2 + 119^2) = (239, 28560, 169^2)$  geçiş (transit) dik üçgeniyle hesaba başlarsak [8]'deki bağıntılardan

$$[48] \quad \begin{aligned} a_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & h_1 \\ a_1^* & h_1^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 119 & 120 \\ 239 & 28560 \end{vmatrix} = 3369960, \\ h_2 &= a_1 a_1^* + h_1 h_1^* = 119 \times 239 + 120 \times 28560 = 3455641, \\ r_2 &= 169 \times 169^2 = 169^3 \end{aligned}$$

sonuçları ortaya çıkar. Bu sonuçlara göre tabletteki 2. dik üçgeni doğuran dik üçgenin eğimi yani  $m_2 = \frac{p_2}{q_2}$  oranı için [11]'den

$$[49] \quad m_2 = \frac{p_2}{q_2} = \frac{r_1^3 + a_2}{h_2} = \frac{169^3 + 3369960}{3455641} = \frac{2863}{1207} = 2.37(1996686 \dots) > 2.37(0370370 \dots) = \frac{64}{27} = \overline{m_2}$$

eşitsizliği elde edilir ki Babilliler 60 tabanlı sayı sisteminde bu sonucu  $\frac{p_2}{q_2} = p_2 q_2^{-1}$  şeklinde sonlu olarak hesap yapmaktaydılar. Çünkü Babil matematik tabletlerine bakıldığında sayıların daima 60 tabanında konumlu bir şekilde yazıldıkları görülür. Bu yüzden tabletteki  $(a_n, h_n, r_n)$  dik üçgenlerinin doğuranları olan  $p_n$  ve  $q_n$  sayılarının 60 tabanında sonlu olması, bu sayıların [Ters Sayılar Cetveli](#)'nden alınmış olduğu izlenimi verse de, gerçekte bu tableti 1945'de ilk kez okuyan **O. Neugebauer** ve **A. J. Sachs** tarafından hesaplanılmış olması gerektiğine işaret edilmiştir!

Gerçekten de "**Plimpton 322 No'lu Tablet'in Matematiksel-Astronomiksel Çözümü**"nde Babilliler, bu sayıları Sayılar Teorisi'ni ustaca kullanarak bulmuşlardır. Ancak burada hemen belirtmeliyiz ki  $p_n$  ve  $q_n$  sayıları ve tersleri 60 tabanında sonlu olduklarına göre, 60'ın asal çarpanları olan 2, 3 ve 5'i içeren eden birer tam sayı olmak zorundadırlar. Buna göre  $(a_n, h_n, r_n)$  dik üçgenlerinin  $h_n = 2p_n q_n$  yükseklikleri de aynı özelliğe haiz olur.

Şimdi bir örnek olarak [49] eşitsizliği nedeniyle tabletteki 2. dik üçgeni veren doğuranlara nasıl ulaşıldığına bir bakalım.

Burada doğuran dik üçgenlerin eğimlerini sırasıyla  $m_1 = \frac{p_1}{q_1} = \frac{12}{5}$  ve  $m_2 = \frac{p_2}{q_2} = \frac{2863}{1207}$  olarak alırsak [49]'dan

$$\begin{aligned} m_2 &= \frac{p_2}{q_2} = \frac{r_1^3 + a_2}{h_2} = \frac{r_1^3 + 3a_1^2 h_1 - h_1^3}{3a_1 h_1^2 - a_1^3} = \frac{\left(\frac{r_1}{h_1}\right)^3 + 3\left(\frac{a_1}{h_1}\right)^2 - 1}{3 \cdot \frac{a_1}{h_1} - \left(\frac{a_1}{h_1}\right)^3} = \frac{\left(\frac{m_1 + m_1^{-1}}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{m_1 - m_1^{-1}}{2}\right)^2 - 1}{3 \cdot \frac{m_1 - m_1^{-1}}{2} - \left(\frac{m_1 - m_1^{-1}}{2}\right)^3} = \frac{1 + 3m_1 - 3m_1^2 - m_1^3}{1 - 3m_1 - 3m_1^2 + m_1^3} \\ &= \frac{m_1 - 1}{m_1 + 1} \cdot \frac{1 + 4m_1 + m_1^2}{-1 + 4m_1 - m_1^2} > \frac{m_1 - 1}{m_1 + 1} \cdot m_1^2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} < \frac{m_1 + 1}{m_1(m_1 - 1)} \end{aligned}$$

nedeniyle

$$[50] \quad \frac{m_1}{m_2} < \frac{m_1 + 1}{m_1(m_1 - 1)} = \frac{85}{84} = 1; 0,42,51, \dots < \frac{81}{80} = 1; 0,45$$

eşitsizlikleri söz konusu olur ve buradan da tabletteki 2. dik üçgeni veren doğuranların oranı

$$[51] \quad \overline{m_2} = \frac{p_2}{q_2} = \frac{12}{\frac{81}{80}} = \frac{64}{27}$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde tabletteki 3. ve 4. dik üçgenler için gerekli hesaplar yapılırsa, [9]&[11]'den

$$[52] \quad m_3 = \frac{p_3}{q_3} = \frac{r_1^5 + a_3}{h_3} = \frac{169^5 + 95420159401}{99498527400} = \frac{341525}{145668} = 2.34(4543757 \dots) > 2.34(375) = \frac{75}{32} = \overline{m_3}$$

ve

$$[53] \quad m_4 = \frac{p_4}{q_4} = \frac{r_1^7 + a_4}{h_4} = \frac{169^7 + 2701419604443960}{2864483360640839} = \frac{81478807}{35156177} = 2.31(7624211 \dots) > 2.31(48148148 \dots) = \frac{125}{54} = \overline{m_4}$$

sonuçları bulunur.

Şimdi buraya kadar tabletteki ilk 4 dik üçgenin metodumuzla 1-1 uyduğunu görmekteyiz. Çünkü doğuran dik üçgenlerin eğimleri için 2 ondalık doğrulukla kesirler söz konusudur. Eğer hesaba bu şekilde devam etseydik, tabletteki eğim açıları  $45^\circ$ 'den  $30^\circ$ 'ye kadar monoton olarak azalan dik üçgenler için aşağıda **Babil Kulesi**'ni andıran tabloyla karşılaştırdık ve bu sonuçlarla hesap yapabilmemizin 4000 yıl öncesinde olduğu gibi şimdi de aynı derecede zorluklar içerdiği görülmektedir:

Aşağıdaki tabloda Şekil 1'e göre [10] denkleminin [12]'deki çözümünü veren ve [47]'den elde edilen  $(a_n, h_n, r_1^{2n-1})$  dik üçgenleri yardımıyla Plimpton 322 no'lu tabletindeki  $(a_n, h_n, r_n)$  dik üçgenlerinin doğuranlarının eğimleri için bir yaklaşıklık serisi mevcuttur.

$n$	$m_n = \frac{p_n}{q_n}$
:	:
0	$1 + \sqrt{2} = 2.414213562\dots$
1	$\frac{12}{5} = 2.4$
2	$\frac{2863}{1207} = 2.371996686\dots$
3	$\frac{341525}{145668} = 2.344543757\dots$
4	$\frac{81478807}{35156177} = 2.317624211\dots$
5	$\frac{9719139348}{4241902555} = 2.291221738\dots$
6	$\frac{2318632401617}{1023533849993} = 2.265320684\dots$
7	$\frac{276564805068235}{123471611274972} = 2.239906017\dots$
8	$\frac{65975516800033193}{29786279899786543} = 2.214963299\dots$
9	$\frac{7869181117654073292}{3592448206424508485} = 2.190478655\dots$
10	$\frac{1877141838912899008303}{866464302453111601207} = 2.166438748\dots$
11	$\frac{223885217598864875691605}{104481055062603285848388} = 2.14283075\dots$
12	$\frac{53404085951066102004445207}{25194857377561050193456337} = 2.11964232\dots$
13	$\frac{6369190842463618664434474068}{3037487499594078549120254875} = 2.096861581\dots$
14	$\frac{1519199123849210782250719047377}{732328703245448391904175389193} = 2.074477099\dots$
15	$\frac{181178130948357964283008838466955}{88272879599755688223674318532252} = 2.052477859\dots$
16	$\frac{4321330041705779775415438075069993}{21278396355289967449741170967675183} = 2.030853251\dots$
17	$\frac{5153350201660761850437274264487026572}{2564375014665680009131777649674719365} = 2.009593047\dots$
18	$\frac{1229086323182256402245376771562724631343}{618038978706758284032932132536744954807} = 1.988687389\dots$
19	$\frac{146566796130926260926306058135477220968085}{74470201117048743143058078223922384415108} = 1.968126766\dots$
20	$\frac{34954994074174327618244089816155133426957207}{17944944863105575872117186753652927096178897} = 1.947902004\dots$
21	$\frac{4168149319432279362444110139653711980973296788}{2161898408178203480527125861969602354706856795} = 1.92800425\dots$
22	$\frac{994025788936136564143615197515267561097911075537}{520861868874022911208427191150388674755912070793} = 1.908424955\dots$
23	$\frac{118525650843431307959557802507499279213822417491275}{62740006224913806171478856941229080413880447997532} = 1.889155866\dots$
24	$\frac{28264890545355168796162835942351098651689677332417193}{15113387138597830982943004611461249498131249488901423} = 1.870189011\dots$
25	$\frac{3370097726600643755649987392805225664127850816479403852}{1820182208335118386859770469040794864352529152589928645} = 1.851516684\dots$
26	$\frac{803633174449218739213487216411408138862203815985987591983}{438393645518693938215135129493555198244382318285472350007} = 1.833131439\dots$
27	$\frac{95814967523922292366904154796416494994911164851182781066965}{52789857226708534986315391582685550259634788943106939621828} = 1.815026078\dots$
28	$\frac{22846987380990719340703777604760856753524133610489577735382807}{12712590844707262154096282743058263007047625722253741350683857} = 1.797193637\dots$
29	$\frac{2723858696606037330137053282397393250542610153592377668702903508}{1530578099633013187084857676597842857718953340614566880274412315} = 1.779627382\dots$
30	$\frac{649471650389209908715670876816379144021964873367963695939719526097}{368532024508896189043418037989281836245372458560473862054287446793} = 1.762320794\dots$
31	$\frac{77427596209256135997000960760562666792502116138191424733769339645195}{4436431275400769954504629097812736900332991234660608363457209654812} = 1.745267567\dots$
32	$\frac{18460831181258208803738183330796349994404672765793089903007414965546793}{10680498344417096327263064504533003858589087021222076823600042447145263} = 1.728461592\dots$
:	:

**Tablo 1.** Doğuran dik üçgenlerin  $m_n = \tan(\alpha_n) = \frac{p_n}{q_n}$  eğimleri.

Şimdi de hiçbir yorum yapmadan metot tarafından oluşturulan dik üçgenler ile tabletteki dik üçgenlerin eğim açlarına bir bakalım.

Dik Üçgenlerin Eğim Açılıları Arasındaki İlişkiler																																																																																																				
Metotla Bulunan Dik Üçgenlerin Eğim Açılıları	Plimpton 322 No'lu Tableti'ne Göre Dik Üçgenlerin Eğim Açılıları																																																																																																			
<p style="text-align: center; color: brown;">Plimpton 322 no'lu Tableti'ndeki Babilonya Yüksek Matematigi Mathquake, 27.05.2006</p> <p style="text-align: center; font-size: 1.2em; font-weight: bold;">[1] <math>u^2 + v^2 = r^2 n</math></p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th style="font-size: 0.8em;">n</th> <th style="font-size: 0.8em;">Der. Dak. Sn.</th> <th style="font-size: 0.8em;">Der. Dak. Sn.</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>44 45 37</td><td>44 16 51</td></tr> <tr><td>1</td><td>43 48 5</td><td>43 19 19</td></tr> <tr><td>2</td><td>42 50 33</td><td>42 21 47</td></tr> <tr><td>3</td><td>41 53 1</td><td>41 24 15</td></tr> <tr><td>4</td><td>40 55 29</td><td>40 26 42</td></tr> <tr><td>5</td><td>39 57 56</td><td>39 29 10</td></tr> <tr><td>6</td><td>39 0 24</td><td>38 31 38</td></tr> <tr><td>7</td><td>38 2 52</td><td>37 34 6</td></tr> <tr><td>8</td><td>37 5 20</td><td>36 36 34</td></tr> <tr><td>9</td><td>36 7 48</td><td>35 39 2</td></tr> <tr><td>10</td><td>35 10 16</td><td>34 41 30</td></tr> <tr><td>11</td><td>34 12 44</td><td>33 43 58</td></tr> <tr><td>12</td><td>33 15 12</td><td>32 46 26</td></tr> <tr><td>13</td><td>32 17 40</td><td>31 48 53</td></tr> <tr><td>14</td><td>31 20 7</td><td>30 51 21</td></tr> <tr><td>15</td><td>30 22 35</td><td>29 53 49</td></tr> </tbody> </table>	n	Der. Dak. Sn.	Der. Dak. Sn.	0	44 45 37	44 16 51	1	43 48 5	43 19 19	2	42 50 33	42 21 47	3	41 53 1	41 24 15	4	40 55 29	40 26 42	5	39 57 56	39 29 10	6	39 0 24	38 31 38	7	38 2 52	37 34 6	8	37 5 20	36 36 34	9	36 7 48	35 39 2	10	35 10 16	34 41 30	11	34 12 44	33 43 58	12	33 15 12	32 46 26	13	32 17 40	31 48 53	14	31 20 7	30 51 21	15	30 22 35	29 53 49	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th style="font-size: 0.8em;">n</th> <th style="font-size: 0.8em;">p<sub>n</sub> / q<sub>n</sub></th> <th style="font-size: 0.8em;">Der. Dak. Sn.</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td><math>\frac{12}{5}</math></td><td>44 45 37</td></tr> <tr><td>2</td><td><math>\frac{64}{27}</math></td><td>44 15 10</td></tr> <tr><td>3</td><td><math>\frac{75}{32}</math></td><td>43 47 14</td></tr> <tr><td>4</td><td><math>\frac{125}{54}</math></td><td>43 16 17</td></tr> <tr><td>5</td><td><math>\frac{9}{4}</math></td><td>42 04 30</td></tr> <tr><td>6</td><td><math>\frac{20}{9}</math></td><td>41 32 40</td></tr> <tr><td>7</td><td><math>\frac{54}{25}</math></td><td>40 18 55</td></tr> <tr><td>8</td><td><math>\frac{32}{15}</math></td><td>39 46 13</td></tr> <tr><td>9</td><td><math>\frac{25}{12}</math></td><td>38 43 05</td></tr> <tr><td>10</td><td><math>\frac{81}{40}</math></td><td>37 26 14</td></tr> <tr><td>11</td><td>2</td><td>36 52 12</td></tr> <tr><td>12</td><td><math>\frac{48}{25}</math></td><td>34 58 34</td></tr> <tr><td>13</td><td><math>\frac{15}{8}</math></td><td>33 51 18</td></tr> <tr><td>14</td><td><math>\frac{50}{27}</math></td><td>33 15 43</td></tr> <tr><td>15</td><td><math>\frac{9}{5}</math></td><td>31 53 27</td></tr> </tbody> </table>	n	p <sub>n</sub> / q <sub>n</sub>	Der. Dak. Sn.	1	$\frac{12}{5}$	44 45 37	2	$\frac{64}{27}$	44 15 10	3	$\frac{75}{32}$	43 47 14	4	$\frac{125}{54}$	43 16 17	5	$\frac{9}{4}$	42 04 30	6	$\frac{20}{9}$	41 32 40	7	$\frac{54}{25}$	40 18 55	8	$\frac{32}{15}$	39 46 13	9	$\frac{25}{12}$	38 43 05	10	$\frac{81}{40}$	37 26 14	11	2	36 52 12	12	$\frac{48}{25}$	34 58 34	13	$\frac{15}{8}$	33 51 18	14	$\frac{50}{27}$	33 15 43	15	$\frac{9}{5}$	31 53 27
n	Der. Dak. Sn.	Der. Dak. Sn.																																																																																																		
0	44 45 37	44 16 51																																																																																																		
1	43 48 5	43 19 19																																																																																																		
2	42 50 33	42 21 47																																																																																																		
3	41 53 1	41 24 15																																																																																																		
4	40 55 29	40 26 42																																																																																																		
5	39 57 56	39 29 10																																																																																																		
6	39 0 24	38 31 38																																																																																																		
7	38 2 52	37 34 6																																																																																																		
8	37 5 20	36 36 34																																																																																																		
9	36 7 48	35 39 2																																																																																																		
10	35 10 16	34 41 30																																																																																																		
11	34 12 44	33 43 58																																																																																																		
12	33 15 12	32 46 26																																																																																																		
13	32 17 40	31 48 53																																																																																																		
14	31 20 7	30 51 21																																																																																																		
15	30 22 35	29 53 49																																																																																																		
n	p <sub>n</sub> / q <sub>n</sub>	Der. Dak. Sn.																																																																																																		
1	$\frac{12}{5}$	44 45 37																																																																																																		
2	$\frac{64}{27}$	44 15 10																																																																																																		
3	$\frac{75}{32}$	43 47 14																																																																																																		
4	$\frac{125}{54}$	43 16 17																																																																																																		
5	$\frac{9}{4}$	42 04 30																																																																																																		
6	$\frac{20}{9}$	41 32 40																																																																																																		
7	$\frac{54}{25}$	40 18 55																																																																																																		
8	$\frac{32}{15}$	39 46 13																																																																																																		
9	$\frac{25}{12}$	38 43 05																																																																																																		
10	$\frac{81}{40}$	37 26 14																																																																																																		
11	2	36 52 12																																																																																																		
12	$\frac{48}{25}$	34 58 34																																																																																																		
13	$\frac{15}{8}$	33 51 18																																																																																																		
14	$\frac{50}{27}$	33 15 43																																																																																																		
15	$\frac{9}{5}$	31 53 27																																																																																																		

Tablo 2

Bu çift tabloda ilk göze çarpan bulgu, “Z” şeklinde okunan soldaki tablonun ilk 2 satırındaki (sarı renkle ışılandırılmış) ilk 4 dik üçgenin eğim açıları ile sağdaki tablodaki ilk 4 dik üçgenin eğim açıları arasında çok sıkı bir ilişki olduğudur. Diğer satırlarda ise  $n$  değeri büyüdükçe eğim açıları arasındaki ilişkilerin bozulduğu görülecektir ki, bu beklenen bir sonuçtur.

Peki Babilliler, soldaki tabloda yer alan 32 dik üçgenden 15 tanesini rastgele mi seçmişlerdi, yoksa bu 15 dik üçgeni seçerken bir metot mu kullandılar?

Bu soruya da yanıt için yine hiçbir yorum yapmadan gözlemlerimize devam edelim ve eğer bu gözlemlerimiz sırasında bulgularla karşılaşsak, bu bulguların neler olduklarını açıklamaya çalışalım.

İlk gözlemimiz, ki bu, aynı zamanda esas gözlem noktamızdır, 2’şer 2’şer ardışık dik üçgenlerin eğim açıları arasındaki farklara, kısacası ardışık fark açılarına bakmak olacaktır. Bunun için bu dik üçgenlere ait ardışık fark açılarından sağdaki tablodakiler için

$$[54] \quad \nabla(\theta_n) = \theta_n - \theta_{n+1}$$

diyelim ( $\nabla$ (Nabla): Geriye fark alma operatörü), soldaki tabloda yer alan ardışık dik üçgenlerin eğim açılarının farkları [24] nedeniyle daima sabittir:

$$[55] \quad \nabla(\alpha_n - \beta_n) = \text{Tan}^{-1}\left(\frac{a_n}{h_n}\right) - \text{Tan}^{-1}\left(\frac{a_{n+1}}{h_{n+1}}\right) = \text{Tan}^{-1}\left(\frac{a_1^*}{h_1^*}\right) = \text{Tan}^{-1}\left(\frac{239}{28560}\right) = 0^\circ 28' 46.06'' \cong 0; 28,46.$$

Eğer burada fark açısının tam olarak  $0^\circ 30' 00'' = 30' = 0; 30 = \frac{30}{60} = \left(\frac{1}{2}\right)^\circ$  olmasını istersek tabletteki ilk dik üçgeni doğuran dik üçgenin eğiminin

$$[56] \quad \frac{a_1^*}{h_1^*} = \text{Tan}\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow m_1 = \frac{p_1}{q_1} = \frac{1 - \text{Sin}\left(\frac{1}{2}\right) + \sqrt{2}\sqrt{1 - \text{Sin}\left(\frac{1}{2}\right)}}{\text{Cos}\left(\frac{1}{2}\right)} = 2.399394274 \dots < \frac{12}{5} = 2.4 = \bar{m}_1$$

olması gerekirdi ki, bu gerçek değere göre 4000 yıl önce Babilliler’in harika bir yaklaşım yaptıkları görülür (Bkz. [“Plimpton 322 no’lu Tableti İçin Mathquake’in İnanılmaz Tahmini”](#)).

**Not 2.** [56]’da  $\sqrt{2}$  ve  $\text{Sin}\left(\frac{1}{2}\right)$  için yaklaşık değerler kullanılarak  $(30^\circ, 45^\circ)$  aralığında  $30'$  aralıklarla bir trigonometrik cetvel oluşturmak mümkündür. Burada  $\sqrt{2}$  için yaklaşık değerlerin bulunması **“Babil Algoritması”** ile mümkün iken  $\text{Sin}\left(\frac{1}{2}\right)$  için yaklaşık değerlerin bulunmasında trigonometrik formüllerle birlikte sinüsün kuvvet serisinden yararlanılabilir.

Bu konuda Türk-İslâm Dünyası’na bakıldığında pek çok çalışmanın yapıldığı görülür. Örneğin, trigonometrinin kurucusu **Ebul Vefa (Buzcan 940- Bağdat 998)**,  $\left(\frac{1}{4}\right)^\circ = 15'$  aralıklarla 8 ondalık yerin eşitliğini kullanarak Sinüs Cetveli’ni yapmıştır. **Ebul Vefa** bu cetvel için yepyeni bir metot kullanmıştır. Bu konuda **Dr. Singrid Hunke**, [“AVRUPANIN ÜZERİNE DOĞAN İSLÂM GÜNEŞİ”](#) adlı eserinde şöyle demektedir (S. 91):

*“Ebul Vefa, El-Battani’nin eserini hatırı sayılır derecede geliştirerek virgülden sonra 8. basamağa kadar hesaplama imkânı veren Sinüs cetvellerinin yeni hesaplama yöntemlerini buldu. Batı’nın ilk defa ancak asırlar sonra tırmanarak aşabildiği Ebul Vefa’nın ulaştığı bu yüksek kademe, Hülagü’nün Maliye Nazırı İran doğumlu Nasirüddin-et Tûsi tarafından daha yüksek yeni bir gelişme kademesine ulaştırıldı.”*

Teğet fonksiyonları üzerinde birçok çalışmada bulunan **Ebul Vefa**, günümüzde kullanılan 6 temel sinüs, kosinüs, tanjant, kotanjant, sekant ve kosekant trigonometrik eğrisine (fonksiyonlarına) ait özgü zamanlar ve kendilerine ait özellikleri ilk kez ortaya koymuştur. Onun zamanına kadar hiçbir matematikçinin yapamadığı incelikte trigonometrik çizelgeler düzenlenmiştir. Bunda da yine cebrin tarihine geçen şeyler oldu: Arapların yarattıkları bu bilgiye son şeklini veren İranlıların o üstün başarıları, zamanında Batıya ve Arap aleminin dışına çıkmadı. Avrupa, onların değil, daha önceki bilginlerin ve bu bilginleri takip edenlerin eserlerine dayanarak trigonometriyi geliştirdi.

Öte yandan [56]'daki sonuçla birlikte aşağıdaki tabloda yer alan sonuçlar birleştiğinde, **“YBC 7289 no'lu Tablet”**i ile birlikte yurdumuzda son zamanlarda keşfedilen **“Çatalhöyük Tableti”**ni deşifre ettikten hemen sonra **“Plimpton 322 no'lu Tablet”**inde daha ilk gözlemimde fark ettiğim bulgumun ne kadar isabetli olduğu daha iyi anlaşılmaktadır (ki bu tabletteki ilk bulgum, ilk 4 sıradaki dik üçgenlerin eğim açılarının 30 dakika civarında farklar halinde yazılmış olduğu gerçeği ve bu gerçeğin tablete hâkim olması idi):

$n$	$\nabla(\theta_n)$
1	44; 45, 37 - 44; 15, 10 = 0; 30, 27
2	44; 15, 10 - 43; 47, 14 = 0; 27, 56
3	43; 47, 14 - 43; 16, 17 = 0; 30, 57
4	43; 16, 17 - 42; 04, 30 = 1; 11, 47
5	42; 04, 30 - 41; 32, 40 = 0; 31, 50
6	41; 32, 40 - 40; 18, 55 = 1; 13, 45
7	40; 18, 55 - 39; 46, 13 = 0; 32, 42
8	39; 46, 13 - 38; 43, 05 = 1; 03, 08
9	38; 43, 05 - 37; 26, 14 = 1; 16, 51
10	37; 26, 14 - 36; 52, 12 = 0; 34, 02
11	36; 52, 12 - 34; 58, 34 = 1; 53, 38
12	34; 58, 34 - 33; 51, 18 = 1; 07, 16
13	33; 51, 18 - 33; 15, 43 = 0; 35, 35
14	33; 15, 43 - 31; 53, 27 = 1; 22, 16

**Tablo 3**

Bu son tabloda ardışık fark açıları 30 dakika civarında (turuncu renkli) olanların sayısı 7 tanedir ve bu da tablodakilerin yarısı demektir. Diğerleri ise 1 ile 2 derece arasında değişmektedirler (Bkz. [“Plimpton 322 no'lu Tableti İçin Mathquake Deşifreyonları”](#)).

Bu bulgu bize açıkça şunu söylemektedir: Plimpton 322 no'lu tabletinde (30°, 45°) aralığında 30 dakika aralıklarla dik üçgenlerin yazılması hedeflenmiştir.

Peki, diğer ardışık fark açıları neden 30 dakika civarında verilmedi?

Öncelikle 30 dakika farklar halinde dik üçgenleri yazabilmenin zorluğu [56]'daki yaklaşımın hassasiyetliğinden kaynaklanmaktadır ve Babillilerin hassasiyetliği ise

$$[57] \quad \frac{12}{5} - \frac{1 - \sin\left(\frac{1}{2}\right) + \sqrt{2} \sqrt{1 - \sin\left(\frac{1}{2}\right)}}{\cos\left(\frac{1}{2}\right)} = 2.4-2.399394274 \dots = 0.000(6057250046 \dots)$$

mutlak hatasına göre 3 ondalık olduğu görülmektedir ki, 4000 yıl önce bu hassasiyeti yakalayabilmek gerçekten de bir harikadır!

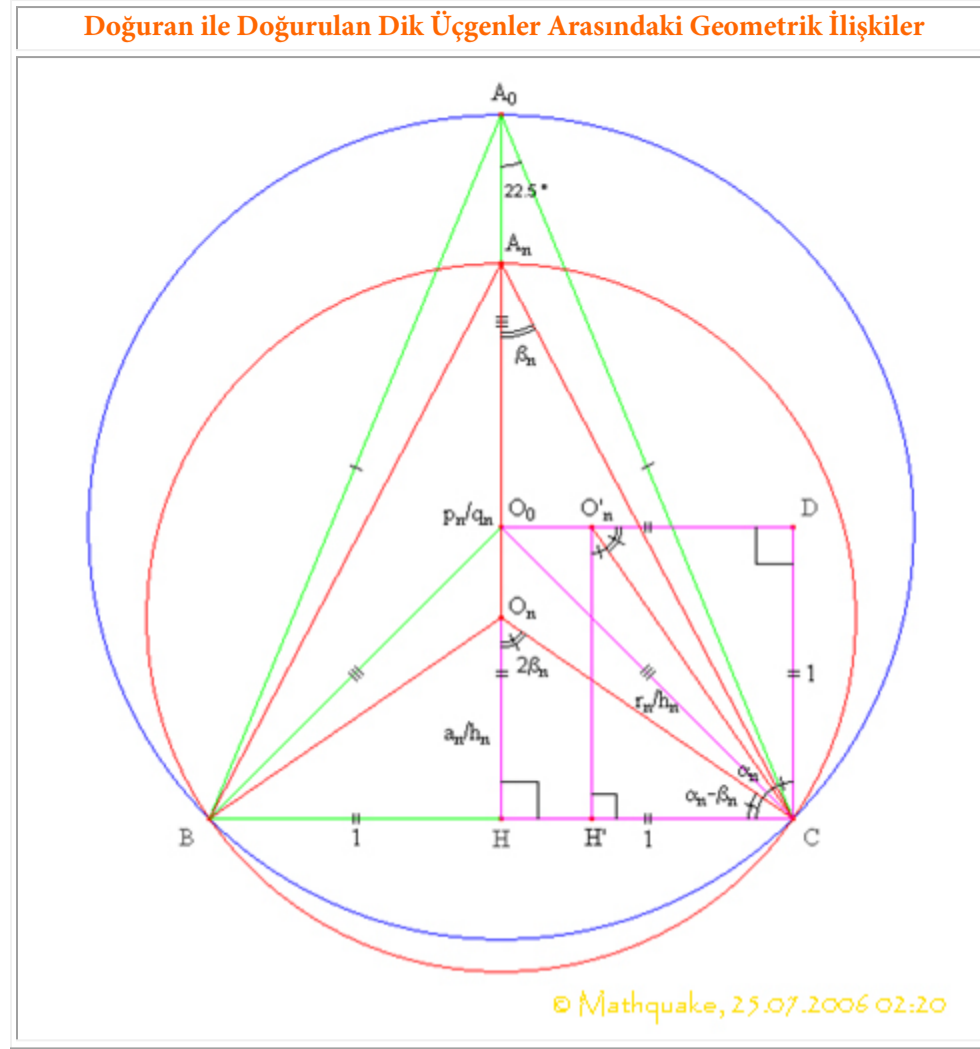
Şu hâlde tabletteki ilk dik üçgen için hassasiyetlik bu olmak üzere 2., 3. ve 4. dik üçgenlerin hassasiyetlerinin de çok iyi olduğu görülmektedir. Çünkü tabletteki ilk 4 dik üçgenin eğim açıları arasındaki farklar 30 dakika civarındadır. Fakat tablette bundan sonraki dik üçgenlerde aynı hassaslığın olmaması bu gerçeği değiştirmemektedir ve bunun nedenleri tamamen ortadadır. Eğer Babilliler böyle bir Trigonometrik Cetvel hazırlamaya çalışsalardı, Tablo 1'de Babil Kulesi'ni andıran tabloları göz önüne almaları gerekirdi ki, bu durumda ne kadar iyi yaklaşım yaparsanız yapın dik üçgenlerin doğuranları, dolayısıyla dik üçgenlerin kenarlarının uzunlukları inanılmaz büyüklükte olurdu ve bu da tablet boyutlarının çok ama çok büyük olması demektir. Dolayısıyla tabletin bu temel zorluğu aşacak şekilde hazırlanmasında, yukarıdaki son tablodan da görüleceği gibi, ardışık fark açıları 30 dakika civarında olan tablete hâkim dik üçgenlerle birlikte, ardışık fark açıları 1-2 derece arasında olan dik üçgenlerin de interpolasyon metoduna elverişli bir şekilde hazırlanmış olması ya da bu duruma uygun düşmesi tablonun (tablet) doğrultulmasına neden olmuştur diyebilirim (ki bu temel zorluğun nasıl aşıldığına ilişkin bir diğer örneği **“YBC 7289 no'lu Tablet”**te görebilirsiniz).

## 2. Babil Dik Üçgenleriyle Trigonometrik Cetvelin İnşası

Şüphesiz böyle bir cetvelin inşasının zorluğu ilk dik üçgenin doğuranlarının, dolayısıyla kenarlarının uzunluklarının belirlenmesinde ortaya çıkmaktadır. Örneğin Plimpton 322 no'lu tabletinde bunun çok güzel bir örneğini görmekteyiz. Orada (30°, 45°) aralığında 30 dakika aralıklarla bir trigonometrik cetvel oluşturmak için [56]'daki gerçek değere iyi bir yaklaşımda bulunmak gerektiğini görmüştük!

Şu hâlde bir trigonometrik cetvelin inşası için Şekil 1'deki  $A_n H_n R_n$  dik üçgenini doğuran  $P_n Q_n R_n$  dik üçgenindeki dik kenarların uzunlukları olan  $p_n$  ve  $q_n$ 'nin arasındaki ilişkinin, dolayısıyla bu 2 dik üçgen arasındaki bağlantının kesin olarak bilinmesi gerekir ama nasıl?

Bu mükemmel sorunun yanıtını Susa Matematik Tableti şu şekilde vermektedir:



Şekil 3

Susa tabletinden elde edilen bu şekilde  $CHO_0D$  birim karesi için çizilmiş  $|A_0B| = |A_0C|$  için  $A_0BC$  ikizkenar üçgeni ve merkezi  $O_0$  ve yarıçapı  $|O_0C|$  şeklinde birim karenin köşegeni olan çevrel çemberi verilmektedir. Buna göre Babil metodu nedeniyle  $(a_n, h_n, r_n)$  dik üçgeni  $\left(\frac{a_n}{h_n}, 1, \frac{r_n}{h_n}\right)$  olarak  $O_nCH$  dik üçgeniyle ve bu dik üçgeni doğuran dik üçgen de  $A_nCH$  olarak  $\left(\frac{p_n}{q_n}, 1, \sqrt{\left(\frac{p_n}{q_n}\right)^2 + 1}\right)$  sıralı 3'lüsüyle yer almaktadır ve bu 2 dik üçgen arasındaki ilişkiye göre eğim açıları arasındaki ilişkiler şu şekilde ortaya çıkmaktadır:

$\alpha_n = \tan^{-1}\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$	$\alpha_n - \beta_n = \tan^{-1}\left(\frac{a_n}{h_n}\right)$
$0^\circ$	$-90^\circ$
$15^\circ$	$-60^\circ$
$22.5^\circ$	$-45^\circ$
$30^\circ$	$-30^\circ$
$45^\circ$	$0^\circ$
$60^\circ$	$30^\circ$
$67.5^\circ$	$45^\circ$
$75^\circ$	$60^\circ$
$90^\circ$	$90^\circ$

Tablo 4

Bu tabloya göre şu 3 durumun mevcut olduğu görülür:

- $\frac{p_n}{q_n} < 1$  ise:  $0^\circ < \alpha_n < 45^\circ$  iken  $-90^\circ < \alpha_n - \beta_n < 0^\circ$  olur.
- $\frac{p_n}{q_n} = 1$  ise:  $\alpha_n = 45^\circ$  iken  $\alpha_n - \beta_n = 0^\circ$  olur.
- $1 < \frac{p_n}{q_n}$  ise:  $45^\circ < \alpha_n < 90^\circ$  iken  $0^\circ < \alpha_n - \beta_n < 90^\circ$  olur.

Demek ki  $(a_n, h_n, r_n)$  dik üçgenine ait bileşenlerin  $(p_n, q_n)$  doğuranları cinsinden ifadeleri daima

$$[58] \quad a_n = p_n^2 - q_n^2, h_n = 2p_nq_n, r_n = p_n^2 + q_n^2$$

şeklinde alınırsa  $q_n < p_n$  ilişkisi nedeniyle 3. durum geçerli olur. Aksi takdirde 1. durum geçerli olacaktır ki, bu belirsizliği ortadan kaldırabilmenin bir tek yolu var: Simetri Kavramı.

Simetri kavramına göre eğer  $0^\circ < \alpha_n - \beta_n < 45^\circ$  ise  $O_nCH$  dik üçgeninin eğiminden  $\frac{a_n}{h_n} < 1$  olduğu görülmektedir, ancak eğer  $45^\circ < \alpha_n - \beta_n < 90^\circ$  ise  $O_n'CH'$  dik üçgeninin eğiminden  $1 < \frac{a_n}{h_n}$  şartı ortaya çıkmaktadır. Çünkü  $O_nCH$  dik üçgeninin  $[O_0C]$  birim karenin köşegenine göre simetriği  $O_n'CD$  dik üçgenidir ve bu dik üçgen yardımıyla  $O_nCH \cong CO_n'H'$  eş dik üçgenleri meydana gelmektedir. Bu yüzden  $a_n$  ve  $h_n$  simetrik olarak rol oynarlar. Aynı şekilde,  $p_n$  ve  $q_n$ 'ler de kendi aralarında simetrik rol oynarlar.

Böylece bu sonuçla çalışmamız boyunca ortaya çıkan belirsizlik bu şekilde tamamen ortadan kaldırılmış olmaktadır. Söz konusu bu çalışmada yer alan herhangi bir formülde  $1 < \frac{a_n}{h_n}$  şartı belirsizlik meydana getiriyorsa (yani uzunluğun negatif bir sayı olması), simetri kavramıyla,  $\frac{a_n}{h_n} < 1$  şartına geçiş için  $a_n$  ve  $h_n$  simetrik olarak yer değiştirebilir. Aynı şey  $p_n$  ve  $q_n$  için de geçerlidir.

Ayrıca siz, bir trigonometrik cetvel için  $(a_n, h_n, r_n)$  dik üçgenini bulurken, farkında olsanız da olmasanız da, simetri kavramı nedeniyle, bu dik üçgenin tepe açısını eğim açısı olarak kabul eden bir dik üçgen daha bulmuş oluyorsunuz.

Şu hâlde Tablo 4'deki sonuçları  $q_n = 1$  ve  $p_n = n$  pozitif tam sayıları için ele alırsak  $(a_n, h_n, r_n)$  dik üçgeninin  $\alpha_n - \beta_n$  eğim açısına ait tablo şu şekilde ortaya çıkar:

$n$	$\text{Tan}(\gamma_n)$
1	00°00'0."
2	36°52'11.63"
3	53°07'48.37"
4	61°55'39.05"
5	67°22'48.49"
6	71°04'31.28"
7	73°44'23.26"
8	75°44'59.88"
9	77°19'10.62"
10	78°34'43.73"
11	79°36'40.11"
12	80°28'21.78"
13	81°12'9.32"
14	81°49'43.56"
15	82°22'18.66"
16	82°50'50.39"
17	83°16'1.48"
18	83°38'25.22"
19	83°58'27.93"
20	84°16'30.68"
⋮	⋮

**Tablo 5**

Bu tabloya göre Plimpton 322 no'lu tabletindeki 15 dik üçgenin eğim açıları (30°, 45°) aralığında değiştiğinden dolayı  $30^\circ < \alpha_n - \beta_n < 45^\circ$  için  $60^\circ < \alpha_n < 67.5^\circ$  olur ve bu dik üçgenlere ait doğuranların oranları (doğuran dik üçgenlerdeki eğimler) için  $1 \leq \frac{p_n}{q_n} \leq 2$  gerçeği ortaya çıkar. Demek ki tabletteki dik üçgenlerin doğuranları arasında  $p_n = 2q_n + k_n, q_n + k_n$  şeklinde ilişkiler var ve tabletteki 1-11. satırlar arasında yer alan dik üçgenlerin doğuranları arasındaki ilişki  $p_n = 2q_n + k_n$  iken 12-15. satırlar arasında yer alan dik üçgenlerin doğuranları arasındaki ilişki de  $p_n = q_n + k_n$  şeklinde kesin olarak belirlenmiştir. Bu 2 bölümlenmeye neden olan dik üçgen ise hepimizin yakından tanıdığı bir geçiş üçgeni olan (3,4,5) Kutsal Üçgeni'dir.

Gerçekten de tabletteki dik üçgenlerin doğuranları arasındaki ilişkiler aşağıdaki tablodaki gibi ortaya çıkmaktadır:

$n$	$p_n$	$q_n$	$p_n = 2q_n + k_n$
1	12	5	$12 = 2 \times 5 + 2$
2	64	27	$64 = 2 \times 27 + 10$
3	75	32	$75 = 2 \times 32 + 11$
4	125	54	$125 = 2 \times 54 + 17$
5	9	4	$9 = 2 \times 4 + 1$
6	20	9	$20 = 2 \times 9 + 2$
7	54	25	$54 = 2 \times 25 + 4$
8	32	15	$32 = 2 \times 15 + 2$
9	25	12	$25 = 2 \times 12 + 1$
10	81	40	$81 = 2 \times 40 + 1$
11	60	30	$60 = 2 \times 30 + 0$
$n$	$p_n$	$q_n$	$p_n = q_n + k_n$
12	48	25	$48 = 1 \times 25 + 23$
13	15	8	$15 = 1 \times 8 + 7$
14	50	27	$50 = 1 \times 27 + 23$
15	9	5	$9 = 1 \times 5 + 4$

**Tablo 6**

Bu sonuçlara göre aşağıdaki teorem geçerli olur:

**Genelleştirilmiş Babil Teoremi (Mathquake, 07.05.2006, 17:00).** Plimpton 322 no'lu tabletine ve yurdumuzda keşfedilen Çatalhöyük tabletine göre  $(a_n, h_n, r_n)$  dik üçgeninin kenarlarının uzunlukları [58]'deki gibi olmak üzere

$$[59] \quad m_n = \frac{p_n}{q_n} = (1; a_1, a_2, \dots, a_k)_m \quad (0 \leq a_t \leq m, t = 1, 2, \dots, k, k, m \in \mathbb{Z}^+, 1 < m)$$

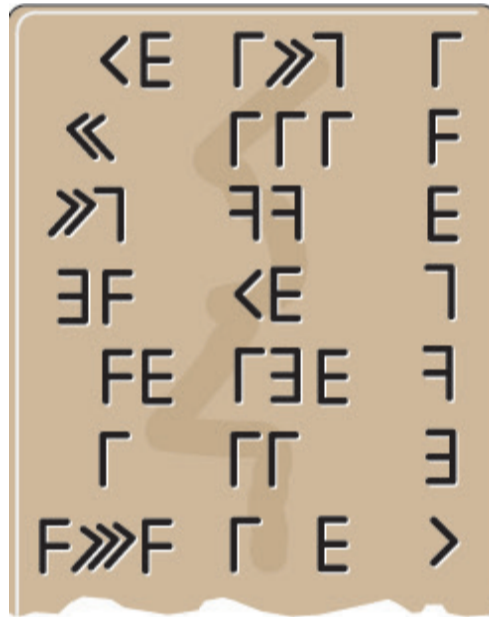
genel algoritmasına göre çok küçük bir açı içinde bile (istenildiği kadar küçültülebilir) sonsuz tane  $(a_n, h_n, r_n)$  Babil dik üçgeni vardır. Söz konusu bu genel algoritmayla Tablo 4&5'e göre bir trigonometrik cetvel hazırlanabilir.

Şimdi bu teorem için ilkin güzel bir örnek teşkil eden yurdumuzda keşfedilmiş “Çatalhöyük Tableti” ile başlayalım çalışmamıza!

### 3. Yurdumuzda Keşfedilen “Çatalhöyük Tableti”

Türkiye'nin güneyindeki Neolitik dönemden kalma Çatalhöyük köyünde, Olmazköy yakınında, İmkânsızdere'de son zamanlarda eski kil tabletlerle dolu bir mağara keşfedildi (**Yazarın Notu.** Bu absürt adres tarifinden böyle bir yer olmadığı açık olmakla birlikte, nedenini 3.2 Sonuçlar'daki 6. Madde'de açıkladım. Yani bu bölümdeki çalışma “*Mathematics in Search of History*, Vol. 93, No. 8, P. 647-650, November 2000” makalesini (ki orijinal linki [suradaydı](#)) iyi niyetle değerlendirmemden gelir ve şimdi A3 formatında 47 sayfada gördüğünüz bu keşif çalışmalarımın olduğu dosyanın (ki dosya orijinalde Microsoft Word 97-2003 belgesi olarak A4 formatında 86 sayfa ve boyutu 7.93 MB'dir ve bunu noterde onaylatmıştım. Şimdi bu dosyayı 17.06.2025, 00:11:07'de Microsoft Office Professional Plus 2024 belgesi olarak A3'te yeniden düzenlediğimde sayfa sayısı 47'ye ve boyutu 3.02 MB'a düştü) son kayıt tarihi 17.08.2006, 10:34:35 ve makalenin sahibi **Donald T. Barry**'e 15.07.2006, 00:48:56 günü 2 soruluk bir mesaj göndermiştim. Ama Çatalhöyük tabletini bu son tarihten, dolayısıyla **Donald T. Barry**'nin bana gönderdiği mesajdan çok daha önce çözdüğümünden 3. bölümde yer alan Çatalhöyük tableti hakkındaki değerlendirmemi değiştiremedim ve öylece kaldı). Bu tabletlerdeki yazıt, kayıp bir uygarlığın yazısıydı. Amerikalıların yaptıkları araştırmalara göre, “O, belki tüm Hint-Avrupa dillerinin anası idi” sonucu çıkmış, fakat **Atatürk**'e göre bu tabletin bulunduğu yer, Anadolu en aşağı 7000 yıllık Türk yurdu olduğuna göre, tabletteki yazıtın bir Ön-Türk uygarlığına ait olması ihtimali nedeniyle Ön-Türkçe uzmanı olan **Kâzım MİRŞAN**'dan yardım istedim!

Artık üzülerek söylemek gerekmiyor çünkü bu bir gerçektir: Ülkemiz eski çağ tarihçileri “**Türklerin Anadolu'dan Atılması**” projesinin yürütüldüğü Batı emperyalizminin etkisinde kaldıkları için eski Anadolu uygarlıklarının Türk kökenli olabilecekleri tezini pek fazla ciddiye almazlar. Hatta bu tezi dile getirenleri en ağır bir şekilde dün eleştirdikleri gibi, bugün de aynı kararlıkla eleştirmektedirler. Ancak buna rağmen az sayıda da olsa “**geçmişe özgürce bakabilme cesareti gösteren bilim insanlarımız**” eski Anadolu uygarlıklarının Türk kökenli olabileceklerini görmüşlerdir. Örneğin geçmişe özgürce bakabilenlerden **Halikarnas Balıkcısı**, 1071'den önce de Anadolu'da Türklerin yaşadığını ilk ileri sürenlerdendi!



**Resim 1.** Bu tablet hakkında 647-648. sayfada şu bilgiler verilir: “Tablet sayısal bilgi olması gereken 7 satırlık 3 sütundan oluşur. Ne yazık ki, tablet alttan kırılmış ve diğer kısmı henüz bulunamamıştır. Eksik parça hala mağarada bulunabilir, ancak şu anda gösterişli bir New York City dairesinde kitap ayracı olması da aynı derecede olasıdır. Bu tablet diğer tabletlerle aynı genel boyuttaysa, onun en üstteki üçte ikisine sahibiz. Göreviniz, tabi kabul etmeyi seçerseniz, tableti çözmektir. Sütunlardaki ve satırlardaki sayıları belirleyin ve sayısal bilgilerin bir yorumunu geliştirin. Yorumunuza dayanarak, tabletin eksik üçte birinin içeriğini belirleyin.”













Tabletlerden birkaçı matematiksel yazıtlar içerir ve yukarıdaki resimdeki tablet bunlardan birinin tıpkıbasımıdır (ki buna bulunduğu yer itibarıyla “Çatalhöyük Tableti” diyelim). Resimde görüldüğü üzere bu tablet 3 sütun içerir: Sağdaki ilk sütunda 1'den 7'ye kadar satır numaraları, onun solundaki 2. sütunda hipotenüsler ve soldaki 3. sütunda ise genişlikleri veren sıralı üçlüler mevcuttur. Ne yazık ki tabletin altı kırkıdır ve diğer parçası henüz bulunamadı. Kayıp parça hâlâ mağarada olabilir ama bu tablet hakkında **Donald T. Barry** tarafından yazılan 4 sayfalık “*Mathematics in Search of History*” makalesinde geçtiği üzere yapılan incelemelerde şu anda tıpkıbasımını görmüş olduğunuz yukarıdaki resme göre tabletin 3'te 2'sinin mevcut olduğu sonucu çıkmış. Amerikan Bölgeler Matematik Ligi'nde Problem Yazma Kürsüsü'ndeki **Don Barry** (Phillips Akademisi'nde Matematik Öğretmeni, Andover, MA 01810. [dbarry@andover.edu](mailto:dbarry@andover.edu)) başkanlığında bir grup öğrenci tarafından yürütülen çalışmalarda bu tabletin tam çözümü araştırmanın son gününde **John Maglio**'nun keşfiyle ortaya çıktı.

385	552	673	1
85	132	157	2
33	56	65	3
16	30	34	4
217	456	505	5
5	12	13	6
145	408	433	7

Fig. 7  
John's Pythagorean triples

**Tablo 7.** Bu tablo hakkında 650. sayfada bilgiler verilir: “**John**'un keşifleri dersin son gününde geldi. Bu bilgin topluluğu, tablo için uygulanabilir, düzeltilmiş bir giriş seti bulduğuna inanarak, analizini yüksek bir notla sonlandırdı.”

Bu tabloda **John**'un keşfini hep birlikte görüyoruz ve bu keşif sınıfça yapılan tartışmalar sonunda tabletteki sembollerin anlamlarının çözülmesiyle birlikte dik üçgenlerin 2. sütundaki hipotenüsleri ve 3. sütundaki genişlikleri veren sayıların 12 tabanında sağdan sola doğru okunmasıyla gerçekleşmiştir. O halde bu çözümlemeyle birlikte aşağıdaki çözümlememe göre tabletteki semboller ve anlamları yani bu sembollere 12 tabanında karşılık gelen rakamlar şu şekilde belirir:

<b>Keşfedildiği Yer:</b> Türkiye'nin güneyindeki Neolitik dönemden kalma Çatalhöyük Köyü/Olmazköy yakını/İmkânsızdere.													
<b>Görüldüğü Zaman:</b> Bilinmiyor.													
<b>Tip:</b> C1 (Modern alfabedeki bazı harflerin kullanılmasıyla 1. türden konumlu sayılama). Taban: 12 ( $k = 4$ ).													
<b>Sıfır İmi Gereği:</b> VAR. Tıpkı Babil sayılamasındaki gibi bir "boşluk" kullanılmaktadır (Bkz. M.Ö. 1900-1600 tarihli <a href="#">Plimpton 322</a> ve <a href="#">YBC 7289</a> no'lu tabletler). Her şeyden önce "BOŞ"un eşanlamlısı olan bu im rakam betimlemelerinde belli bir basamaktaki birimin yokluğunu belirtir.													
<b>Betimleme Olanğı:</b> Sınırlı.													
<b>Sembol</b>													
<b>Anlam</b>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

**Tablo 8.** Tabletteki semboller ve anlamları.

Bu sembollerin (alfabetik) sıralamadaki yazımları tamamen matematikselidir: 1 ile 4 rakamlarına karşılık gelen semboller birbirinin tersidir. Tablodan görüleceği gibi 1 rakamına "Öğ" sembolü karşılık gelirken, buna karşılık 4 rakamı için "Öğ'ün Tersî" yazılmış. Yine 2 rakamına "F" harfi karşılık gelirken 5 rakamına da "F'nin Tersî" gelmektedir. Aynı şekilde 3 rakamına "E" harfi karşılık gelirken 6 rakamına da "E'nin Tersî"nin geldiği görülmektedir ve diğer rakamlar için de yine aynı özelliğin yani birbirinin tersi olan sembollerin karşılık geldikleri görülür. Gerçekten de 7 rakamına "Büyüktür" işareti gelirken 10 rakamına karşılık da "Büyüktür"ün tersi olan "Küçüktür" sembolü gelmektedir. Bu sembolün 60 tabanlı Babil Sayı Sistemi'ndeki karşılığı "10"dur. Daha sonra 8 rakamına "İç içe Geçmiş 2 Tane Büyüktür" işareti gelirken 11 rakamına bu işaretin tersi gelmektedir ve yine Babillilerin sayı sisteminde bu sembol için 20 rakamı karşılık gelmektedir (ki Babillilerin 20 rakamı burada 11 rakamına karşılık gelen sembole gösterilmiştir, ancak  $20 \equiv 8 \pmod{12}$  yerine ilk olarak bu sembolün tersi gelmektedir). Ve son olarak 9 rakamına "İç İçe Geçmiş 3 Tane Büyüktür" işareti gelirken 12 rakamına da tablette olmayan ama "Ters Alma Özelliği" nedeniyle 9'un yerine gelen sembolün tersi gelecektir.

Söz konusu 12 tabanlı rakamlara karşılık gelen sembollerin bu şekilde birbirinin tersi olmaktan başka bir başka özelliği daha var: Örneğin 4 rakamına karşılık gelen "Öğ'ün Tersî" sembolünü biraz yatırırsanız 7 rakamına karşılık gelen "Büyüktür" sembolüne benzer bir şekle gelecektir. Buna göre 5 rakamındaki sembolden 8 rakamındaki sembole ve 6 rakamındaki sembolden 9 rakamındaki sembole geçişler yapıldığında, Modüler Aritmetik ile tam bir uyum içinde olan

$$[60] \left. \begin{array}{l} 1 \leftrightarrow 4 \rightarrow 7 \leftrightarrow 10 \Rightarrow 3k + 1 \\ 2 \leftrightarrow 5 \rightarrow 8 \leftrightarrow 11 \Rightarrow 3k + 2 \\ 3 \leftrightarrow 6 \rightarrow 9 \leftrightarrow 12 \Rightarrow 3k + 3 \end{array} \right\} \Rightarrow 3k + m \quad (k, m = 0,1,2,3)$$

sonuçları elde edilir. Buna göre 12 tabanlı rakamların  $Satır \times Sütun = 3 \times 4 = 12$  formatında yazıldıkları görülmektedir.

**Not 3 ("Gama" Sembolünün Kökeni Hakkında).** "Gamalı Haç"ın bir parçası olan bu sembol, Mu'nun Kutsal Sembolleri'nden "[Atatürk ve Kayıp Kıta MU](#)" kitabının 65. sayfasındaki 13. Sembol (ki bu sembolü ilk kez "[James Churchward: Kayıp Uygarlıklar II, KAYIP KITA MU](#)", *Eski Kutsal Semboller'den 13. Sembol*, S. 354'te görmüştüm) olarak yer almaktadır. "2 Kenarlı Kare" olarak tabir edilen bu sembol fevkalâde uzak bir geçmişe sahiptir (Bkz. "[Kayıp Uygarlıklar-III, MU'nun Kutsal Sembolleri](#)", S. 124-127). **Churchward**, bu sembolün tam olarak ne zaman ortaya çıktığı hakkında "*Bunu ne bilebilirim, hatta ne de bir tahmin yürütebilirim!*" demiştir!

2 kenarı olan kare, "İnşa Edici" anlamına gelen kadim bir kelime adı altında anılır (Bkz. S. 72-73). Yine "Gamalı Haç" olarak tabir edilen sembol, Mu'nun Kutsal Sembolleri'nden biri olan "Kutsal 4'lü" sembolünün evrimiyle ortaya çıkmış bir semboldür. "Kutsal 4'lü" sembolünün pek çok anlamı olmakla birlikte, "4 Büyük İnşa Edici, 4 Büyük Mimar, 4 Büyük Geometrici" anlamlarını vererek, "2 Kenarlı Kare" sembolünün "Kutsal 4'lü"nün bir parçası olduğuna işaret etmeyi yeterli görüyoruz (Bkz. S. 64-81). Biraz daha ileriye gidersek, yukarıdaki rakamlı alfabedeki 1'den 6'ya kadar olan sembollerin "Gamalı Haç"ın parçaları olduğu görülecektir.

Eski çağlardan beri birçok toplum tarafından kullanılan Gamalı haç aynı zamanda Doğu kökenli bir Ön-Türk sembolüydü. Batı Anadolu'da Hasan Kale'de bulunan erken bronz çağına ait (M.Ö. 3200-3000) Beycesultan Anıtı'nın üzerindeki Ön-Türkçe yazılar arasında bir de Gamalı haç sembolü vardır. Gamalı haç "Uç" ya da "Öğ" biçiminde okunan kozmik ve felsefi değeri olan bir Ön-Türk sembolüdür. İstanbul Arkeoloji Müzesi'nde "Bizans Sikkeleri Koleksiyonu"nda 1 numara ile kayıtlı olan (M.Ö. 500) ve Helenistik döneme ait olduğu belirtilen bir paranın ön yüzünde Gamalı haç sembolü vardır (Bkz. İlyada, XXIII, 44-46; Fattah, age, S. 160). Bir Ön-Türkçe uzmanı olan **Kâzım MİRŞAN**, Kandıra Hazinesi'ne ait bu sikkenin üzerindeki Gamalı haç sembolünün "Öğ" biçiminde okunması gerektiğini belirterek, Ön-Türkçe anlamının "Yüksek seviyede düşünce" olduğunu ileri sürmüştür<sup>(1)</sup>. **MİRŞAN**'a göre Gamalı haç sembolü Orta Asya'dan yapılan Ön-Türk göçleriyle Hindistan'ın İndüs Vadisi'ne inmiş, oradan da Batı'ya, Ön Asya'ya ve Yunanistan'a geçmiştir. Gamalı haçın Ön-Türkçe'de "felsefi düşünce" anlamına gelen "Öğ" biçimindeki kullanımı Yunanistan'da ses değişimine uğrayarak "Gama" biçimine dönüşmüştür (Bkz. Jordanes, S. 117'den Fattah, age, S. 160).



"Öğ" diye okunan bu damga Antik Grek alfabesine "Gama" harfi olarak girdiğinden, 4 tane Öğ'ün döner şekilde düzenlenmesiyle meydana gelen haç şekli Yunanca "Gamalı Haç" diye yanlış okunmuştur. Ön-Türk göçleriyle Hindistan'a geçen bu damga, **Adolf HITLER** tarafından NAZİ Partisi amblemi haline dönüştürülmüştür. **HITLER**, kendi elleriyle çizdiği bu amblemi –ki hayata çok yetenekli bir sanatçı olarak başlamıştı– tanıtırken "*Basit ve çarpıcı*" olarak nitelemişti ve "*Anlamı nedir?*" sorusuna ise yanıtı şu olmuştu: "*Fethedilemez*" (Bkz. "[Hitler: Kötülüğün Yükselişi](#)", 46:09-47:07. Nazi Almanya'sının bayrağının ortaya çıkışı 40:13-41:26'dadır). Gamalı haçın Türk kökenli bir astrolojik simge olduğunu ileri sürenler de vardır. Yine siyasi bir simgeye dönüştürülen [İsrail bayrağı](#)ndaki "6 Köşeli Yıldız" Mu'nun kutsal sembollerinden biridir (Bkz. S. 43, 130. Bu sembole "[Siyon Yıldızı](#)" demiştim. Bkz. "[Genelleştirilmiş Napolyon Teoremi](#)", S. 16).

<sup>(1)</sup> **MİRŞAN**, bugün kullanılan "Öğ" kelimesinin de "Öğ" kökenli olduğunu ileri sürmektedir (Bkz. Tarcan, age, S. 260).

Şimdi tabletteki sembollerin anlamlarını çözdüğümüze göre, tabletteki sayıları okumaya geçebiliriz:

Dik Üçgenin Genişliği	Dik Üçgenin Hipotenüsü	Satır No
■, <, E	┌, >, 7	┌
0, 10, 3	1, 8, 4	1
0,10,3 → 3,10,0 → 3.12 <sup>2</sup> + 10.12 + 0 = 552	1,8,4 → 4,8,1 → 4.12 <sup>2</sup> + 8.12 + 1 = 673	
■, <<, ■	┌, ┌, ┌	F
0, 11, 0	1, 1, 1	2
0,11,0 → 0,11,0 → 0.12 <sup>2</sup> + 11.12 + 0 = 132	1,1,1 → 1,1,1 → 1.12 <sup>2</sup> + 1.12 + 1 = 157	
>>, 7, ■	7, 7, ■	E
8, 4, 0	5, 5, 0	3
8,4,0 → 0,4,8 → 0.12 <sup>2</sup> + 4.12 + 8 = 56	5,5,0 → 0,5,5 → 0.12 <sup>2</sup> + 5.12 + 5 = 65	
∃, F, ■	<, E, ■	7
6, 2, 0	10, 3, 0	4
6,2,0 → 0,2,6 → 0.12 <sup>2</sup> + 2.12 + 6 = 30	10,3,0 → 0,3,10 → 0.12 <sup>2</sup> + 3.12 + 10 = 46	
■, F, E	┌, ∃, E	7
0, 2, 3	1, 6, 3	5
0,2,3 → 3,2,0 → 3.12 <sup>2</sup> + 2.12 + 0 = 456	1,6,3 → 3,6,1 → 3.12 <sup>2</sup> + 6.12 + 1 = 505	
■, ┌, ■	┌, ┌, ■	∃
0, 1, 0	1, 1, 0	6
0,1,0 → 0,1,0 → 0.12 <sup>2</sup> + 1.12 + 0 = 12	1,1,0 → 0,1,1 → 0.12 <sup>2</sup> + 1.12 + 1 = 13	
F, >>, F	┌, ■, E	>
2, 9, 2	1, 0, 3	7
2,9,2 → 2,9,2 → 2.12 <sup>2</sup> + 9.12 + 2 = 398	1,0,3 → 3,0,1 → 3.12 <sup>2</sup> + 0.12 + 1 = 433	

**Tablo 9.** Resim 1'deki sembollerin 12 tabanındaki basamak değerleri ve her bir satırdaki dik üçgenin genişliğini ve hipotenüsünü veren değerler. Bu okumayı [Şekil 2'](#)de (ki [Şekil 3](#)'teki ters çeviri olmakla birlikte her 2 tabloda boşlukların yerine "0" gelir, çünkü tam sayılar 12 tabanında 3 basamak halinde yazılırlar) ve çevirmeyi [Şekil 3, 5, 6, 7](#)'de görebilirsiniz (ki doğru çeviri en sonunda [John Maglio](#) tarafından [Şekil 7](#)'de yapılmıştır). Bu yönüyle Çatalhöyük tableti [Plimpton 322](#) no'lu tablete benzer.

Bu tablo ile [John](#)'un Tablo 7'deki sonuçları karşılaştırsak, bu tabloda 2 tane basit yazım hatasının olduğu görülür:

- İlk hatanın düzeltilmiş şekli şudur: 4. Satır-2. Sütun'da yer alan 46 sayısı yerine 34 gelmelidir. Çünkü dik üçgen bağıntısına göre  $h_4 = 30$  birim ise  $r_4 = 34$  birim olmalı ki  $a_4 = 16$  birim olarak elde edilsin. Bu hata büyük bir olasılıkla  $a_4 + h_4 = 30 + 16 = 46$  şeklinde okunmasından kaynaklandı. Dikkat edilirse  $r_4 - a_4 = 46 - 30 = 16 = 4^2$ 'dir ancak  $r_4 + a_4 = 46 + 30 = 76$  sayısı bir tam kare değildir.
- İkincisi hata ise 7. Satır-3. Sütun'da yazılan 398 sayısıdır. Burada da 398 yerine 408 sayısı gelmelidir. Bu durumda  $(a_7, h_7, r_7) = (145, 408, 433)$  sıralı üçlüsü elde edilir. Eğer 398'e karşılık gelen sembolleri tersten yazar ve okursak, ki bu mümkündür, 10 tabanındaki karşılığı 384 olacaktı ve  $r_7 - h_7 = 433 - 384 = 49 = 7^2$  tam karesi elde edilecekti. Bu şekilde bir işlemin yapılması mümkündür çünkü  $h_7 = 2p_7q_7 = 2 \times 16 \times 12 = 384$  olması çok dikkat çekmektedir. Bu da hatanın nereden kaynaklandığını bize açıklar. Yani 7. Satır-3. Sütun'daki sayının  $h_7 = 2p_7q_7 = 2 \times 17 \times 12 = 408$  olması gerekirken bu yanlış nedeniyle 384'e karşılık gelen sembollerin tersten yazılmasıyla hatalı olan 398 sayısı elde edilmiştir.

Şu hâlde bu basit hataların düzeltilmiş şekliyle tabletteki 4. ve 7. satırların doğrusu şu şekilde olur:

Dik Üçgenin Genişliği	Dik Üçgenin Hipotenüsü	Satır No
∃, F, ■	<, F, ■	7
6, 2, 0	10, 2, 0	4
6,2,0 → 0,2,6 → 0.12 <sup>2</sup> + 2.12 + 6 = 30	10,2,0 → 0,2,10 → 0.12 <sup>2</sup> + 2.12 + 10 = 34	
■, <, F	┌, ■, E	>
0, 10, 2	1, 0, 3	7
0,10,2 → 2,10,0 → 2.12 <sup>2</sup> + 10.12 + 0 = 408	1,0,3 → 3,0,1 → 3.12 <sup>2</sup> + 0.12 + 1 = 433	

**Tablo 10.** Tablo 9'daki 4. ve 7. satırların düzeltilmiş şekli. Tablo 7'deki alıntının devamında şu sonuçlar geçer: "Öğrencilerim 34 yerine 46'nın neden görüldüğüne dair makul bir açıklamaya ulaştıklarını düşündüler ve bir önceki sütündeki tüm girişlerin tek olmak zorunda olmadığına ikna oldular. 398'in 408 yerine nasıl yazıldığına dair açıklamalarından memnun değillerdi, ancak 408 ve 433'ün doğru olduğuna kuvvetle inanıyorlardı. Ne yazık ki tableti daha fazla incelemek için zamanımız yoktu ve tabletin Pisagor üçlülerinin rastgele mi yoksa sıralı bir koleksiyonu mu olduğunu düşünemedik. Tabletten eksik alt üçte birlik kısmındaki girişleri belirlemek için de zamanımız yoktu."

### 3.1. Çatalhöyük Tableti'nin Matematiksel-Astronomiksel Çözümü

Yurdumuzda keşfedilen Çatalhöyük tabletimizde 7 tane  $(a_n, h_n, r_n)$  dik üçgeninin genişlikleri ve hipotenüsleri sıralı bir şekilde verilmiştir. Burada yine  $(a_n, h_n, r_n)$  dik üçgeninin kenarları  $a_n$ : Genişlik,  $h_n$ : Yükseklik,  $r_n$ : Hipotenüs olarak tanımlanırsalar, kenarların uzunlukları  $(p_n, q_n)$  doğuranlarıyla [58]'den bulunur.

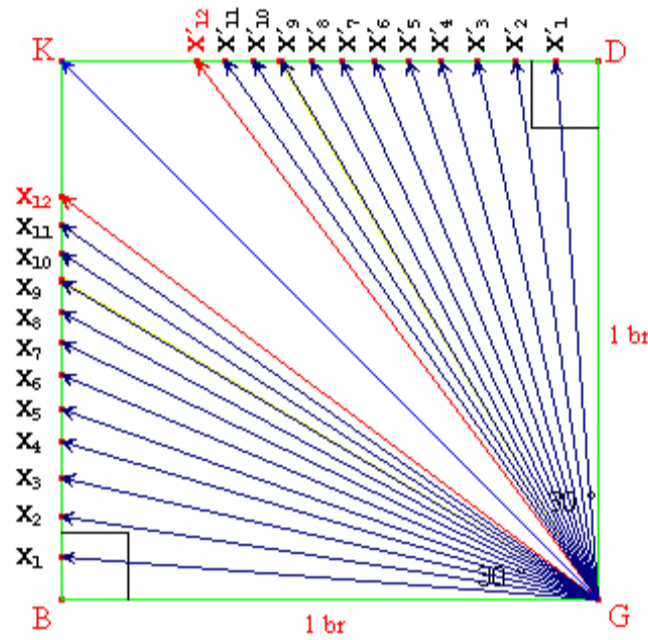
Tabletimizdeki bu sayılar nasıl bulunmuştur ve hangi kurallara göre sıralanmıştır?

Bu sorunun yanıtı gayet basittir. Çünkü tabletimizde verilen  $a_n$  genişlikleri ve  $r_n$  hipotenüsleriyle [58]'den  $(p_n, q_n)$  doğuranları kolaylıkla bulunur. Bu durumda  $(p_n, q_n)$  doğuranlarının 12 tabanında bir seriden elde edildikleri görülmektedir.

Şu hâlde  $q_n$ 'ler, Plimpton 322 no'lu tabletindeki gibi, 12'nin doğal bölenleri olduğundan 12'nin asal çarpanları olan 2 ve 3 sayılarını ihtiva eden birer tam sayı olurlar. Dolayısıyla  $q_n$  ve  $q_n^{-1}$  sayıları 12 tabanında sonlu olurlar, ancak aynı özellik  $p_n$  sayıları için geçerli değildir. Çünkü her  $n$  için  $p_n$  12 tabanında sonlu iken  $p_n^{-1}$  daima sonlu değildir. Buradan da dik üçgenlerin  $h_n = 2p_nq_n$  yüksekliklerinin 12 tabanında daima 2 ve 3 asal çarpanlarını içermeyen sonlu birer tam sayı oldukları ama  $h_n^{-1}$  tersinin sonlu olmadıkları sonucu çıkar.

Peki bu dik üçgenlerin seri bir şekilde bulunmasında orijin (başlangıç) noktası nerede seçilmiş idi?

Aşağıdaki çözümde görüleceği üzere bu dik üçgenlerin bulunması için seçilen orijin noktasının hepimizin yakından tanıdığı "Kutsal Üçgen" yani (3,4,5) geçiş dik üçgeni olduğu görülecektir.



**Şekil 4.** Tabletteki dik üçgenlerin Tablo 11'deki 12 - n'ye göre eğim açılarına göre pozisyonları. Fakat bu dik üçgenler KBGD karesinin [BG] köşegenine göre simetrik olduklarından çifte pozisyona sahiptirler yani eğim açıları çifte okunabilir. Örneğin  $GBX_1$  dik üçgeninin eğim açısı Tablo 11'e göre  $\theta_1 = 04^\circ 34' 52.39''$  iken  $GBX_1$  dik üçgeninin [BG] köşegenine simetrisi olan  $GBX_1'$  dik üçgeninin eğim açısı  $\theta_1' = 90^\circ - \theta_1 = 90^\circ - 04^\circ 34' 52.39'' = 85^\circ 25' 07.21''$  olur. Yani tabletteki dik üçgenlerin Plimpton 322 no'lu tabletindeki gibi çifte kullanımı söz konusudur.

Şekildeki  $GBX_{12}$  dik üçgeni (3,4,5) üçlüsünü gösterir ve  $n = 1, 2, \dots, 11$  için  $GBX_n$  dik üçgenleri de tabletimizdeki diğer dik üçgenleri gösterir. Bu dik üçgenlerin eğim (taban) açılarına  $\angle(X_nGB) = \theta_n$  dersek tepe açıları  $\angle(BX_nG) = \theta_n'$  olur. Ayrıca  $GBX_n$  dik üçgenleri KBGD birim karesinin [GK] köşegenine göre simetrik olduklarından  $GDX_n'$  dik üçgenleri elde edilir ki,  $GBX_n \cong GDX_n'$  (eş dik üçgenler) nedeniyle  $X_n'$  noktalarından birim karenin [BG] kenarına dikmeler indirilirse, yani  $GDX_n'$  dik üçgenleri dikdörtgenlere tamamlanırsalar, bu dikdörtgenlerdeki 2. dik üçgenlerin eğim açıları  $GBX_n$  dik üçgenlerinin tepe açıları olur ve böylece simetri kavramı nedeniyle tabletimizdeki  $GBX_n$  dik üçgenlerini bulurken,  $GBX_n$  dik üçgenlerinin tepe açılarını eğim açıları olarak kabul eden dik üçgenleri de otomatikman bulmuş oluruz.

Şu hâlde tabletimizdeki dik üçgenleri bulmak için orijin olarak seçilen (3,4,5) dik üçgeninin doğuranları 12 tabanında şu şekilde bulunur: Eğer **Neugebauer**'in çözüm prosedürünü kullanırsam (ki **Neugebauer** Plimpton 322 no'lu tabletteki dikdörtgenin köşegenini  $d$  (ki bu dik üçgende hipotenüse karşılık gelir) ve yüksekliğini  $\ell$  ile göstererek ve  $p$  ve  $q$  doğuranlarının birer düzgün sayı olması hesabıyla  $\frac{d}{\ell} = \frac{1}{2}(p \cdot \bar{q} + \bar{p} \cdot q) \left( = \frac{p+q}{2} \right)$  ve bunun karesine 1 ekleyerek son sütundaki 60 tabanlı sayıların elde edilebileceğini söylemişti (Bkz. "[Matematiksel Civi Yazıtları \(Mathematical Cuneiform Texts\), New Heaven, Conn., 1945](#)", S. 41, (3) ve "[Otto Neugebauer: The Exact Sciences in Antiquity \(1951,1957,1969\), 2nd ed./Princeton, NJ: Brown University Press; reprint ed./New York: Dover, 1969](#)", S. 39).

Ama diğer taraftan  $b$  genişliğinin  $\ell$  yüksekliğine  $\frac{b}{\ell} = \frac{p-q}{2} = \frac{1}{2}(p \cdot \bar{q} - \bar{p} \cdot q)$  oranı da mevcuttur) ilkin

$$\frac{\frac{p_{12}}{q_{12}} - \left(\frac{p_{12}}{q_{12}}\right)^{-1}}{2} = \frac{m_{12} - m_{12}^{-1}}{2} = \frac{a_{12}}{h_{12}} = \frac{3}{4} = 0; 9 \Rightarrow m_{12}^2 - 1; 6m_{12} - 1 = 0$$

eşitliklerinden (ki burada 12 tabanında yazılan sayılar  $1; 6 = 1 + \frac{6}{12} = \frac{3}{2}$  ve  $0; 9 = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$  e karşılık gelir)

$$[61] \quad m_{12}^2 - 2 \times 0; 9m_{12} - 1 = 0$$

denklemini elde edilir ve bu 2. dereceden denklemin pozitif kökünden (3,4,5) dik üçgeninin doğuranları

$$m_{12}^2 - 2 \times 0; 9m_{12} - 1 = 0 \Rightarrow m_{12}^2 - 2 \times 0; 9m_{12} + 0; 9^2 = 1 + 0; 9^2 \Rightarrow (m_{12} - 0; 9)^2 = 1 + 0; 9^2 \Rightarrow \frac{p_{12}}{q_{12}} = m_{12} = 0; 9 + \sqrt{1 + 0; 9^2} = 0; 9 + 1; 3 = 2$$

eşitliklerinden

$$[62] \quad p_{12} = 2, q_{12} = 1$$

şeklinde bulunur.

Buna göre tabletimizin ilk satırındaki dik üçgenin doğuranları

$$\frac{p_{11}}{q_{11}} = m_{11} = 1; 11 < m_{12} = 2 = 1; 12 \Rightarrow \frac{p_{11}}{q_{11}} = 1; 11 = 1 + \frac{11}{12} = \frac{23}{12}$$

seçiminden

$$[63] \quad p_{11} = 23, q_{11} = 12$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde 2. satırdaki dik üçgenin doğuranları

$$m_{10} = 1; 10 < m_{11} = 1; 11 \Rightarrow \frac{p_{10}}{q_{10}} = 1; 10 = 1 + \frac{10}{12} = 1 + \frac{5}{6} = \frac{11}{6}$$

seçiminden

$$[64] \quad p_{10} = 11, q_{10} = 6$$

olarak bulunur.

Şu hâlde bu işleme aynı şekilde devam edersek **Genelleştirilmiş Babil Teoremi**ni seri bir şekilde gerçekleyen tabletimizdeki dik üçgenlerin doğuranları  $n = 1, 2, \dots, 11$  için

$$[65] \quad m_{n-1} < m_n \Leftrightarrow \frac{p_n}{q_n} = m_n = 1; n$$

şeklinde bulunmuş olur.

Buna göre diğer dik üçgenlerin doğuranları sırasıyla şu şekilde bulunur:

$$[66] \quad \begin{aligned} m_9 &= 1; 9 = 1 + \frac{9}{12} = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}, \\ m_8 &= 1; 8 = 1 + \frac{8}{12} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}, \\ m_7 &= 1; 7 = 1 + \frac{7}{12} = \frac{19}{12}, \\ m_6 &= 1; 6 = 1 + \frac{6}{12} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \\ m_5 &= 1; 5 = 1 + \frac{5}{12} = \frac{17}{12}, \\ m_4 &= 1; 4 = 1 + \frac{4}{12} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}, \\ m_3 &= 1; 3 = 1 + \frac{3}{12} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}, \\ m_2 &= 1; 2 = 1 + \frac{2}{12} = 1 + \frac{1}{6} = \frac{7}{6}, \\ m_1 &= 1; 1 = 1 + \frac{1}{12} = \frac{13}{12}. \end{aligned}$$

Öte yandan modüler aritmetikteki simetri kavramı nedeniyle [65]'te  $n$  yerine  $12 - n$  konursa

$$[67] \quad \frac{p_n}{q_n} = m_n = 1; 12 - n = 1 + \frac{12 - n}{12} = 2 - \frac{n}{12}$$

çözümünden gene aynı doğuranlar bulunur. Bu durumda ilkin  $n = 1$  alınırsa tabletimizdeki ilk dik üçgenin doğuranları ve sırasıyla diğer  $n$  değerleri için tabletimizdeki bütün dik üçgenlerin doğuranları bulunmuş olur.

Ayrıca bu dik üçgenlerin eğim açıları

$$[68] \quad \theta_n = \text{Tan}^{-1} \left( \frac{a_n}{h_n} \right) = \text{Tan}^{-1} \left( \frac{m_n - m_n^{-1}}{2} \right) = \text{Tan}^{-1} \left( \frac{1; 12 - n - (1; 12 - n)^{-1}}{2} \right)$$

formülünden bulunduğuna göre,  $n = 1, 2, \dots, 7$  için tabletimizdeki dik üçgenleri keşfeden **John Maglio** ve tam bir deşifresi **Mathquake** tarafından yapılan tablo şu şekilde ortaya çıkar:

$12 - n$	$n$	$(p_n, q_n)$	$(a_n, h_n, r_n)$	$\theta_n$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
20	-8	(8,3)	(55,48,73)	48°53'16.47"
19	-7	(31,12)	(817,744,1105)	47°40'38.93"
18	-6	(5,2)	(21,20,29)	46°23'49.85"
17	-5	(29,12)	(697,696,985)	45°02'28.07"
16	-4	(7,3)	(40,42,58)	43°36'10.15"
15	-3	(9,4)	(65,72,97)	42°04'30.08"
14	-2	(13,6)	(133,156,205)	40°26'58.99"
13	-1	(25,12)	(481,600,769)	38°43'04.76"
12	0	(2,1)	(3,4,5)	36°52'11.63"
11	1	(23,12)	(385,552,673)	34°53'39.76"
10	2	(11,6)	(85,132,157)	32°46'44.69"
9	3	(7,4)	(33,56,65)	30°30'36.85"
8	4	(5,3)	(16,30,34)	28°04'20.95"
7	5	(19,12)	(217,456,505)	25°26'55.36"
6	6	(3,2)	(5,12,13)	22°37'11.51"
5	7	(17,12)	(145,408,433)	19°33'53.30"
4	8	(4,3)	(7,24,25)	16°15'36.74"
3	9	(5,4)	(9,40,41)	12°40'49.38"
2	10	(7,6)	(13,84,85)	08°47'50.68"
1	11	(13,12)	(25,312,313)	04°34'52.39"
0	12	(1,1)	(0,2,2)	00°00'00.00"

**Tablo 11.** Tabletteki dik üçgenler sıralı olarak boyalı bölgede yer alır.

**3.2. Sonuçlar.** Aşağıdaki maddelerde yer alan sonuçlar tabletimiz hakkında elde ettiğim bilgilerdir.

**1. (30°, 60°, 90°)'ne En Yakın Dik Üçgen.** Şekil 4'teki  $GBX_9$  dik üçgeninin eğim açısı  $\theta_9 = 30^\circ 30' 36.85''$  olması nedeniyle hipotenüsünün (30°, 60°, 90°) dik üçgeninin (sarı renkli) hipotenüsünün yakınından geçtiği görülmektedir.

**2. Doğuran Dik Üçgenlerin Eğimleri.** [66]'ya göre ardışık doğuran dik üçgenin eğimleri arasında  $\frac{1}{12}$  fark vardır:

$$[69] \quad m_{n+1} - m_n = \frac{1}{12}.$$

Eğer bu eşitlikte her 2 tarafın toplamını alırsak

$$m_n - m_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (m_{k+1} - m_k) = \frac{n}{12}$$

eşitliği elde edilir ve Tablo 11'deki son satırdaki doğuran dik üçgenin eğimi  $m_0 = \frac{1}{1} = 1$  olduğundan  $n$ -inci doğuran dik üçgenin eğimi şöyle olur:

$$[70] \quad m_n = 1 + \frac{n}{12}.$$

**3. Tek Sayıdaki Ardışık Doğuran Dik Üçgenlerin Eğimlerinin Aritmetik Ortalaması Ortancanın Eğime Eşittir.** Tabletimizdeki dik üçgenlerin doğuranları 12 tabanındaki bir seriden bulduklarından, ardışık 3 doğuran dik üçgenin eğimleri için daima aritmetik ortalama kuralı <sup>(2)</sup> geçerli olur:

$$[71] \quad m_{n+1} = \frac{m_{n+2} + m_n}{2}.$$

Çünkü bu kural ardışık 3 doğuran dik üçgenin  $m_n, m_{n+1}, m_{n+2}$  eğimlerinin aritmetik ortalaması ortancanın eğimi verir:

$$[72] \quad \frac{m_n + m_{n+1} + m_{n+2}}{3} = m_{n+1}.$$

Fakat bu durum tek sayıdaki ardışık dik üçgenlerin eğimleri için genel bir kuraldır. Örneğin ardışık 5 doğuran dik üçgenin  $m_n, m_{n+1}, m_{n+2}, m_{n+3}, m_{n+4}$  eğimlerinin aritmetik ortalaması yine ortancanın eğimi verir:

<sup>(2)</sup> Bu kural Plimpton 322 no'lu tablette bir yaklaşım olarak geçerlidir, dolayısıyla bu da orada kullanılan metodun farklı olduğunu gösterir.

$$[73] \quad \frac{m_n + m_{n+1} + m_{n+2} + m_{n+3} + m_{n+4}}{5} = m_{n+2}.$$

Şu hâlde  $t$  tek bir sayı olmak üzere, ardışık  $t$  tane doğuran dik üçgenin eğimlerinin aritmetik ortalaması ortancanın eğime eşit olur:

$$[74] \quad \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{t-1} m_{n+k} = m_{n+\frac{t-1}{2}}.$$

Buna göre Tablo 11'deki boyalı bölgedeki yani tabletteki dik üçgenleri doğuran tüm dik üçgenlerin eğimlerinin aritmetik ortalaması ya da ortancanın eğimini çıkarır ve geri kalan 10 eğimi göz önüne alır ve bunların aritmetik ortalaması alırsak yine ortancanın eğimi yani  $m_6 = \frac{3}{2}$ 'yi buluruz. Bu nedenle  $t$  tane ardışık doğuran dik üçgenlerin eğimlerinden ortancanın eğimi çıkarır ve geri kalanların aritmetik ortalamasını alırsak yine ortancanın eğime eşit olur:

$$[75] \quad \frac{m_n + m_{n+1} + \dots + m_{n+\frac{t-3}{2}} + m_{n+\frac{t+1}{2}} + \dots + m_{n+t-2} + m_{n+t-1}}{t-1} = m_{n+\frac{t-1}{2}}.$$

Ancak bu özelliğe rağmen tabletimiz astronomik gözlem amacıyla Plimpton 322 no'lu tabletine göre çok daha kötü bir şekilde üretilmiş âlet olarak gözükür. Neden?

**4. Tablet'in Tamamlanması.** Tabletimize diğer tabletler birlikte mağarada altı kırık bir şekilde bulunduğunda yalnızca Tablo 11'deki  $n = 1, 2, \dots, 7$ -inci satırlardaki dik üçgenlerin  $a_n$  genişliklerini ve  $r_n$  hipotenüslerini içermektedir. Bu nedenle Amerikan Bölgeler Matematik Ligi'nde Problem-Yazma Kürsüsü'ndeki **Donald T. Barry** başkanlığında bir sınıf öğrenciyle birlikte 3 gün süren araştırma sonucunda tabletimizin 3'te 1'inin kayıp olduğu sonucuna varıldı ama şimdi burada verdiğim çözümle tabletimizin tamamını görmekteyiz. Demek ki eğer tabletimiz tek parça halinde keşfedilseydi Tablo 11'den de görüleceği gibi 11 tane dik üçgeni içerdiği görülecekti!

Şimdi yukarıda yaptığım çalışmayla hatalarından arındırılmış bir şekilde ve kayıp parçayı da yerine monte ederek bu tableti aşağıda tek parça halinde görme şansına sahibiz:



**Resim 2.** **Donald T. Barry**'nin sınıfındaki öğrenciler 3 gün süren araştırma sonunda Resim 1'deki kırık tableti tamamlayamadı, çünkü **Donald T. Barry**'nin açıklamasına göre "Tabletin eksik alt tarafındaki üçte birlik kısımdaki girişleri belirlemek için zamanımız yoktu". Bu açıklamadaki girişler yukarıda tamamlanmış tabletin son 4 satırındaki sayılardır.

**5. Tablet'in Keşif ve Çözüm Hikâyesi.** Şimdiye kadar kadim Babil tabletlerinden YBC 7289 no'lu tablette başarıya ulaşmış ve tam bir deşifresini "[Hesabın Destanında İlk Gerçek Algoritma: YBC 7289 no'lu Tabletindeki Babil Algoritması, 1. Baskı: 20.04.2006, 17:00:00](http://members.lycos.co.uk/gizapyramids/YBC7289/index.html)" çalışmasıyla (ki linkin orijinali <http://members.lycos.co.uk/gizapyramids/YBC7289/index.html> idi) sitemde yayımlamıştım. Daha sonra Plimpton 322 no'lu tablet hakkında araştırmalarımı başladım. Tabii ki bu tabletin deşifresi zor olduğundan birçok kadim Babil tabletini çalışmalarlarıyla birlikte inceliyordum. Yine internette bir gün, 07.05.2006'da saat 4 sıralarında Plimpton 322 no'lu tablet hakkında araştırma yaparken şimdi burada tüm yönleriyle incelediğim tabletimiz ile ilgili "[Mathematics in Search of History](#)" makalesini Google arama motoruyla elde ettikten sonra çok şaşırdığımı hatırlıyorum. Çünkü böyle bir olay ilk kez başıma geliyordu ve bunun doğru olup olmadığını derhal araştırmaya başladım. Fakat o da ne? En azından Plimpton 322 no'lu tabletindeki gibi tabletimiz hakkında hiç olmazsa bir iki yerde bilgi olmalıydı, değil mi? Ama yoktu!

Açıkçası şok geçiriyordum ve bu şaşkınlık içinde ilkin "**Mısır Piramitleri**" adlı grubumuzda tabletimiz hakkında

806	<a href="#">Yine Bir Mathquake Şoku: Pisagor Teoremi için Yeni Bir Tablet (Bu tablet yurdumuzda keşfedildi!)-1</a>	<a href="#">Mathquake</a>	07/05/06 04:21
	Türkiye'nin güneyindeki Neolit...		

807	<a href="#">Yine Bir Mathquake Şoku: Pisagor Teoremi için Yeni Bir Tablet (Bu tablet yurdumuzda keşfedildi!)-2</a> Uyarı: 1) Herhalde yurdumuz...	<a href="#">Mathquake</a>	07/05/06 04:38
-----	--	---------------------------	----------------

şeklinde ilk bilgilendirici mesajlarımı yayımladım ve gün boyu internetten araştırma yaptım. Sonuç tahmin edeceğimiz gibi. Tabii ki ben de zorunlu olarak anılan makaledeki bilgilerden hareketle (ki bu makalede Plimpton 322 no'lu tablet örnek verilerek tabletimizdeki dik üçgenler için "Ne yazık ki, tableti daha fazla incelemek için zamanımız yoktu ve tabletteki Pisagor üçlülerinin rastgele mi yoksa sıralı bir koleksiyonu mu olduğunu düşünemedik" bilgileri harekete geçmem için yeter nedenlerdi) tabletimizle ilgilenmeye başladım.

### Çözüm Yüzeydeydi!

Daha ilk analizimde, Plimpton 322 no'lu tabletindeki **Neugebauer**'in çözüm prosedürünü tabletimize uygular uygulamaz derhal çözüme eriştim. Çünkü çözüm gerçekten de yüzeydeydi ve çok basitti. Hemen bu müjdeli haberi derhal

810	<a href="#">ŞOK'un Babası: Alt tarafı kayıp tablet deşifre edildi!</a> Evet arkadaşlar. Son mesajlar...	<a href="#">Mathquake</a>	07/05/06 17:49
-----	--	---------------------------	----------------

mesajıyla grubumuza ilettikten sonra daha rahat bir ortamda okuyabilmeleri için, grubumuz adına kurulmuş <http://www.piramitim.com> sitesinde şu mesajımı yayımladım:

Pisagor Teoremi İçin Yurdumuzda Keşfedilen Yeni Bir Tablet Deşifresi			
Yazar Derya PAMUK TULUM			
Sunday, 07 May 2006			
<a href="#">Yine Bir Mathquake Şoku: Pisagor Teoremi için Yeni Bir Tablet (Bu tablet yurdumuzda keşfedildi!)</a>			

**6. Donald T. Barry'nin Makalesi Hakkında.** Öncelikle "[Mathematics in Search of History](#)" makalesinde Çatalhöyük tableti için verilen adresin sırtması nedeniyle bu makalenin bir senaryo olduğu açıktı. Makalenin yazarı **Donald T. Barry** bu durumu makalenin başında açıklar ama senaryoya geçtiğinde, kendisini olayın gerçekliğine kaptırdığından olsa gerek, anlatımda gerçekliğe başvurur.

Makalenin girişinde şu bilgiler verilir (Bkz. S. [647](#). Bu giriş [647](#). sayfadan [648](#). sayfanın başındaki "**My Students' Response (Öğrencilerimin Yanıtı)**"na kadardır):

"Matematik tarihi bir sınıfı canlandırmak ve bir derse anlam kazandırmak için çeşitli şekillerde kullanılır. Anekdotlar anlatırız, öğrencilerin matematikçilerin hayatlarını araştırmasını gerektirir, öğrencileri tarihsel ilgi çeken problemleri çözme girişimlerini incelemeye teşvik ederiz ve öğrencilerin bilimin tarihsel gelişimi ile matematiğin gelişimi arasındaki bağlantıları keşfetmelerini öneririz. Ancak, matematik tarihini esas olarak yalnızca bir dizi olgudan oluşan sabit bir varlık olarak ele aldığımızdan endişeleniyorum, içinde canlı tartışmaların yaşandığı ve zaman içinde değişimin vurgulandığı akışkan bir alan olarak değil. **Bu eğilime karşı koymak için, eski bir belge biçiminde bir matematik problemi yarattım!**

Çözüm bir bilim insanları topluluğunun yani öğrencilerin belirsizlikleri ve tutarsızlıkları çözmek için birlikte çalışmasını ve topluluğun bir bütün olarak makul derecede rahat olduğu bir problem yorumuna ulaşmasını gerektirir. Bu problemi aklımda iki önemli hedefle İleri Yerleştirme Hesaplama sınıfıma veriyorum:

- İleri Yerleştirme sınavından sonra onlara matematiksel olarak ilginç bir meydan okuma sunmak.
- Matematik tarihinin gerçekte nasıl geliştirildiğini simüle etmek.

O yıl gerçekleşen sınıf tartışmalarından heyecan duydum. Bu makalenin geri kalanında sorun ve sınıfın belgeyi anlamlandırmak için mücadele ederken izlediği yol sunulmaktadır. Matematik tarihinin bu şekilde kullanılmasının değerli olduğunu kanıtlamayı umuyorum.

### SORUN

'**Arkeoloji ve Dil: Hint-Avrupa Kökenlerinin Bulmacası**' adlı eserinde **Colin Renfrew (1987)**, Hint-Avrupa dillerinin ana dilinin MÖ 8000 civarında Orta Anadolu'da gelişen tarım topluluklarından kaynaklandığını ileri sürmektedir. Dilin yayılmasını ve farklılaşmasını tarımın yayılmasıyla eş zamanlı olduğunu savunmaktadır, çünkü aileler sadece tarım teknikleriyle değil bakir topraklara taşınmıştır.

Şans eseri, güney orta Türkiye'deki iyi bilinen Neolitik Çatalhöyük köyünden çok da uzak olmayan, Olmazköy köyü yakınlarında, İmkânsız dere kıyısında, bir çoban yakın zamanda antik kil tabletlerle dolu bir mağara keşfetti. Tabletlerdeki yazı ne Hurrice, Hattice, Frigce, Minos Linear A ne de bilinen başka bir antik dildir. Tüm Hint-Avrupa dillerinin ana dili olabilir.

Tabletlerin bazılarında matematiksel yazılar var gibi görünüyor. Şekil 1'de (Resim 1) gösterilen, belki de en ilginç ve heyecan verici tabletin bir tıpkıbasımıdır.

Sayısal bilgi olması gereken 7 satırlık 3 sütundan oluşur. Ne yazık ki tablet alttan kırılmış ve diğer kısmı henüz bulunamamıştır. Eksik parça hala mağarada bulunabilir, ancak şu anda gösterişli bir New York City dairesinde kitap ayracı olması da aynı derecede olasıdır. Bu tablet diğer tabletlerle aynı boyuttaysa, onun en üstteki üçte ikisine sahibiz.

Göreviniz, tabii kabul etmeyi seçerseniz, tableti çözmektir. Sütunlardaki ve satırlardaki sayıları belirleyin ve sayısal bilgilerin bir yorumunu geliştirin. Yorumunuza dayanarak tabletin eksik üçte birinin içeriğini belirleyin."

Makalenin sonunda ise şu bilgiler verilir (Bkz. S. 650):

*“John’un keşifleri dersin son gününde geldi. Bu bilgin topluluğu, tablo için uygulanabilir, düzeltilmiş bir giriş seti bulduğuna inanarak, analizini yüksek bir notla sonlandırdı. Öğrencilerim 34 yerine 46’nın neden görüldüğüne dair makul bir açıklamaya ulaştıklarını düşündüler ve bir önceki sütündeki tüm girişlerin tek olmak zorunda olmadığına ikna oldular. 398’in 408 yerine nasıl yazıldığına dair açıklamalarından memnun değillerdi, ancak 408 ve 433’ün doğru olduğuna kuvvetle inanıyorlardı. Ne yazık ki tableti daha fazla incelemek için zamanımız yoktu ve tabletin Pisagor üçlülerinin rastgele mi yoksa sıralı bir koleksiyonu mu olduğunu düşünemedik. Tablet eksik alt üçte birlik kısmındaki girişleri belirlemek için de zamanımız yoktu.*

*Bu önemli görevi okuyucuya ve diğer sınıf bilim insanları topluluklarına bırakıyoruz. Bu sınıfın izlediği yolu düşünürken, bunun MÖ 1800 civarına tarihlenen bir Babil tableti olan Plimpton 322’nin anlamının keşfine ne kadar benzediğine şaşırımdım. Ne yazık ki Plimpton 322 genellikle 15 Pisagor üçlüsünün ardışık bir düzenlemesi olarak sunulur, Neugebauer (1957) ve Bruins’in (1949, 1957) farklı yorumlarına ulaşılan kadar bilim insanlarını varsayımlar labirentinde sürükleyen zorlukları ve belirsizlikleri olan bir belge olarak değil. Neugebauer ve Bruins yorumlarını geliştirirken Babil matematiğinin tarihini oluşturmak için (modern) matematiği kullandılar.*

*Benzer şekilde öğrencilerim bir tabletin yorumunu oluşturmak için matematiksel bilgilerini kullanırken, sadece tarih hakkında konuşmak yerine tarih yazıyor veya oluşturuyorlar. Bu tablete geçirdiğimiz 3 günün, onlara matematik tarihinin geliştirilmesinde yer alan düşünce, macera dolu keşifler ve topluluk çabalarını göstermiş olmasını umuyorum.”*

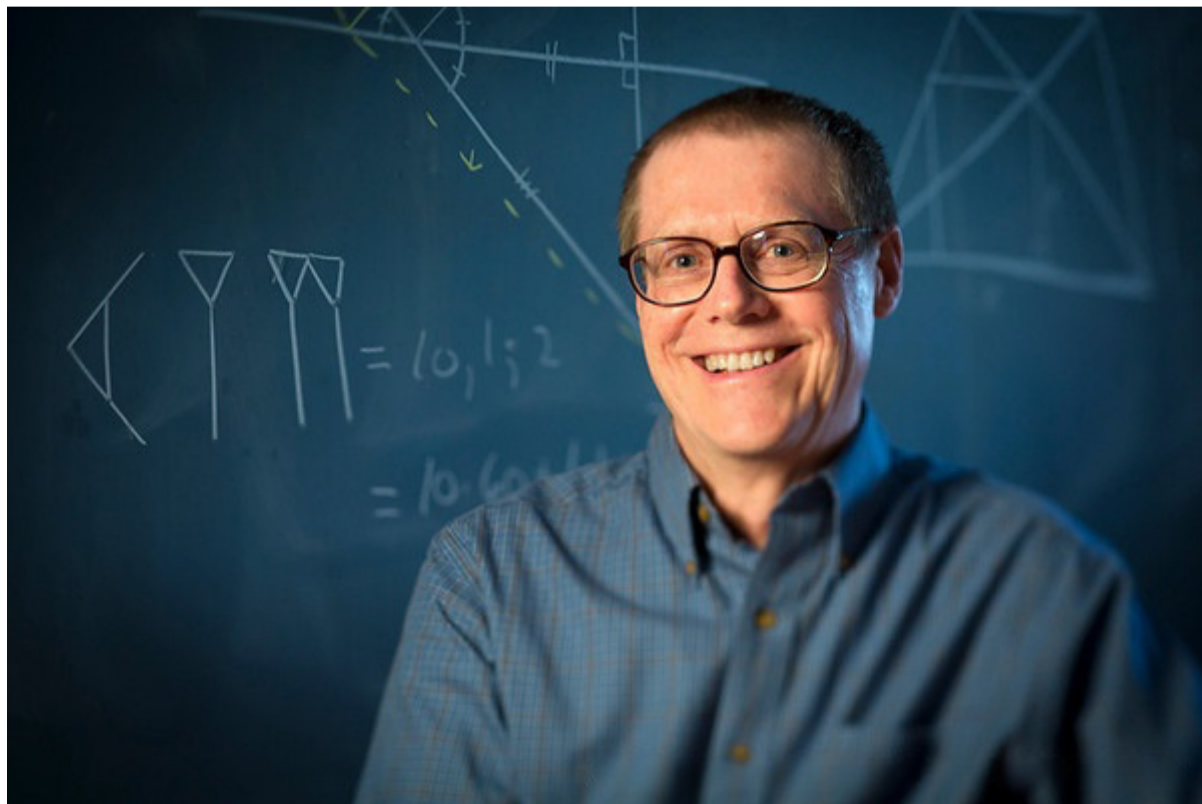
Bu açıklamalardan **Donald T. Barry**’e göre matematik tarihi bir dizi olgudan oluşan sabit varlık yani içinde canlı tartışmaların yaşandığı ve zamanla değişimin vurgulandığı bir akışkan alan değildir ve bu yüzden adına “Çatalhöyük Tableti” dediğim tableti Plimpton 322 no’lu tablete benzeterek (bir önceki sayfada kırmızı renkle vurguladığım yerde) bir matematik belgesi yarattığını söyler.

İşte bu ikiliği gidermek adına yani “tableti oluşturma” ve “senaryodaki canlı anlatım” arasındaki uyumsuzluğu çözmek için **Donald T. Barry**’e 15 Temmuz 2006 Cumartesi, 00:48:56 tarihinde bir mesaj gönderdim ve bana gönderdiği mesajı şimdi hayal meyal hatırlıyorum (ki o mesajın kayıtlı olduğu dosya 16 Temmuz 2006 Pazar, 04:20:14 tarihli “mesaj.doc” idi ama virüslü olduğu için bozuldu. Sonrasında dosyayı “mesaj.rtf” formatında kurtarmaya çalıştığımda boyutu şişerek 50.6 MB oldu, ancak bu sefer de karakterler bozuldu). Bu konuda aşağıdaki makaledeki bazı bilgiler bana oldukça yardımcı oldu. Örneğin o mesaja Türkiye’de (Tarsus Amerikan Lisesi ve Robert Kolej) 7 yıl matematik öğretmeni olarak görev yaptığını söylemişti.

[“Donald Barry, Andover Müfredatında Felsefe, Tarih ve Matematiği Dengeliyor!”](#)

**Rebecca Wagman, 02.02.2012.**

*Matematik Öğretmeni Donald Barry, ünlü bir Mısırlı matematikçinin keşif hikayesini sınıflarına anlatıyor ve modern bir dersin materyallerini antik kökenlerine bağlıyor. Phillips Academy’sinin Matematik Bölümü’nde 32 yıldır çalışmasına rağmen Barry, kariyerini matematiğe adamaya karar vermeden önce papaz olmayı hedeflemiş ve Yale İlahiyat Fakültesi’ne gitmiştir. Cedar Rapids/Iowa’da büyüyen Barry, yerel bir liseye devam etti ve ardından Carleton College’deki felsefe bölümünden mezun oldu. Rockefeller Bursu ile Yale İlahiyat Okulu’na devam etti. Yale’de geçirdiği süre zarfında Barry, Yaz Fırsatları Direktörü olan eşi Roxanne Barry ile tanıştı ve çift bir yıl sonra evlendi. Roxanne Barry, Türkiye’de 2 Amerikalı öğretmenin kızı olarak büyümüştür, bu nedenle Barryler 1973-1980 yılları arasında Türkiye’de bir Türk erkek lisesi olan Tarsus Amerikan Lisesi’nde ve İstanbul’daki bir başka lise olan Robert Kolej’de öğretmenlik yapmaya karar vermişlerdir. Barry’ye göre, o dönemde Türkiye’de bakanlar için uygun bir iş yoktu, bu nedenle her zaman tutkuyla bağlı olduğu matematik alanında sertifika almak için gece okuluna ve yaz okuluna katıldı. Barry, matematiğe olan ilgisinin 11. sınıftan sonraki yaz Kuzey Güney Vakfı (NSF) tarafından desteklenen bir matematik programında arttığını söyledi: ‘New York/New Jersey bölgesinden bazı muazzam matematik öğrencileriyle tanıştım. Ne kadar yaratıcı olduklarını görünce şaşırımdım. Matematiğin mekanik kısmında iyiydim ama matematikte bu kadar yaratıcı olunabileceğini hiç düşünmemiştim. Onlara nasıl bu kadar yaratıcı olabildiklerini sorduğumda hepsinin cevabı aynıydı: Matematik yarışmaları’. Barry, The Phillipian’a gönderdiği e-postada şöyle yazıyor: ‘Barry önce Türk öğrencileri için, ardından da New England’daki eyalet ve bölge yarışmaları için matematik yarışması soruları yazmaya başladı. Sonunda 1995’ten 2008’e kadar Amerikan Bölgesi Matematik Ligi’nin (ARML) baş yazarı oldu.’*



**Donald Barry**, Phillips Akademisi, Matematik Öğretmeni 1980-2014. Tahtadaki Babil rakamları ve şekiller dikkat çekiyor!

**Barry** şunları söyledi: ‘Öğrencilerin kendi yaratıcılıklarını deneyimlemelerine yardımcı olacak ilginç problemler geliştirmenin zorluğundan gerçekten keyif aldım. Çok zaman alıyor, pek çok çıkmaz sokağa giriyorum ama arada bir yaratmış olmaktan büyük keyif aldığım bir problemle karşılaşıyorum’. Öğretim

Görevlisi ve Matematik Bölüm Başkanı **Patrick Farrell**, '**Bay Barry, bölümdeki en iyi soru yazarı ve kelimenin tam anlamıyla ülkedeki en iyilerden biri**' dedi. **Barry**'ye göre Andover'da çalışmak, matematiğin tarihini ve uygulamalarını daha iyi keşfetmesini sağladı. **Barry**, 1980 yılında Andover Matematik Bölümü'ne katıldığından beri Andover Davetli Matematik Yarışması'nı yarattı ve Phillips Academy'de Model Birleşmiş Milletler kulübünün kurucularından biri oldu. Matematik kulübüne 20 yıl boyunca fakülte danışmanı olarak hizmet vermiş ve görev süresinin büyük bir bölümünde Model BM danışmanı olarak görev yapmıştır. **Barry** ayrıca Pisagor Teoremi'nin eski uygarlıklardaki erken tarihi üzerine 250 sayfadan fazla bir kitap yazmıştır. Henüz tamamlanmamış olmasına rağmen **Barry**, derslerinde müfredatı desteklemek için sürekli olarak taslağından yararlandığını söyledi. **Barry**, derslerinde hem problem çözmeyi hem de problem kurmayı vurguladığını da sözlerine ekledi.

**Barry**, The Phillipian'a gönderdiği e-postada, '**Öğrencilerimin derslerimden matematikte yetkin olduklarını bilerek çıkmalarını ve yeteneklerine o kadar güvenmelerini isterim ki matematikten korktukları için üniversitedeki fırsatlara asla kapılarını kapatmasınlar**' dedi. **Barry**'nin Andover'daki uzun geçmişinde bir öğrenci, **Isaac Oppen**'in daha önce özel olan 15 dik üçgeni olağanüstü bir şekilde keşfetmesi nedeniyle öne çıkıyor. **Oppen**, 3. sınıftayken fikirlerini **Barry**'ye göstermiş ve ikili **Oppen**'in bulgularını 2004 yılında New England Matematik Öğretmenleri Derneği'ne sunmuştur. **Barry** sınıf dışında da koç ve ev danışmanı olarak görev almıştır. Varsity ve JV golf, JV2 Boys Basketball, hem Boys hem de Girls Cross Country ve Ultimate Frisbee'ye benzer bir spor olan speedball koçluğu yapmıştır. Kendisi ve eşi aynı zamanda West Quad South'taki Taylor Hall'da ev danışmanlığı yapmıştır."

Bu makaledeki bilgilere göre **Donald T. Barry** bana Fransız matematik öğretmeni **Jean Brette**'yi hatırlattı. O da Paris'teki Palais de la découverte'de 40 yıl (1964-2004) matematik öğretmenliği yapmıştı (Bkz. "[Babil ve Mısır II'si](#)", S. 7-13).

Bununla birlikte "Çatalhöyük Tableti" hakkında da şu makaleye bakmanızda fayda görüyorum:

["Donald Barry Kalkülüs Dersi ile Antik Tablet Çözümü Hakkında Makale Yayınladı!"](#)

**Phoebe Gould, 07.02.2013.**

Matematik Eğitmeni **Donald Barry**, '[Matematik Tarihinin Peşinde](#)' başlıklı makalesinde, Antik Hesaplama (BC Calculus) sınıfının eski bir Türk kil tabletini çözme mücadelesini anlattı.

**Barry** '**Bir grup Phillips Academy öğrencisinin ne yaptığını, tablete nasıl yaklaştıklarını ve benim rolümün ne olduğunu anlattım. Ben artık cevap veren adam değilim. Soruları olduğunda, bunu çözmek zorundaydılar**' diyor.

İlk olarak 2000 yılında Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi'nin aylık dergisi 'The Mathematics Teacher'da yayınlanan makale, Ekim 2012'de finans ve ölçme alanındaki matematiksel uygulamaların online antolojisi olan 'Real Math'da yeniden yayınlandı.

**Barry**'nin makalesinde yer alan tablet, 1990'larda Türkiye'nin güneyindeki bir mağarada, bilinen bir Neolitik köyün arkeolojik alanının yakınında keşfedilen çok sayıda antik kil tableten biriydi. Ancak kil tabletin kökeni bilinmemektedir.

O dönemde tabletin sadece üçte ikisi keşfedildiği için **Barry**, öğrencilerinden sütun ve satırlardaki sayıları tahmin ederek tabletin metnini çözmelerini isteyen bir matematik problemi yarattı. Daha sonra öğrenciler, tabletin eksik olan üçte birlik kısmının metnini belirlemek için sayısal bilgilerin bir yorumunu geliştirdiler.

**Barry** makalesinde, '**Çözüm, bir akademisyenler topluluğunun, yani öğrencilerin, belirsizlikleri ve tutarsızlıkları gidermek için birlikte çalışarak, sorunun bir bütün olarak makul ölçüde rahat olduğu bir yorumuna ulaşmasını gerektiriyor**' diye yazdı.

**Barry** tableti 1994'ten bu yana İleri Düzey Yerleştirme Sınavından sonra diğer BC sınıflarına da sunuyor. Ancak makale, 1998-99 öğretim yılında verdiği özel bir BC Calculus dersine odaklanıyor.

'**Sadece sınıfımın ne yaptığını kaydettim. Probleme nasıl yaklaştıklarını, nerede doğru nerede yanlış yöne gittiklerini gözlemledim**' diyor, **Barry**.

Makalede **Barry**, '**O yıl gerçekleşen sınıf tartışmaları beni çok heyecanlandırdı**' dedi. '**Matematik tarihinin bu şekilde kullanılmasının değerli olduğunu göstermeyi umuyordum**'.

**Barry**, alıştırma sırasında önemli olanın sonuçtan ziyade problem çözme deneyimi olduğunu söyledi.

'**Bu problem üzerinde kullanabilecekleri her türlü matematiksel aracı kullanarak tarihi yeniden inşa ediyorlar. Eski bir uygarlığın matematiksel bilgisini yeniden inşa ediyorlar, bu da onları arkeolojinin belli bir yönünü yapmaya mümkün olduğunca yaklaştırdığım anlamına geliyor**' diyor, **Barry**.

'**Sadece tökezlemelerine ve mücadele etmelerine izin veriyorum. Kimse bir arkeoloğa cevabın bu olduğunu söyleyemez. Sahip olduğunuz şey, aynı bilgiye bakarak bunun ne olduğunu anlamaya çalışan bir arkeologlar topluluğudur ve en sonunda az ya da çok, üzerinde anlaşmaya varılmış bazı sonuçlar vardır**' diye devam etti.

**Barry** 1980 yılında Andover'a gelmeden önce 7 yıl Türkiye'de yaşadı. Tarsus ve İstanbul'da Türk öğrencilere İngilizce lise matematiği öğretti.

'**Türkiye'de yaşayıp da antik geçmişe ilgi duymamak mümkün değil, çünkü geçmiş her yerde karşınıza çıkıyor**' diyor. '**Bu yüzden arkeolojiye, arkeolojik keşiflere, arkeologların kullandığı düşünce tarzına, başka türlü olamayacağından çok daha fazla ilgi gösterdim. Bu beni büyülüyor ve bunu öğrencilerimle paylaşmak istiyorum**' diyor, **Barry**.

**Barry**, tableti bu bahar AP Sınavından sonra matematik sınıfına vermeyi planladığını söyledi. '**Onlara farklı bir matematiksel deneyim sunuyor. Bu bir bulmaca**' diyor, **Barry**."

Şimdi "Çatalhöyük Tableti"ni bir egzersiz olarak inceledikten sonra Plimpton 322 no'lu tabletine geçebiliriz!

**4. Plimpton 322 No'lu Tablet.** Bu tablet günümüze ulaşmasındaki hikâyesi ilginç olmakla birlikte **Otto Neugebauer (1899-1990)** ve **Abraham Joseph Sachs (1914-1983)** tarafından "[Matematiksel Çivi Yazıtları \(Mathematical Cuneiform Texts\), New Heaven, Conn., 1945](#)" ortak çalışmasıyla 1 Ocak 1945'te tüm dünyanın dikkatine sunuldu.

**Neugebauer** yandaki tablet hakkında şunları söyler (Bkz. "[Otto Neugebauer: The Exact Sciences in Antiquity \(1951,1957,1969\), 2nd ed./Princeton, NJ: Brown University Press; reprint ed./New York: Dover, 1969](#)", S. 36-37): "Sol taraftaki kırılmadan da anlaşılacağı üzere, bu tablet başlangıçta daha büyüktü; ve kırılmanın üzerindeki modern tutkalın varlığı, diğer kısmın tablet kazıldıktan sonra kaybolduğunu göstermektedir. Her zamanki gibi soldan sağa (sağdan sola) doğru sayılmak üzere 4 sütun korunmuştur. Her sütunun bir başlığı vardır. Son başlık 'adı' olup, altındaki sayı sütununun 1'den 15'e kadar olan satır sayısını basitçe saymasından da anlaşılacağı üzere, sadece 'mevcut sayı' anlamına gelmektedir. Dolayısıyla bu son sütunun matematiksel bir önemi yoktur. II. ve III. sütunların başında sırasıyla 'genişliğin çözüm sayısı' ve 'köşegenin çözüm sayısı' olarak tercüme edilebilecek kelimeler yer almaktadır. 'Çözüm sayısı', karekök ve benzeri işlemlerle bağlantılı olarak kullanılan ve modern terminolojimizde tam bir karşılığı olmayan bir terim için oldukça tatmin edici olmayan bir ifadedir. Bu 2 başlığı sırasıyla basitçe 'b' ve 'd' ile değiştireceğiz. 'Köşegen' kelimesi ilk sütunun başlığında da geçmektedir, ancak geri kalan kelimelerin tam anlamı bizden kaçmaktadır.



**Resim 3.** Plimpton 322 No'lu Tablet (M.Ö. 1900-1600, Eski Babilonya çivi yazılı metni (Plimpton Kütüphanesi, Columbia Üniversitesi, New York)): EnxBoyxYüksekliği: 12.5 CM x 8.8 CM x 2 CM boyutlarında olan bu kil tabletteki metin, sağdan sola doğru 4 sütunda yazılmış  $n = 1, 2, \dots, 15$  için  $(a_n, h_n, r_n)$  tam sayılı dik üçgenlerin bir listesini içermektedir. Bu tabletin sol tarafı boydan boya kırık ve resimden de görüleceği gibi, 2 büyük ve 1 küçük tahribatla birlikte çeşitli yerlerinde ufak tefek tahribatların mevcut olduğu görülmektedir. Sağlam kalmış olan yerlerine göre yapılan okumada sütunlar şu şekilde ortaya çıkmıştır: İlk sütun (sağdaki),  $n = 1$ 'den  $n = 15$ 'e kadar dik üçgenlerin buldukları satır numaralarını gösterir. Bundan sonraki 2 sütun dik üçgenlerin sırasıyla  $r_n$  «köşegen (hipotenüs)»leri ve  $a_n$  «en (taban)»lerini tam sayılar olarak verir. Son sütun ise büyükten küçüğe doğru  $(r_n/h_n)^2$  oranlarını içerir.

Sütun I, II ve III'teki sayılar aşağıdaki listede

(aşağıdaki Tablo 12) çevrilmiş ve [] içindeki sayılar restore edilmiştir. 4. sütundaki '[1]' başlangıç rakamları, fotoğraftan da açıkça görüldüğü gibi (PI. 7a) yarı yarıya korunmuştur. 14. satırda '1' tamamen korunmuştur. Çeviride gerekli yerlere sıfırlar ekledim; bunlar metnin kendisinde belirtilmemiştir."

Kısa (En) kare kenarı olan karenin alanına $1 br^2$ eklenmesiyle köşegen kare kenarı olan karenin alanıdır ([ta]-ki-il-ti-şi-li-ip-tim [ša 1 in]-na-as-sà-hu-ma SAG i-il-lu-ú)	En Kare Kenarı (İB.SI SAG)	Köşegen Kare Kenarı (İB.SI-şi-li-ip-tim)	Adı (MU.BI.IM)
$1 + (a_n/h_n)^2 = (r_n/h_n)^2$	$a_n$	$r_n$	$n$
2;0	1	1;24,51,10	0
[1;59,0,]15	1,59	2,49	1
[1;56,56,]58,14,50,6,15	56,7	3,12,1 [1,20,25]	2
[1,55,7,]41,15,33,45	1,16,41	1,50,49	3
[1;]5[3,1]0,29,32,52,16	3,31,49	5,9,1	4
[1;]48,54,1,40	1,5	1,37	5
[1;]47,6,41,40	5,19	8,1	6
[1;]43,11,56,28,26,40	38,11	59,1	7
[1;]41,33,59[45,14],3,45	13,19	20,49	8
[1;]38,33,36,36	9[8],1	12,49	9
[1;]35,10,2,28,27,24,26,40	1,22,41	2,16,1	10
[1;]33,45	45	1,15	11
[1;]29,21,54,2,15	27,59	48,49	12
[1;]27,0,3,45	7,12,1 [2,41]	4,49	13
[1;]25,48,51,35,6,40	29,31	53,49	14
[1;]23,13,46,40	56	53 [1,46]	15
...	...	...	16
1;20	1	2	17

**Tablo 12.** Resim 3'teki Plimpton 322 no'lu tabletin çevirisi. İlk sütunda satır numaraları, 2. sütunda dikdörtgenin (ya da dik üçgenin) köşegeni (hipotenüsü), 3. sütunda genişliği (tabanı) ve 4. sütunda köşegenin yüksekliğe oranının karesi olarak yazılmış ve bu sütun başında genişliğin yüksekliğe oranının karesinin 1 fazlası olarak verilmiştir, ancak sütun başındaki "1" in olduğu yerde hasar olduğundan satırlardaki "1" ler okunamamaktadır ve bu yüzden bir tartışma başlamıştır.

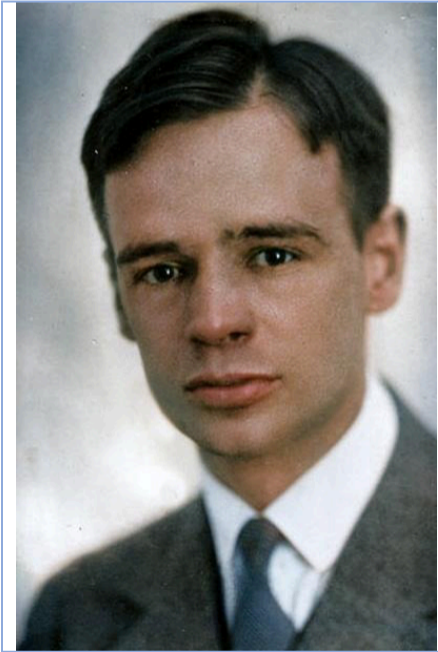
Bu tablete kazınan sayıların aynı basamaklarında yer alan 60 tabanlı Babil rakamlarının aynı sütunlara denk gelecek şekilde Tablo 12'deki gibi yazıldıkları görülmektedir. Bu bakımdan 13. Satır-4. Sütun'daki sayının kesir kısmındaki 2. basamakta "0" rakamının mevcut olduğu görülürken 1. Satır-4. Sütun'daki sayının aynı basamağında "0" rakamının bulunduğu yer tahribatlı yere denk geldiğinden, buradaki "0" rakamı okunamamaktadır. Bu nedenle tablet tahribatlı şekilde kazı sırasında çıkarıldığından tablodaki gri renkteki köşeli parantezler içinde verilen sayılar okunamamaktadır. Bunun yanı sıra kırmızı renkteki sayılar da tablet incelendikten sonra tablete hatalı bir şekilde kazındığı anlaşıldı. Bu hatalar için "taşa bu sayıları kazıyan yapmış olabilir" düşüncesi yaygındır ve düzeltilmişleri kahve renkli köşeli parantezler içinde verilmiştir. Fakat tablodaki sayıların rastgele olmayışları bu hataları düzeltmeye yetmiştir. Ayrıca tabletteki dik üçgenler (30°, 45°) aralığında yazıldıklarından, tablodaki ilk satır YBC 7289 no'lu tablet kaynaklı (45°, 45°, 90°) dik üçgenine göre ve son satır da (30°, 60°, 90°) dik üçgenine göre yazılmıştır (Bkz. "YBC 7289 No'lu Tablet").

Şimdi bu tabloyu  $(a_n, h_n, r_n)$  dik üçgenlerinin  $(p_n, q_n)$  doğuranlarına,  $a_n, h_n, r_n$  kenarlarına ve  $\theta_n$  eğim açlarına göre düzenlersek şu ilginç tabloyla karşılaşırız:

$n$	$p_n$	$q_n$	$a_n$	$h_n$	$r_n$	$\theta_n = \text{Sec}^{-1}\left(\frac{r_n}{h_n}\right)$
1	12	5	119	120	169	44° 45' 37"
2	64	27	3367	11018 [3456]	11521 [4825]	44° 15' 10"
3	75	32	4601	4800	6649	43° 47' 14"
4	125	54	12709	13500	18541	43° 16' 17"
5	9	4	65	72	97	42° 04' 30"
6	20	9	319	360	481	41° 32' 40"
7	54	25	2291	2700	3541	40° 18' 55"
8	32	15	799	960	1249	39° 46' 13"
9	25	12	541 [481]	546 [600]	769	38° 43' 05"
10	81	40	4961	6480	8161	37° 26' 14"
11	2 (60)	1 (30)	45	60	75	36° 52' 12"
12	48	25	1679	2400	2929	34° 58' 34"
13	15	8	25921 [161]	240	289	33° 51' 18"
14	50	27	1771	2700	3229	33° 15' 43"
15	9	5	56	90	53 [106]	31° 53' 27"

**Tablo 13**

Peki bu sayılar nasıl bulunmuştur ve hangi kurallara göre sıralanmışlardır?



**Resim 4. B.L. van der Waerden (1903-1996).** Yandaki Neugebauer'in çözümünü açık şekilde getirir (Bkz. "Bilimin Uyanışı", S. 79).

Bu konuda çok çeşitli tahminler mevcuttur ama tüm tahminler (O. Neugebauer ve A. Sachs, B.L. Van der Waerden, E. M. Bruins, vd.) "Babil Metodu" olarak anılan metodu göstermektedir. O halde bu metoda göre

$$[76] \quad a_n^2 + h_n^2 = r_n^2$$

eşitliğinden birbirinin tersi olan oranlar

$$a_n^2 + h_n^2 = r_n^2 \Rightarrow 1 = \frac{r_n - a_n}{h_n} \cdot \frac{r_n + a_n}{h_n} \Rightarrow \frac{a_n}{h_n} = \frac{m_n - m_n^{-1}}{2}, \frac{r_n}{h_n} = \frac{m_n + m_n^{-1}}{2}$$

eşitliklerine göre

$$[77] \quad \frac{a_n}{h_n} = \frac{m_n - m_n^{-1}}{2}, \frac{r_n}{h_n} = \frac{m_n + m_n^{-1}}{2}$$

şeklinde seçilirse problem  $\left(\frac{a_n}{h_n}, 1, \frac{r_n}{h_n}\right)$  dik üçgenlerinin inşa edilmesine dönüşür. Burada  $(p_n, q_n)$  doğuranlarına göre  $(a_n, h_n, r_n)$  dik üçgenlerinin kenarlarının uzunlukları [58]'den bulunmaktadır.

Bu metodu destekleyen bir delil Tablo 12 (13)'deki 11. satırın olduğu gibi muhafaza edilmiş olmasıdır. Eğer biraz daha ileriye gidersek, onlardan daha basit olan  $(0; 45, 1, 1; 15) = \left(\frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}\right)$  dik üçgeninin  $2p_{11}q_{11} = 4$  katı alınmış olsaydı, (3,4,5) dik üçgeni elde edilmiş olurdu!

O. Neugebauer ve A. Sachs,  $m_n$  ve  $m_n^{-1}$  oranlarının doğrudan doğruya bir "Ters Sayılar Cetveli"nden alınmış olmayıp, gerçekten  $p_n$  ve  $q_n$  sayıları basit (düzgün) sayılar olmak üzere  $m_n = \frac{p_n}{q_n} = p_n q_n^{-1}$  ve  $m_n^{-1} = \left(\frac{p_n}{q_n}\right)^{-1} = p_n^{-1} q_n$  şeklinde hesaplanmış olmaları gerektiğine işaret etmişlerdir!

#### 4.1. Dik Üçgende Metrik Bağntı: Pisagor Teoremi

Günümüzde "Pisagor Teoremi" olarak bilinen teoremin hem Eski Babil çağından kalma matematiksel ifadeler ve hesaplamalar içeren tabletlerden hem de Mısır Piramitleri'nden Pisagor'dan çok çok önceleri bilindiği ortaya çıkmıştır (Bkz. Testo 5.6, Not 5.6.13). Pisagor'un bu bağntıyı Mezopotamyalılardan öğrenerek zamanın modası nedeniyle İskenderiye'deki matematik bilen rahiplere kendi buluşu olarak anlattığı ve daha sonra İtalya'ya göç ettiğinde dostluk üzerine kurduğu tarikatta incelediği anlaşılmaktadır. Bu tarikatın inancına göre evrende her şey sayılarla idare ediliyordu ve sayılarla izah edilebilirdi. Bu yüzden ilk önce sayıları incelemeye başladılar. Fakat daha ilk adımda onları büyük bir sürpriz beklemekteydi: Dik kenarlarının uzunlukları 1 birim olan dik üçgenin hipotenüs uzunluğu

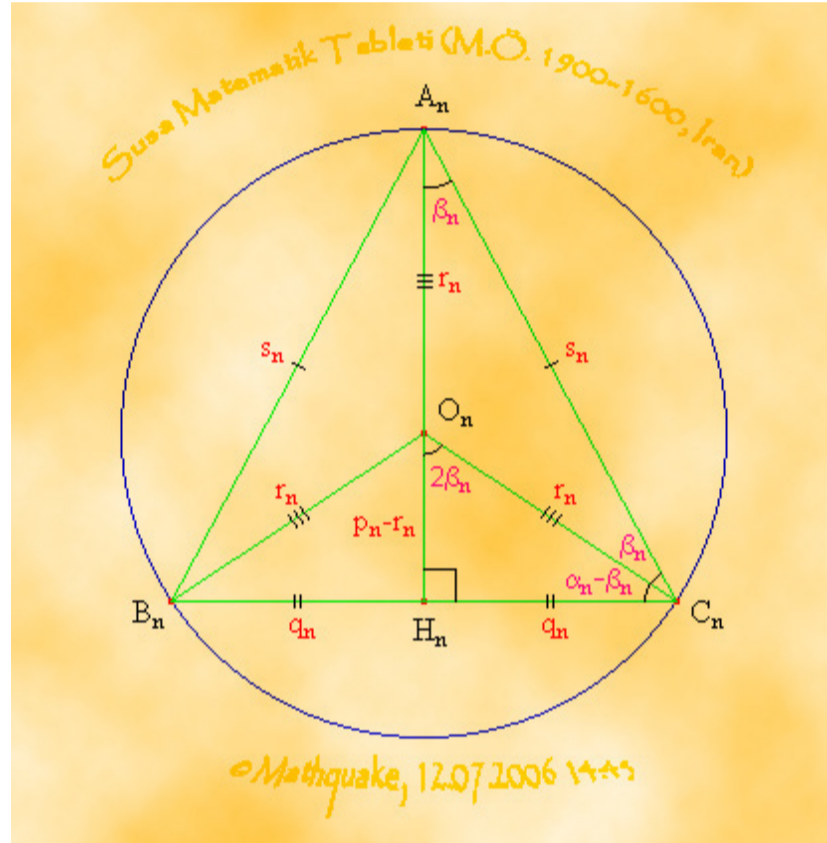
$\sqrt{2}$  birim idi ve onların sayı kavramına göre  $\sqrt{2}$  sayısı rasyonel olarak yazılamayınca, bu durum tarıkatta büyük bir heyecan yarattı. Bu olay onlarda o kadar büyük bir heyecan yarattı ki bu konu iyice anlaşılincaya kadar tarikat dışında konuşulmaması kararını aldılar!

**Plutarkos, Vitruvius** ve **Proklos**'un ifadelerine göre, "**Pisagor Teoremi**"nde alan uygulaması yöntemiyle bulunan  $\sqrt{2}$  sayısı **Pisagor**'un kişisel keşfidir ve o, bu buluşu nedeniyle bir boğa kurban etmiştir. Oysa Plimpton 322 no'lu tabletinin kardeşi YBC 7289 no'lu tablette  $\sqrt{2}$  sayısı için  $\sqrt{2} > 1; 24,51,10 = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = \frac{30547}{21600} = 1.41421(2963 \dots)$  rasyonel yaklaşıklığı verilmişti!

Şu hâlde bu sonuçlara göre Greklerin Babililer'den istifade ettikleri ve edindikleri bilgileri kendilerine mâl ettikleri sonucu çıkar!!!

Şimdi  $(a_n, h_n, r_n)$  dik üçgeninin belirlenmesinde rol oynayan  $p_n$  ve  $q_n$  parametrelerin cebirden başka geometrinin de işe karıştığı ve böylece kökeninin geometriye dayandığı gösteren bir örnek üzerinde duralım.

Babil Geometrisi'nde çok önemli bir yer teşkil eden ve Plimpton 322 no'lu tablet, YBC 7289 no'lu tablet ve Tell Dhibayi tabletiyle aynı döneme ait Susa tabletinde çevrel çemberi verilen bir ikizkenar üçgen [58]'deki çözüme şu şekilde erişilmektedir:



**Şekil 5.** Susa matematik tabletinde  $A_n B_n C_n$  ikizkenar üçgeninde  $|A_n B_n| = 50 = |A_n C_n|$  ve  $|B_n C_n| = 60$  verilmiş olup çevrel çemberin yarıçapı soruluyor (Bkz. "[New Angles on Ancient Babylonian Geometry \(Part 2\)](#)"). TMS No. 1'deki problemin çözümünü "[5.5.2009, 02:00](#)", S. 3-4 ve 8-9'dan en açık şekilde bulabilirsiniz (Bkz. "[E.M. Bruins et M. Rutten: Textes mathématiques de Suse. Ed. P.Geuthner, Paris-1961](#)". meretsegerbooks.com tarafından tanıtılan bu kitapta TMS No. 1'in tabletteki görünümü kitap kapağının altındaki 8. sayfada ve çeviri yazısı 10. sayfada yer almaktadır).

Plimpton 322 no'lu tabletindeki  $(a_n, h_n, r_n)$  sıralı üçlüsüyle belirtilen dik üçgenlerin bulunmasında kaynak olan bu şekilde dik kenar uzunlukları  $p_n$  ve  $q_n$  olan  $A_n H_n C_n$  dik üçgeni yardımıyla  $O_n H_n C_n$  dik üçgeninin elde edildiği görülmektedir. Diğer bir deyişle,  $O_n H_n C_n$  dik üçgeni  $A_n H_n C_n$  dik üçgeni tarafından doğrulanmaktadır.

Ayrıca bu tabletin, üzerinde barındırdığı şekil nedeniyle, birçok geometrik açılıma sahip olduğu anlaşılmaktadır. Örneğin "Aynı yayı gören çevre açının ölçüsü merkez açının ölçüsünün yarısıdır" bilgisine göre  $O_n H_n C_n$  dik üçgeninin tepe açısının yarısı  $A_n H_n C_n$  doğuran dik üçgeninin tepe açısıdır. Buna göre  $A_n H_n C_n$  doğuran dik üçgeninin eğim açısının ölçüsü  $\alpha_n$  ise  $O_n H_n C_n$  doğurulan dik üçgeninin eğim açısının ölçüsü  $\alpha_n - \beta_n$  olur.

Örneğin Susa tabletindeki probleme göre,  $A_n H_n C_n$  dik üçgeni  $(30,40,50) = 10(3,4,5)$  sıralı üçlüsüyle verilmişti. Buradan doğuran dik üçgenin dar açılarının ölçüleri  $\alpha_n = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \cong 53^\circ 7' 48''$  ve  $\beta_n = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \cong 90^\circ - 53^\circ 7' 48'' = 36^\circ 52' 12''$  olduğundan doğurulan  $O_n H_n C_n$  dik üçgeninin eğim açısının ölçüsü  $\alpha_n - \beta_n \cong 16^\circ 15' 37''$  olarak elde edilir ki, eğer Plimpton 322 no'lu tabletindeki dik üçgenleri bulma işlemi devam ettirilseydi, eğim açısının ölçüsü  $\alpha_n - \beta_n \cong 16^\circ 15' 37''$  olan bu dik üçgeni  $(7,24,25)$  sıralı üçlüsüyle görecektik ve bu dik üçgenin eğim açılarının ölçüleri  $(15^\circ, 30^\circ)$  arasında değişen dik üçgenlerin bulunduğu 2. paketteki son dik üçgen olarak yer alacaktı. Çünkü bu konuda yaptığımız araştırmalar bu sonucu göstermektedir.

Şu hâlde orijinal problemden hareket edersek  $O_n H_n C_n$  dik üçgeninin hipotenüs uzunluğu

$$(p_n - r_n)^2 + q_n^2 = r_n^2 \Rightarrow p_n^2 - 2p_n r_n + r_n^2 + q_n^2 = r_n^2 \Rightarrow p_n^2 + q_n^2 = 2p_n r_n \Rightarrow r_n = \frac{p_n^2 + q_n^2}{2p_n}$$

eşitliklerinden

$$[78] \quad r_n = \frac{p_n^2 + q_n^2}{2p_n}$$

olarak bulunur ve artık buradan da  $O_n H_n C_n$  dik üçgeninde hipotenüsün yüksekliğe oranı

$$[79] \quad \frac{r_n}{q_n} = \frac{p_n^2 + q_n^2}{2p_n q_n} = \frac{m_n + m_n^{-1}}{2}$$

ve tabanın yüksekliğe oranı

$$[80] \quad \frac{p_n - r_n}{q_n} = \frac{p_n^2 - q_n^2}{2p_n q_n} = \frac{m_n - m_n^{-1}}{2}$$

olarak elde edilirler. Bu formüller  $p_n$  ve  $q_n$  çifte parametresiyle ifade edilebildiği gibi,  $m_n$  eğimine bağlı tek parametreye indirgenmiş olarak da yazılabilmektedir (ki burada  $m_n$  eğimi şekildeki  $A_n H_n C_n$  dik üçgenine benzer dik üçgenlerden kolaylıkla görüleceği gibi “benzerlik katsayısı” olarak ortaya çıkmaktadır). Eski Grek geleneğinde dik üçgenlerin tek parametreliliğine göre bulunması hali **Pisagor** ve **Platon**'un adlarına bağlanmıştır.

Sonuçta Plimpton 322 no'lu tabletindeki  $(a_n, h_n, r_n)$  dik üçgenleri

$$[81] \quad (a_n, h_n, r_n) = 2p_n q_n \left( \frac{p_n^2 - q_n^2}{2p_n q_n}, 1, \frac{p_n^2 + q_n^2}{2p_n q_n} \right) = (p_n^2 - q_n^2, 2p_n q_n, p_n^2 + q_n^2)$$

eşitliğinden bulunmuş oluyorlardı ve Babilliler bu sıralı üçlüleri bulurken

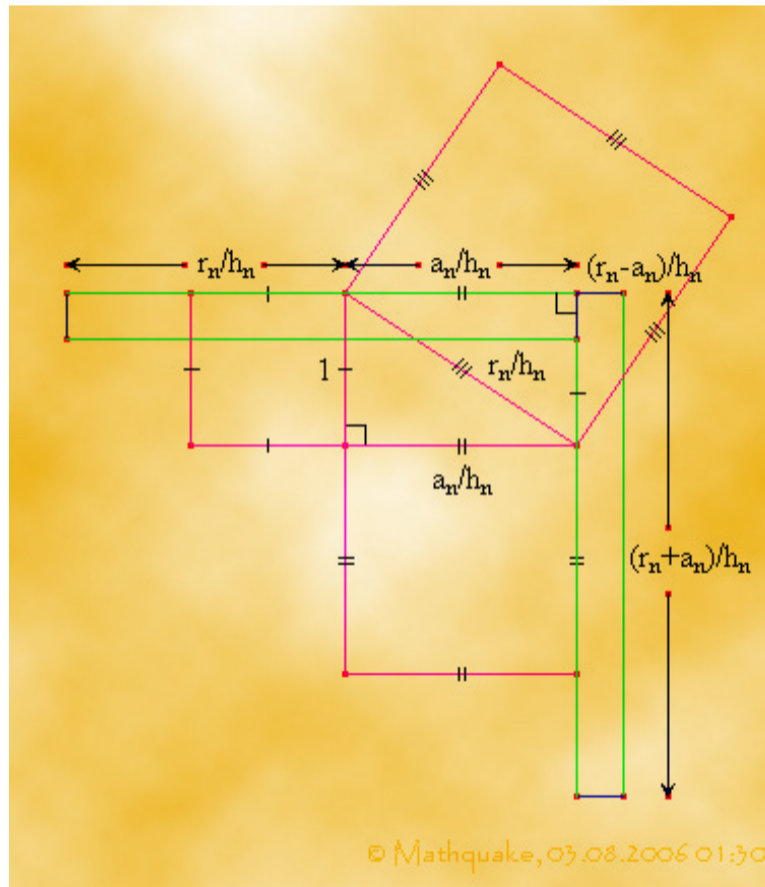
$$[82] \quad \begin{aligned} p_n^2 - q_n^2 &= (p_n - q_n)(p_n + q_n) \\ p_n^2 + q_n^2 &= (p_n + q_n)^2 - 2p_n q_n \end{aligned}$$

özdeşliklerini kullanıyorlardı. Buradaki ilk özdeşliğin bilindiğini [BM 85194](#) no'lu tabletinden çok açık bir şekilde bilmekteyiz. Aynı şekilde ikinci özdeşliğin de bilindiğine ilişkin birçok tablet mevcut olmakla birlikte (örneğin Tell Dhibayi tabletini) Tablo 12'deki 2. Satır-2. Sütun'da yapılan hatanın nasıl oluştuğunu **R. J. Gillings** keşfettikten sonra bu özdeşliğin bu tablette de kullanıldığı ortaya çıktı!

Peki  $m_n$  ve  $m_n^{-1}$  sayılarıyla  $(a_n, h_n, r_n)$  dik üçgenlerinin bulunması (Babil) metodu nereden gelmektedir?

Bu soruya yanıt için aşağıda 2 tablet örneği ele alacağız.

### 1. YBC 6967 No'lu Tabletine Göre Babil Metodunun Geometrik Yorumu.



Şekil 6

MÖ 1900-1800 tarihli olarak Larsa'da keşfedilen [YBC 6967](#) no'lu tableti, Plimpton 322 no'lu tabletindeki ilk dik üçgenin doğuranları olan  $p_1 = 12 \leftrightarrow 5 = q_1$ 'in birbirinin tersleri olduğuna dair bir metot içerir.

Yukarıdaki şekilden görüleceği gibi bu metot şu şekilde işler: Eğer  $(a_n, h_n, r_n)$  dik üçgeninin kenarlarının uzunlukları biliniyorsa,  $1 \text{ br}^2$  olan birim karenin alanına bir kenar uzunluğu  $\frac{a_n}{h_n} \text{ br}$  olan karenin alanı eklenirse,  $(\frac{a_n}{h_n}, 1, \frac{r_n}{h_n})$  dik üçgeninin hipotenüsü üzerindeki karenin alanı elde edilir ve bu karenin bir kenar uzunluğu  $\frac{r_n}{h_n} \text{ br}$  olur.

Şimdi  $\frac{r_n}{h_n} \text{ br}$  uzunluğundaki hipotenüs tepe noktası etrafında bir kez sola ve sağa doğru döndürülür ve  $(\frac{a_n}{h_n}, 1, \frac{r_n}{h_n})$  dik üçgeninin dik kenarlarına paralel hale getirilirse, alt ve üst tabanları bu dik üçgenin tabanı ile paralel olan dikdörtgenin uzun kenarı  $\frac{r_n}{h_n} + \frac{a_n}{h_n} = \frac{r_n + a_n}{h_n} \text{ br}$  ve kısa kenarı da  $\frac{r_n}{h_n} - \frac{a_n}{h_n} = \frac{r_n - a_n}{h_n} \text{ br}$  olan doğru parçası dik açı olan köşe etrafında saat yönünde (negatif yönde)  $90^\circ$  döndürülerek elde edilmiş olurlar. Söz konusu bu dikdörtgenin alanı birim karenin alanına yani  $1 \text{ br}^2$ 'ye eşittir.

Benzer şekilde bu dikdörtgenin üst tabanı dik açı olan köşe etrafında pozitif yönde  $90^\circ$  döndürülürse, tabanları bu dikdörtgene dik ve kendisine özdeş olan bir dikdörtgen daha bulunur ve böylece ters “L” şeklindeki özdeş dikdörtgenlerin uzun kenarları  $\frac{r_n + a_n}{h_n} = \frac{p_n}{q_n} = m_n$  ve kısa kenarları da  $\frac{r_n - a_n}{h_n} = \frac{q_n}{p_n} = m_n^{-1}$  olan [76] denklemindeki ters oranları verirler. Bu ise “Babil Metodu”nun bilinen en eski şeklini gösterir!



1.  $E_n, L'_n = A_n$  ise:  $\alpha_n = 45^\circ$  ve  $m_n = 1$  olduğundan  $\frac{a_n}{h_n} = \frac{m_n - m_n^{-1}}{2} = \frac{1 - 1^{-1}}{2} = 0$  ve  $\frac{r_n}{h_n} = \frac{m_n + m_n^{-1}}{2} = \frac{1 + 1^{-1}}{2} = 1$  eşitliklerinden  $(a_n, h_n, r_n) = k(0, 1, 1)$  elde edilir.
2.  $L'_n = M_n$  ise:  $\alpha_n = \tan^{-1}(\sqrt{2}) \cong 54^\circ 44' 08''$  ve  $m_n = \sqrt{2}$  olduğundan  $\frac{a_n}{h_n} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}^{-1}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$  ve  $\frac{r_n}{h_n} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}^{-1}}{2} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$  eşitliklerinden  $(a_n, h_n, r_n) = k(1, 2\sqrt{2}, 3)$  elde edilir.
3.  $L'_n = O_n$  ise:  $\alpha_n = 60^\circ$  ve  $m_n = \sqrt{3}$  olduğundan  $\frac{a_n}{h_n} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{3}^{-1}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$  ve  $\frac{r_n}{h_n} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}^{-1}}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$  eşitliklerinden  $(a_n, h_n, r_n) = k(1, \sqrt{3}, 2)$  elde edilir.
4.  $E_n = M_n$  ise:  $\alpha_n = \tan^{-1}(2) \cong 63^\circ 26' 06''$  ve  $m_n = 2$  olduğundan  $\frac{a_n}{h_n} = \frac{2 - 2^{-1}}{2} = \frac{3}{4}$  ve  $\frac{r_n}{h_n} = \frac{2 + 2^{-1}}{2} = \frac{5}{4}$  eşitliklerinden  $(a_n, h_n, r_n) = k(3, 4, 5)$  elde edilir.
5.  $E_n = O_n$  ise:  $\alpha_n = 67^\circ 30'$  ve  $m_n = 1 + \sqrt{2}$  olduğundan  $\frac{a_n}{h_n} = \frac{(\sqrt{2}+1) - (\sqrt{2}+1)^{-1}}{2} = 1$  ve  $\frac{r_n}{h_n} = \frac{(\sqrt{2}+1) + (\sqrt{2}+1)^{-1}}{2} = \sqrt{2}$  eşitliklerinden  $(a_n, h_n, r_n) = k(1, 1, \sqrt{2})$  elde edilir.
6.  $E_n, L'_n = H_n$  ise:  $\alpha_n = \tan^{-1}(\infty) \cong 90^\circ$  ve  $m_n = \infty$  olduğundan  $\frac{a_n}{h_n} = \frac{m_n}{2} = \frac{r_n}{h_n}$  eşitliklerinden  $h_n = 0$  ve  $a_n$  ile  $r_n$  sonsuz büyüklükte olarak elde edilirler.

#### 4.2. Plimpton 322 No'lu Tablet'in Matematiksel-Astronomik Çözümü

**Neugebauer** ve **Sachs**'in "[Matematiksel Çivi Yazıtları \(Mathematical Cuneiform Texts\), New Heaven, Conn., 1945](#)" kitabında dünyaya duyurulduğu andan itibaren tüm dikkatler bu tabletin çözümünün ters sayılar ile "**Babil Metodu**" kullanılarak bulunacağı yönündeydi.

Bu konuda bazı bilim adamların görüşleri özetle şöyledir:

1. **O. Neugebauer** ve **A. J. Sachs**'a göre Tablo 12'nin tertibi ve sütunlardaki sayıların hesaplanması şu şekilde olmuştur: Tablo 12'deki  $(a_n, h_n, r_n)$  dik üçgenlerinin  $p_n$  ve  $q_n$  doğuranları hesaplandıklarında, bunların "**Standart Ters Sayılar Cetvelleri**"ndeki sayılara uydukları görülmektedir. Demek ki  $(a_n, h_n, r_n)$  dik üçgenleri Babil metoduna dayanılarak ters (makûs) değerler cetvelindeki bazı sayılara göre düzenlenmiş olması ihtimali olduğu söylenebilir.

**Neugebauer**, tam sayı kenarlı dik üçgenlerin bulunmasında kullanılan bu yöntemin Helenistik çağda çok iyi bilinen bir yöntem olduğuna dikkat çeker. Babil gelenekleriyle yakın temasa açık olarak bilinen **Diofant**'ın bu yöntemi sık sık kullanmış olduğunu, Hint matematikçilerinden 9. yüzyılda yaşamış olan **Mahavira** ile 12. yüzyılda yaşamış olan **Bhaşkara**'nın da bu yönteme başvurmuş olduklarını eklemektedir.

2. **B.L. Van der Waerden** ise Tablo 12'deki sayıların hesaplanmasının şu şekilde olmuş olabileceğini tahmin eder:  $(a_n, h_n, r_n)$  dik üçgenleri Babil metoduna dayanılarak ters sayılar aracılığıyla bulunmuştur. **Van der Waerden** böyle bir yöntemin Babilliler için tipik sayılabileceğini ve bu yöntemin **Diofant** tarafından da kullanılmış olduğunu söyler.

**Neugebauer, Sachs** ve **Van der Waerden** bu tip problemlerin, Grek Aritmetiği ile, özellikle Pisagorcular'ın uğraştıkları teorik aritmetikte büyük benzerlik ve yakınlık gösterdiğine önemle işaret ederler. Demek ki burada Pisagorcular üzerinde açık ve önemli bir Babil etkisiyle karşılaşılıyor.

3. **E. M. Bruins** gerek bu tabletteki  $(a_n, h_n, r_n)$  dik üçgenlerin listesi ve gerekse bu sayıların Babilliler tarafından hesaplanma tarzları hakkında yukarıda söz konusu edilen tahminleri tamamen tatmin edici bulmaz. Ona göre hesaplama şu şekilde yapılmış olmalıdır: Tabletteki  $(a_n, h_n, r_n)$  dik üçgenler Babil metoduna dayanılarak bulunurken  $m_n$ 'nin düzgün sayılardan seçilmesi, yani  $m_n$  ile  $m_n^{-1}$ 'in "**Standart Ters Sayılar Cetvelleri**"nden alınmış olması gerekmektedir. Başka bir deyimle, **Bruins**'a göre de  $(a_n, h_n, r_n)$  dik üçgenleri bulunurken Babilliler  $m_n$ 'yi yalnızca düzgün sayılar olarak seçmekteydiler. Aynı zamanda ileri sürdüğü bu hesaplama yönteminin çivi yazılı tabletlerdeki veriler ve ayrıntılı hesaplama ile doğrulanmakta olduğunu ifade eder.

**Bruins**, ayrıca Babillilerce bilinen  $(a_n, h_n, r_n)$  sıralı üçlülerinin,  $p_n$  ile  $q_n$  tam ve düzgün sayılar olmak şartıyla, [58]'deki gibi olduğuna, hiç olmazsa bir dik kenara karşılık gelen sayının yani burada  $h_n$ 'nin "düzgün" çıktığına işaret eder. **Bruins**, burada  $(\frac{a_n}{h_n}, 1, \frac{r_n}{h_n})$  sıralı üçlüsüne karşılık gelen  $(m_n^2 - 1, 2m_n, m_n^2 + 1)$  tek parametrelili çözümün, **Proklos**'a (M.S. 410-485) göre, **Platon**'un dik üçgen kenar değerlerini bulma yöntemine denk düştüğünü ekler.

Gerçekten de yukarıdaki tüm tahminler tabletteki  $(a_n, h_n, r_n)$  dik üçgenlerinin bulunmasında önemli bir rol oynayan  $m_n$  ile  $m_n^{-1}$ 'in "**Standart Ters Sayılar Cetvelleri**"nden alınmış olmasını işaret etmektedir. Çünkü eğim açıları ( $30^\circ, 45^\circ$ ) aralığında olan  $(a_n, h_n, r_n)$  dik üçgenlerinin eğimleri

$$[83] \quad \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{2} = \frac{a_{17}}{h_{17}} < \dots < \frac{a_{15}}{h_{15}} < \frac{a_{14}}{h_{14}} < \dots < \frac{a_2}{h_2} < \frac{a_1}{h_1} < \frac{a_0}{h_0} = \frac{1}{2} = 1$$

ve bu dik üçgenleri doğuran dik üçgenlerin  $m_n = \frac{p_n}{q_n}$  eğimleri de

$$[84] \quad 1; 43, 55, 22, \dots = \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{p_{17}}{q_{17}} = m_{17} < \dots < \frac{p_{15}}{q_{15}} = m_{15} < m_{14} = \frac{p_{14}}{q_{14}} < \dots < m_2 = \frac{p_2}{q_2} < m_1 = \frac{p_1}{q_1} < m_0 = \frac{p_0}{q_0} = \frac{\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2}}{\frac{\sqrt{-1+\sqrt{2}}}{2}} = 1 + \sqrt{2} = 2; 24, 51, 10, \dots$$

olurlar.

Burada ayrıca simetri kavramı nedeniyle doğuran dik üçgenlerin tepe açılarını birer eğim açısı olarak kabul eden dik üçgenlerin  $m_n^{-1} = \frac{q_n}{p_n}$  eğimleri ise

$$[85] \quad 0; 18, 32, 27, \dots = \sqrt{2} - 1 = \frac{q_0}{p_0} = m_0^{-1} < m_1^{-1} = \frac{q_1}{p_1} < m_2^{-1} = \frac{q_2}{p_2} < \dots < m_{14}^{-1} = \frac{q_{14}}{p_{14}} < m_{15}^{-1} = \frac{q_{15}}{p_{15}} < \dots < m_{17}^{-1} = \frac{q_{17}}{p_{17}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0; 34, 38, 27, \dots$$

olarak elde edilir.

Şu hâlde [84]'e göre

$$[86] \quad m_1 = 2;24, m_5 = 2;15, m_8 = 2;8, m_9 = 2;5, m_{11} = 2;0, m_{15} = 1;48$$

ve [85]'e göre

$$[87] \quad m_1^{-1} = 0;25, m_6^{-1} = 0;27, m_{11}^{-1} = 0;30, m_{13}^{-1} = 0;32$$



elde edilen sayıları “Standart Ters Sayılar Cetvelleri”ne uygun düşmekle birlikte Tablo 13'teki  $(a_n, h_n, r_n)$  dik üçgenlerinden 7 tanesini gösterir. Oysa (cambazlığa girmeden) geriye kalan 8 dik üçgenin bulunması ve bu 15 dik üçgenin Tablo 13'teki gibi sıralanması için en azından iyi bir açıklamanın yapılması gerekirdi. Maalesef bu yapılamamıştır. Bu açıklama yapılamadığı gibi, Babil Matematiği'ni kötülemek için fırsatçılara da gün doğmuştur. Bu da tabletin çözümü için ta en başından beri aşırı benzerlikten dolayı yanılmayı ve bu yanılgı içinde maalesef geçmişte yaşanmış kötü olayları gösterir. Ajan *Smith*'in de layıkıyla belirttiği gibi, bu yol “Çıkmaz Sokak” demektir. Çünkü Plimpton 322 no'lu tabletin çözümünden hareketle şunu rahatlıkla söyleyebilirim: Bu tabletin çözümü için cebrik ve geometrik yaklaşımlar yapılabilir. Hatta buralardan elde edilecek metotlar ile çözümler de ortaya konulabilir. Ancak her şartta bu metotlardan istenilen sonuçlara ulaşılabilmesi gerekir. Bu ise Plimpton 322 no'lu tabletin çözümüne aykırı düşer. Örneğin aşağıdaki metot böyle bir metot (türünün tek örneği) olup neredeyse bu tabletin çözümü gibi gözükür!

#### 4.2.1. Çıkmaz Sokakta Karmaşık Bir Metot (*Mathquake*, İlk Aklıma Geldiği (Tahmin Ettiğim) An: 17.7.2006, 02:08:14, Tahminimin Doğrulandığı Keşif Anı: 17.7.2006, 16:04:01)

Bu metot tabletteki  $(a_n, h_n, r_n)$  dik üçgenlerini doğuran ardışık dik üçgenlerin  $m_n = \frac{p_n}{q_n}$  eğimlerinin oranlarından elde edilen ve sanki bir ipucuymuş gibi algılanan bir bilgidен hareketle ortaya çıkmıştır.

4.2.1.1. Ardışık 2 Doğuran Dik Üçgene Ait Eğimler Oranı (*Mathquake*, 09.06.2006, 21:30). Plimpton 322 no'lu tabletindeki ardışık 2 doğuran dik üçgende

$$[88] \quad m_{n,n+1} = \frac{m_n}{m_{n+1}} = \frac{\frac{p_n}{q_n}}{\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}} = \frac{p_n}{q_n} \times \left(\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right)^{-1}$$

eğimler oranı göz önüne alınırsa Tablo 13'ten şu sonuçlar elde edilir (ki  $(0^\circ, 90^\circ)$  aralığında tanjant fonksiyonu daima artan olduğundan  $m_{n+1} < m_n$  eşitsizliği geçerli olur):

$$[89] \quad \begin{aligned} M_1: m_{1,2} &= \frac{m_1}{m_2} = \frac{\frac{p_1}{q_1}}{\frac{p_2}{q_2}} = \frac{12}{5} \times \frac{27}{64} = \frac{81}{80} = m_{3,4} = m_{5,6} = m_{7,8} = m_{10,11} = m_{13,14}, \\ M_2: m_{2,3} &= \frac{m_2}{m_3} = \frac{\frac{p_2}{q_2}}{\frac{p_3}{q_3}} = \frac{64}{27} \times \frac{32}{75} = \frac{2048}{2025}, \\ M_3: m_{4,5} &= \frac{m_4}{m_5} = \frac{\frac{p_4}{q_4}}{\frac{p_5}{q_5}} = \frac{125}{54} \times \frac{4}{9} = \frac{250}{243} = m_{6,7} = m_{9,10} = m_{14,15}, \\ M_4: m_{8,9} &= \frac{m_8}{m_9} = \frac{\frac{p_8}{q_8}}{\frac{p_9}{q_9}} = \frac{32}{15} \times \frac{12}{25} = \frac{128}{125} = m_{12,13}, \\ M_5: m_{11,12} &= \frac{m_{11}}{m_{12}} = \frac{\frac{p_{11}}{q_{11}}}{\frac{p_{12}}{q_{12}}} = \frac{2}{48} \times \frac{25}{1} = \frac{25}{24}. \end{aligned}$$

Şu hâlde bu 5 sonuçla ortaya çıkan

$$[90] \quad \begin{aligned} M_1 &= \frac{81}{80} \leftrightarrow \nabla(\gamma_1) \cong 30', \\ M_2 &= \frac{2048}{2025} \leftrightarrow \nabla(\gamma_2) \cong 30', \\ M_3 &= \frac{250}{243} \leftrightarrow \nabla(\gamma_3) \cong 1^\circ 15', \\ M_4 &= \frac{128}{125} \leftrightarrow \nabla(\gamma_4) \cong 1^\circ, \\ M_5 &= \frac{25}{24} \leftrightarrow \nabla(\gamma_5) \cong 1^\circ 45' \end{aligned}$$

genel sonucu göz önüne alınırsa eğimler oranları arasındaki karakteristik ilişkiler şu şekilde ortaya çıkar:

$$\begin{aligned}
 M_1 M_2 &= \frac{81}{80} \times \frac{2048}{2025} = \frac{128}{125} = M_4 \leftrightarrow \nabla(\gamma_1 + \gamma_2) = \nabla(\gamma_1) + \nabla(\gamma_2) \cong 30' + 30' = 1^\circ \cong \nabla(\gamma_4), \\
 [91] \quad M_1 M_3 &= \frac{81}{80} \times \frac{250}{243} = \frac{25}{24} = M_5 \leftrightarrow \nabla(\gamma_1 + \gamma_3) = \nabla(\gamma_1) + \nabla(\gamma_3) \cong 30' + 1^\circ 15' = 1^\circ 45' \cong \nabla(\gamma_5), \\
 M_2 M_5 &= \frac{2048}{2025} \times \frac{25}{24} = \frac{256}{243} = \frac{250}{243} \times \frac{128}{125} = M_3 M_4 \leftrightarrow \nabla(\gamma_2 + \gamma_5) = \nabla(\gamma_2) + \nabla(\gamma_5) \\
 &\cong 30' + 1^\circ 45' = 2^\circ 15' = 1^\circ 15' + 1^\circ \cong \nabla(\gamma_3) + \nabla(\gamma_4) = \nabla(\gamma_3 + \gamma_4).
 \end{aligned}$$

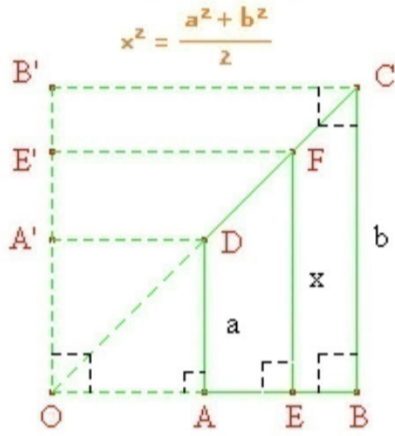
Sonuçta tüm bu sonuçlara göre Plimpton 322 no'lu tabletindeki  $M_k$  eğim oranları için şu bağıntı ortaya çıkar:

$$[92] \quad M = \prod_{k=1}^5 M_k^{n_k} \leftrightarrow \nabla(\gamma) = \sum_{k=1}^5 n_k \nabla(\gamma_k) \quad \left( n_k \in \mathbb{R}, \nabla(\gamma_k) = \tan^{-1} \left( \frac{a_k h_{k+1} - a_{k+1} h_k}{a_k a_{k+1} + h_k h_{k+1}} \right), \nabla(\gamma_k) \cong \log_{M_4}(M_k), m \cong \sqrt{M_4} \right).$$

Artık bu sonuçla esas problemimiz olan Babillilerin  $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5$  eğim oranlarına nasıl ulaştığına indirgenmiş olmaktadır. Bundan sonra ise problemin çözümü için akla gelen ilk metot ya da formül "Mesahacı Formülü" olacaktır.

#### 4.2.1.2. Mesahacı Formülü

Babillilerin Mesahacı Formülü:



Arsaların ve coğrafi bölgelerin yüzölçümleri ve çeşitli geometrik şekillerin alanlarını hesaplamak için iyi bir yaklaşım sunan mesahacı formülü, 4-genin alanı için iyi bir yaklaşıklık ve yamuk, paralelkenar, dikdörtgen ve karenin alanları için ise tam sonuç verir. Örneğin YBC 4675 no'lu tabletinde bir 4-genin alanı için mesahacı formülünün genel şeklinin kullanılmış olduğu görülmektedir. Bruins'a göre Babilliler aslında bir mesahacı (ölçüm yapan) formülündeki ilişkiden  $(a_n, h_n, r_n)$  dik üçgenlerinin bulunmasına benzer bir ilişkinin hesaplanması için de faydalanmaktaydılar.

Bir diğer Babil tabletinde ise bir yamuğun  $a$  ve  $b$  uzunluklarındaki tabanlarına paralel olan ve yamuğun alanını 2 eşit parçaya bölen kesenin yamuğun içinde kalan  $x$  uzunluğundaki parçasını veren ilginç bir formül vardır. Eğer bu formül için ABCD dik yamuğu göz önüne alınırsa, Babillilerin Analitik Geometri temelli çalışmasına geçildiğinde bu dik yamuk simetri kavramıyla kareye tamamlanarak karelerin alanlarından "Mesahacı Formülü" kolaylıkla bulunabilmektedir. Şöyle ki: ABCD dik yamuğu ve bu dik yamuğun alanını 2 eşit parçaya ayıran  $[EF]$  kesen parçası verildiğinde, ABCD dik yamuğu  $OBCB'$  karesine tamamlanırsa,  $OBCB'$  karesinin içindeki şekiller  $[OC]$  köşegenine

göre simetrik olduğundan

$$\begin{aligned}
 \text{Alan}(AEFD) &= \frac{\text{Alan}(OEFE') - \text{Alan}(OADA')}{2} = \frac{x^2 - a^2}{2} \\
 \text{Alan}(EBCF) &= \frac{\text{Alan}(OBCB') - \text{Alan}(OEFE')}{2} = \frac{b^2 - x^2}{2} \Rightarrow \text{Alan}(AEFD) = \text{Alan}(EBCF) \Rightarrow \frac{x^2 - a^2}{2} = \frac{b^2 - x^2}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}
 \end{aligned}$$

eşitliklerinden  $\text{Alan}(AEFD) = \text{Alan}(EBCF)$  nedeniyle

$$[93] \quad x^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}$$

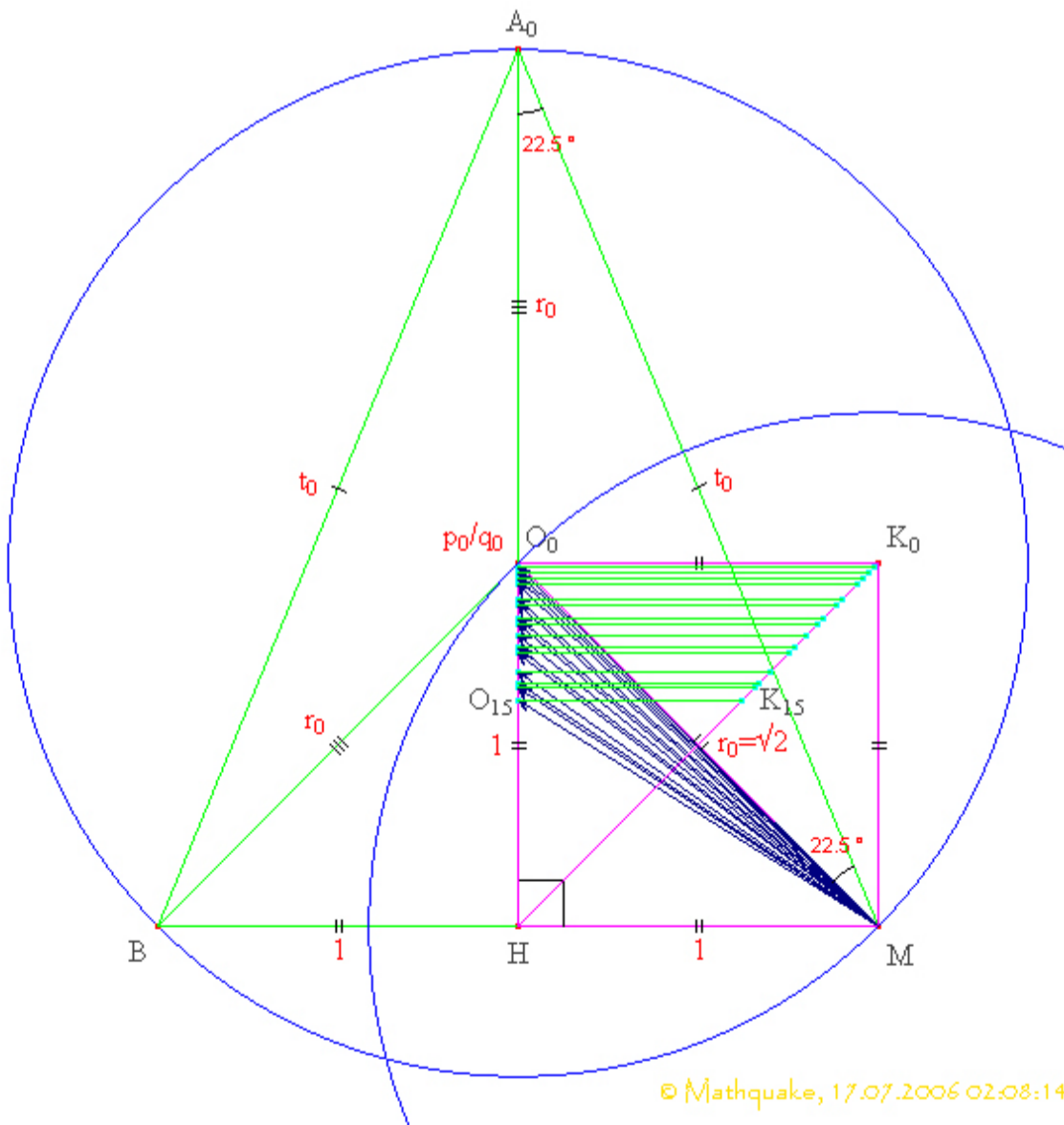
şeklinde ABCD dik yamuğundaki mesahacı formülü bulunmuş oluyordu ve buradan  $k \in \mathbb{R}^+$  için  $\text{Alan}(AEFD) = k \text{Alan}(EBCF)$  olduğundan

$$[94] \quad x^2 = \frac{a^2 + kb^2}{1 + k}$$

genel formülüne erişilmiş olunur.

Şu hâlde Plimpton 322 no'lu tabletinde yer alan dik üçgenlerinin hepsi birden Şekil 3'teki birim karenin içinde alınırsa yandaki şekil ortaya çıkar. Bu şekilde Plimpton 322 no'lu tabletindeki  $(a_n, h_n, r_n)$  sıralı üçlüer  $O_n MH$  dik üçgenleriyle gösterilmiştir. O halde  $O_n MH$  dik üçgenlerinin  $O_n$  tepe noktalarından  $O_0 H M K_0$  birim karesinin  $[HM]$  kenarına çizilen paralel doğruların  $[HK_0]$  köşegenini kestiği noktalar  $K_n$  olarak alınırsa  $H K_0 O_0$  dik üçgeni içinde  $n = 0, 1, \dots, 14$  için  $O_n O_{n+1} K_{n+1} K_n$  dik yamukları ortaya çıkar ve  $|HO_n| = \frac{a_n}{h_n} = |O_n K_n|$  için  $H O_n K_n$  ikizkenar dik üçgenleri nedeniyle  $O_n O_{n+1} K_{n+1} K_n$  ve  $O_{n+1} O_{n+2} K_{n+2} K_{n+1}$  ardışık 2 dik yamuğunun alanları için [94]'teki mesahacı formülü uygulanırsa  $\text{Alan}(O_{n+1} O_{n+2} K_{n+2} K_{n+1}) = k_n \text{Alan}(O_n O_{n+1} K_{n+1} K_n)$  olduğundan

$$[95] \quad |O_{n+1} K_{n+1}|^2 = \frac{|O_{n+2} K_{n+2}|^2 + k_n |O_n K_n|^2}{1 + k_n}$$



Şekil 8

formülü elde edilmiş olur. Bu formülde  $(a_n, h_n, r_n)$  dik üçgenleri inşaa etme metoduna göre ilk 2 dik üçgenin  $|O_n K_n|$  ve  $|O_{n+1} K_{n+1}|$  eğimleri verildiği takdirde, 3. dik üçgenin eğimi olan  $|O_{n+2} K_{n+2}|$

$$\frac{a_{n+2}}{h_{n+2}} = |O_{n+2} K_{n+2}| = \sqrt{(1+k_n)|O_{n+1} K_{n+1}|^2 - k_n |O_n K_n|^2} = \sqrt{(1+k_n) \left(\frac{a_{n+1}}{h_{n+1}}\right)^2 - k_n \left(\frac{a_n}{h_n}\right)^2}$$

eşitliklerinden

$$[96] \quad \frac{a_{n+2}}{h_{n+2}} = \sqrt{(1+k_n) \left(\frac{a_{n+1}}{h_{n+1}}\right)^2 - k_n \left(\frac{a_n}{h_n}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a_{n+1}}{h_{n+1}}\right)^2 - k_n \left(\left(\frac{a_n}{h_n}\right)^2 - \left(\frac{a_{n+1}}{h_{n+1}}\right)^2\right)} = \sqrt{\left(\frac{a_{n+1}}{h_{n+1}}\right)^2 - k_n \left(\frac{a_n}{h_n} - \frac{a_{n+1}}{h_{n+1}}\right) \left(\frac{a_n}{h_n} + \frac{a_{n+1}}{h_{n+1}}\right)}$$

şeklinde bulunmuş olur. Buradan da 3. dik üçgeni doğuran dik üçgenin  $m_{n+2}$  eğimi, [77]'den kareye tamamlama metoduyla

$$\frac{m_{n+2} - m_{n+2}^{-1}}{2} = \frac{a_{n+2}}{h_{n+2}} \Rightarrow m_{n+2}^2 - 2 \times \frac{a_{n+2}}{h_{n+2}} \times m_{n+2} - 1 = 0 \Rightarrow \left(m_{n+2} - \frac{a_{n+2}}{h_{n+2}}\right)^2 = 1 + \left(\frac{a_{n+2}}{h_{n+2}}\right)^2 \Rightarrow m_{n+2} = \frac{a_{n+2}}{h_{n+2}} + \sqrt{1 + \left(\frac{a_{n+2}}{h_{n+2}}\right)^2}$$

eşitliklerinden

$$[97] \quad m_{n+2} = \frac{a_{n+2}}{h_{n+2}} + \sqrt{1 + \left(\frac{a_{n+2}}{h_{n+2}}\right)^2} = \frac{a_{n+2}}{h_{n+2}} + \sqrt{\left(1 + \frac{a_{n+2}}{h_{n+2}}\right)^2 - 2 \times \frac{a_{n+2}}{h_{n+2}}}$$

olarak elde edilir.

Burada söz konusu olan  $k_n$  değerleri  $m_{n+2}$  için [96]'da bulunan  $\frac{a_{n+2}}{h_{n+2}}$  yaklaşık değeri için [97]'den elde edilen yaklaşık değeriyle  $m_{n+1, n+2} = \frac{m_{n+1}}{m_{n+2}}$  [89] nedeniyle [90]'daki uygun olan  $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5$  değerlerinden birinin alınmasıyla belirlenmiş olur.

Ayrıca [96]'dan  $k_n$ 'nin

$$[98] \quad k_n = \frac{\text{Tan}^2(\theta_{n+2}) - \text{Tan}^2(\theta_{n+1})}{\text{Tan}^2(\theta_{n+1}) - \text{Tan}^2(\theta_n)}$$

olması nedeniyle Tablo 13'e göre ortalama değer teoreminin geçerli olduğu

$$[99] \quad \begin{aligned} \frac{7}{5} < \sqrt{2} < \frac{\text{Tan}(\theta_{n+1}) - \text{Tan}(\theta_n)}{\theta_{n+1} - \theta_n} < 2, \\ \frac{281}{250} < \sqrt[4]{\varphi} < \frac{\text{Tan}(\theta_{n+1}) + \text{Tan}(\theta_n)}{\theta_{n+1} + \theta_n} < \sqrt{\varphi} \end{aligned}$$

ve

$$[100] \quad \begin{aligned} \frac{\text{Tan}(\theta_{n+2}) - \text{Tan}(\theta_{n+1})}{\text{Tan}(\theta_{n+1}) - \text{Tan}(\theta_n)} < \frac{\theta_{n+2} - \theta_{n+1}}{\theta_{n+1} - \theta_n} = \frac{\nabla(\theta_{n+1})}{\nabla(\theta_n)}, \\ \frac{\text{Tan}(\theta_{n+2}) + \text{Tan}(\theta_{n+1})}{\text{Tan}(\theta_{n+1}) + \text{Tan}(\theta_n)} < \frac{\theta_{n+2} + \theta_{n+1}}{\theta_{n+1} + \theta_n} < 1 \end{aligned}$$

sonuçları elde edilmektedir. O halde [98]'den

$$k_n = \frac{\text{Tan}^2(\theta_{n+2}) - \text{Tan}^2(\theta_{n+1})}{\text{Tan}^2(\theta_{n+1}) - \text{Tan}^2(\theta_n)} < \frac{\theta_{n+2}^2 - \theta_{n+1}^2}{\theta_{n+1}^2 - \theta_n^2} = \frac{\theta_{n+2} - \theta_{n+1}}{\theta_{n+1} - \theta_n} \cdot \frac{\theta_{n+2} + \theta_{n+1}}{\theta_{n+1} + \theta_n} < \frac{\nabla(\theta_{n+1})}{\nabla(\theta_n)}$$

olduğundan

$$[101] \quad k_n < \frac{\nabla(\theta_{n+1})}{\nabla(\theta_n)}$$

temel eşitsizliği söz konusu olur.

Şu hâlde Tablo 13'teki  $\theta_n$  açılara göre Babillilerin  $k_n$  katsayılar tablosu düzgün sayılarla iyi bir yaklaşım için şu şekilde olmalıydı:

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$k_n$	$\frac{25}{12}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{54}{25}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{54}{25}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{25}{8}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{54}{25}$

Tablo 14

Şimdi bu tablodan hareketle Plimpton 322 no'lu tabletindeki ilk 3 dik üçgene nasıl erişildiğini göstereceğim ama burada çok daha güç hesapların döndüğünü belirtmeden geçemeyeceğim!

1. İlk Şekil 8'e göre ilk eğimin değeri

$$[102] \quad \frac{p_1}{q_1} = m_1 < \frac{p_0}{q_0} = m_0 = 2; 24, 51, 10 = 1; 0 + 1; 24, 51, 10 \approx \overline{m_0} = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow \frac{p_1}{q_1} = m_1 = 2; 24 = 2 + \frac{24}{60} = 2 + \frac{2}{5} = \frac{12}{5}$$

olarak bulunur (ki burada  $m_1 \approx \overline{m_0} = 1 + \sqrt{2} < 1 + 1; 25 = 2; 25$  eşitsizliğine göre de  $m_1 = 2; 24$  alınabileceğine dikkat ediniz).

Burada söz konusu  $1; 24, 51, 10 \approx \sqrt{2}$  yaklaşık değeri yine 1945'te *Neugebauer* ve *Sachs* tarafından ilk kez okunan YBC 7289 no'lu tablettekinden gelir:



**Resim 5.** MÖ 1900-1600'e tarihlenen YBC 7289 no'lu tableti. Bu tabletteki karenin bir köşegeni üzerinde  $\sqrt{2}$  için çivi yazısıyla 60 tabanında 3 atmışlığı doğru olan  $1; 24, 51, 10$  ve onun altında karenin köşegen uzunluğunu gösteren  $0; 42, 25, 35$  yaklaşıkları verilmiştir (Bkz. "[YBC 7289 No'lu Tablet](#)"). Sizce *Pisagor*, kendisinden 1300 yıl önce verilen bu yaklaşıklığı görseydi kaç boğa kurban ederdi ya da tövbe edip imana mı gelirdi?

Şu hâlde  $O_0HMK_0$  birim karesinde  $|O_0H| = 1$  birim ve [77]'deki ilk eşitlikten

$$[103] \quad \begin{aligned} \frac{a_0}{h_0} &= 1; 0, \\ \frac{a_1}{h_1} &= \frac{m_1 - m_1^{-1}}{2} = \frac{2; 24 - 2; 24^{-1}}{2} = \frac{2; 24 - 0; 25}{2} = \frac{1; 59}{2} = 0; 30 \times 1; 59 = 0; 59, 30 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

2. Eğer [103]'teki değerler [96]'da yerlerine konulursalar

$$[104] \quad \begin{aligned} \frac{a_2}{h_2} &= \sqrt{\left(\frac{a_1}{h_1}\right)^2 - k_0 \left(\frac{a_0}{h_0} - \frac{a_1}{h_1}\right) \left(\frac{a_0}{h_0} + \frac{a_1}{h_1}\right)} = \sqrt{0; 59, 30^2 - \frac{25}{12} \times (1; 0 - 0; 59, 30)(1; 0 + 0; 59, 30)} = \sqrt{0; 59, 0, 15 - \frac{25}{12} \times 0; 0, 30 \times 1; 59, 30} \\ &= \sqrt{0; 56, 55, 46, 15} = 0; 58, 26, 40 \end{aligned}$$

yaklaşıklığı elde edilir ve bu yaklaşıklıkla

$$[105] \quad \begin{aligned} m_2 &= \frac{a_2}{h_2} + \sqrt{\left(1 + \frac{a_2}{h_2}\right)^2 - 2 \times \frac{a_2}{h_2}} = 0; 58, 26, 40 + \sqrt{(1 + 0; 58, 26, 40)^2 - 2 \times 0; 58, 26, 40} = 0; 58, 26, 40 + \sqrt{1; 56, 55, 45, 11, 6, 40} \\ &= 0; 58, 26, 40 + 1; 23, 45, 36 = 2; 22, 12, 16 \end{aligned}$$

elde edilen yaklaşıklığına göre

$$[106] \quad m_{1,2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{2; 24}{2; 22, 12, 16} = 1; 0, 45, 27, \dots > 1; 0, 45 = \frac{81}{80} = M_1 \Rightarrow m_2 = \frac{m_1}{M_1} = \frac{2; 24}{1; 0, 45} = 2; 22, 13, 20 = \frac{64}{27}$$

şeklinde ikinci dik üçgenin doğuranları bulunmuş olur. Buna göre ikinci dik üçgenin eğimi

$$[107] \quad \frac{a_2}{h_2} = \frac{m_2 - m_2^{-1}}{2} = \frac{2; 22, 13, 20 - 2; 22, 13, 20^{-1}}{2} = \frac{2; 24 - 0; 25, 18, 45}{2} = \frac{1; 56, 54, 35}{2} = 0; 58, 27, 17, 30$$

olarak elde edilir.

3. Şimdi [103]'teki 2. eşitlikteki ve [107]'deki değerler [96]'da yerlerine konularsa

$$[108] \quad \frac{a_3}{h_3} = \sqrt{\left(\frac{a_2}{h_2}\right)^2 - k_1 \left(\frac{a_1}{h_1} - \frac{a_2}{h_2}\right) \left(\frac{a_1}{h_1} + \frac{a_2}{h_2}\right)} = \sqrt{0; 58,27,17,30^2 - \frac{8}{9} \times (0; 59,30 - 0; 58,27,17,30)(0; 59,30 + 0; 58,27,17,30)}$$

$$= \sqrt{0; 56,56,58,14,50,6,15 - \frac{8}{9} \times 0; 1,2,42,30 \times 1; 57,57,17,30} = \sqrt{0; 55,7,23,21,21,18,28,20} = 0; 57,30,35,39,39,11,21$$

yaklaşıklığı elde edilir ve bu yaklaşıklıkla

$$[109] \quad m_3 = \frac{a_3}{h_3} + \sqrt{\left(1 + \frac{a_3}{h_3}\right)^2 - 2 \times \frac{a_3}{h_3}} = 0; 57,30,35,39,39,11,21 + \sqrt{(1 + 0; 57,30,35,39,39,11,21)^2 - 2 \times 0; 57,30,35,39,39,11,21}$$

$$= 0; 57,30,35,39,39,11,21 + \sqrt{1; 55,7,23,21,21,18,27,10,36,51,5,26,49,21} = 0; 57,30,35,39,39,11,21 + 1; 23,6,38,32,15,13 = 2; 20,37,14,11,54,24,21$$

elde edilen yaklaşıklığına göre

$$[110] \quad m_{2,3} = \frac{m_2}{m_3} = \frac{2; 22,13,20}{2; 20,37,14,11,54,24,21} = 1; 0,41,0,9, \dots > 1; 0,40,53,20 = \frac{2048}{2025} = M_2 \Rightarrow m_3 = \frac{m_2}{M_2} = \frac{2; 22,13,20}{1; 0,40,53,20} = 2; 20,37,30 = \frac{75}{32}$$

şeklinde 3. dik üçgenin doğuranları bulunur ve bu dik üçgenin eğimi de

$$[111] \quad \frac{a_3}{h_3} = \frac{m_3 - m_3^{-1}}{2} = \frac{2; 20,37,30 - 2; 20,37,30^{-1}}{2} = \frac{2; 20,37,30 - 0; 25,36}{2} = \frac{1; 55,1,30}{2} = 0; 57,30,45$$

olarak elde edilir.

**Not 4.** Eğer 3. dik üçgenin doğuranları

$$[112] \quad m_{2,3} = \frac{m_2}{m_3} = \frac{2; 22,13,20}{2; 20,37,14,11,54,24,21} = 1; 0,41,0,9, \dots < 1; 0,45 = \frac{81}{80} = M_1 \Rightarrow m_3 = \frac{m_2}{M_1} = \frac{2; 22,13,20}{1; 0,45} = 2; 20,27,59,0,44,26,40 = \frac{5120}{2187}$$

olarak alınsaydı,

$$[113] \quad \frac{a_3}{h_3} = \frac{m_3 - m_3^{-1}}{2} = \frac{2; 20,27,59,0,44,26,40 - 2; 20,27,59,0,44,26,40^{-1}}{2} = \frac{2; 20,27,59,0,44,26,40 - 0; 25,37,44,3,45}{2} = \frac{1; 54,50,14,56,59,26,40}{2} = 0; 57,25,7,28,29,43,20$$

sayısının karesinin 1 fazlasının tabletteki 3. Satır-4. Sütun'a sığmayacak kadar büyük olduğu görülecekti!

Sonuçta Plimpton 322 no'lu tabletindeki bütün  $(a_n, h_n, r_n)$  dik üçgenlerine bu şekilde ulaşmak mümkündür, fakat bu sefer de Tablo 14'deki  $k_n$  katsayılarına nasıl ulaşıldığı sorusu açıkta kalmaktadır. Söz konusu  $k_n$  katsayılarını bulma problemi en az tabletteki dik üçgenleri bulmak kadar ağır bir problemdir. Üstelik yukarıda görüldüğü üzere tabletteki dik üçgenlere ulaşabilmek için düzgün sayılarla oluşan  $M_k$  eğim oranlarıyla birlikte her adımda 2 kez karekök hesabı yapmak gerekmektedir. O halde bu metot da aranan metot olamaz. Dolayısıyla artık sana, bana veya ona göre değil hepimiz için geçerli olan Babil metodu aşağıdaki gibi ortaya çıkmaktadır. Söz konusu Babillilerin Sayılar Teorisi'ndeki bilinmeyen bu metoduna göre tabletteki dik üçgenlerin doğuranları bunu kesinlikle doğrulamaktadır. Ayrıca,

**Konu:** [Doktora Tezi](#).

**Yazar:** Manuel Benito Muñoz.

**Başlık:** [Birkaç Diofant Problemi \(Algunos problemas diofánticos\)](#) (Bkz. "[Algunos problemas diofánticos](#)"). Muñoz'un tüm makaleleri [şurada](#)dır. Bu makaleler Dialnet sayesinde hala aynı yerlerde duruyorlar ve buradaki makaleyi 27.07.2006, 23:23:34'te bilgisayarıma indirmiştim).

**Yönetici:** Dr. Juan Luis Varona Malumbres.

**Üniversite/Bölümü:** UNIVERSIDAD DE LA RIOJA, Departamento de Matemáticas y Computación.

**Yayımlandığı Yer/Yıl:** Logroño, 31 Mayıs 2002.

**Sayfa Sayısı:** 118.

çalışmasında  $(a_n, h_n, r_n)$  dik üçgenleri için  $h_n < 15000$ 'e kadar düzgün sayılarla yapılan bir araştırmada bu gerçek ortaya konmuştur. Ancak Manuel Benito Muñoz'un da bu araştırma sırasında metottaki temel gerçekten uzak olduğu sonucu çıktı. Otto Neugebauer ise "[Mathematische Keilschrift-texte \(Matematiksel Civi Yazıtları\)](#)" eserinin sonunda zamanla Babillilerde bir çeşit Elemanter Sayılar Teorisi'nin de mevcudiyetinin farkına varılacağına beklenilmesi gerektiğini, bu takdirde eski Matematik tarihçilerinin, Pisagor'a attetikleri aritmetik bilgilerin daha doğru olarak Babillilere ait olması gerektiğinin teslim edileceğini ifade etmişti. Gerçekten de bu tahmin daha sonraları keşfedilen Plimpton 322 no'lu tablet ile parlak bir şekilde doğrulanmıştır. Plimpton 322 no'lu tabletinin çözümünün Babillilerin Sayılar Teorisi'ndeki şimdiye kadar farkına varılamayan bir metotla ortaya çıkması, bu tableti 1945'de ilk kez okuyan Neugebauer ve Sachs'in ortak çalışması sonucunda çıkan tahminin tamamen anlaşılmasına neden olmuştur. Çünkü tabletteki  $(a_n, h_n, r_n)$  dik üçgenlerinin doğuranları olan  $p_n$  ve  $q_n$  sayılarının 60 tabanında sonlu olmaları nedeniyle bu sayıların "Ters Sayıların Cetvelleri"nden alınmış olduğu izlenimi verse de, gerçekte onlar bu sayıların hesaplanmış olması gerektiğine işaret etmişlerdi!

**4.2.2. Babillilerin Seçme Metodu (Mathquake, 06.08.2006 01:00).** Eğim açıları (30°, 45°) aralığında olan  $(a_n, h_n, r_n)$  dik üçgenlerini doğuran dik üçgenlerin  $m_n = \frac{p_n}{q_n}$  eğimleri arasındaki sıralama [84]'teki gibi olup,

$$[114] \quad 1 < q_n < 60$$

düzgün sayılarına göre  $k_n$  doğal sayısı için

$$[115] \quad \sqrt{3} = m_{17} < \dots < \underbrace{m_{15} < m_{14} < \dots < m_{11}}_{m_n = \frac{p_n - q_n + k_n}{q_n}} < \underbrace{m_{11}}_{m_{11} = \frac{p_{11} - 2}{q_{11}}} < \dots < m_2 < m_1 < m_0 = 1 + \sqrt{2}$$

sıralamasında  $m_{n+1}, m_n$ 'nin E.B.A.S.'ıdır (E.B.A.S. (EBAS): En Büyük Alt Sınır. EBAS dizilerdeki "ASEB" gibi de yazılabilir). Fakat burada EBAS'ın kullanımı dizilerdeki gibi değildir, çünkü burada sadece bir sıralama yapılmaktadır!

**Not 5.** Söz konusu  $(a_n, h_n, r_n)$  dik üçgenlerinin  $p_n$  ve  $q_n$  doğuranları doğrudan  $\frac{p_n}{q_n} = m_n < m_{n-1} = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$  eşitsizliğine göre de araştırılabilir. Bu durumda  $m_{n-1}$  oranı bilinmek üzere  $1 < q_n < 60$  düzgün sayılarıyla gene aynı araştırmanın yapılması gerekir!

**I. Bölüm.** İlk  $m_n$  değerinin bilinmesine ve [114]&[115]'e göre

$$[116] \quad \frac{2q + k}{q} = m \leq \frac{2q_{n+1} + k_{n+1}}{q_{n+1}} = m_{n+1} < m_n = \frac{p_n}{q_n} \Rightarrow \frac{q_n}{p_n - 2q_n} k < q < 60 \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$$

aralığın elde edilen  $p = 2q + k$  düzgün sayıları aşağıdaki tabloda siyah renkli sayılarla gösterilmiştir.

q \ k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
k	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	27	30	32	36	40	45	48	50	54
1	5	7	9	11	13	17	19	21	25	31	33	37	41	49	51	55	61	65	73	81	91	97	101	109
2	6	8	10	12	14	18	20	22	26	32	34	38	42	50	52	56	62	66	74	82	92	98	102	110
3	7	9	11	13	15	19	21	23	27	33	35	39	43	51	53	57	63	67	75	83	93	99	103	111
4	8	10	12	14	16	20	22	24	28	34	36	40	44	52	54	58	64	68	76	84	94	100	104	112
5	9	11	13	15	17	21	23	25	29	35	37	41	45	53	55	59	65	69	77	85	95	101	105	113
6	10	12	14	16	18	22	24	26	30	36	38	42	46	54	56	60	66	70	78	86	96	102	106	114
7	11	13	15	17	19	23	25	27	31	37	39	43	47	55	57	61	67	71	79	87	97	103	107	115
8	12	14	16	18	20	24	26	28	32	38	40	44	48	56	58	62	68	72	80	88	98	104	108	116
9	13	15	17	19	21	25	27	29	33	39	41	45	49	57	59	63	69	73	81	89	99	105	109	117
10	14	16	18	20	22	26	28	30	34	40	42	46	50	58	60	64	70	74	82	90	100	106	110	118
11	15	17	19	21	23	27	29	31	35	41	43	47	51	59	61	65	71	75	83	91	101	107	111	119
12	16	18	20	22	24	28	30	32	36	42	44	48	52	60	62	66	72	76	84	92	102	108	112	120
13	17	19	21	23	25	29	31	33	37	43	45	49	53	61	63	67	73	77	85	93	103	109	113	121
14	18	20	22	24	26	30	32	34	38	44	46	50	54	62	64	68	74	78	86	94	104	110	114	122
15	19	21	23	25	27	31	33	35	39	45	47	51	55	63	65	69	75	79	87	95	105	111	115	123
16	20	22	24	26	28	32	34	36	40	46	48	52	56	64	66	70	76	80	88	96	106	112	116	124
17	21	23	25	27	29	33	35	37	41	47	49	53	57	65	67	71	77	81	89	97	107	113	117	125
18	22	24	26	28	30	34	36	38	42	48	50	54	58	66	68	72	78	82	90	98	108	114	118	126
19	23	25	27	29	31	35	37	39	43	49	51	55	59	67	69	73	79	83	91	99	109	115	119	127
20	24	26	28	30	32	36	38	40	44	50	52	56	60	68	70	74	80	84	92	100	110	116	120	128

Tablo 15

1. Bu tabloya göre ilkin

$$[117] \quad \frac{2q + k}{q} = m \leq m_1 < \overline{m_0} = 1 + \sqrt{2} < 1 + 1; 25 = 2; 25 = 2 + \frac{25}{60} = \frac{29}{12} =: m_0 = \frac{p_0}{q_0} \Rightarrow 2; 24 = \frac{12}{5} k < q < 60 \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$$

aralığını elde edebilmek için  $\sqrt{2}$  için verilmiş  $1; 25 = 1 + \frac{25}{60} = \frac{17}{12}$  üst sınır değerini aldım (Bkz. "YBC 7289 No'lu Tablet", YBC 7243 (Tablo 1.3.2, S. 21), AO 6484 (Tablo 1.4.1, S. 29)). O halde  $m_0$ 'ın EBAS'ı olan  $m_1$ 'i bulabilmek için her  $k$  pozitif tam sayısı için  $q$ 'nun bulunduğu aralıktaki ilk (en küçük)  $p$  düzgün sayısını almamız yeterli olacaktır. Buna göre biricik  $p_1$  düzgün sayısı için her adımda bulunan ilk  $p$  aday düzgün sayıları şu şekilde elde edilmektedirler:

1.  $k = 1$  ise:  $3 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_3 = 4$  için  $p_3 = 2q_3 + k = 2 \times 4 + 1 = 9$ .
2.  $k = 2$  ise:  $5 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_4 = 5$  için  $p_4 = 2q_4 + k = 2 \times 5 + 2 = 12$ .
3.  $k = 3$  ise:  $8 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_9 = 12$  için  $p_9 = 2q_9 + k = 2 \times 12 + 3 = 27$ .
4.  $k = 4$  ise:  $10 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_8 = 10$  için  $p_8 = 2q_8 + k = 2 \times 10 + 4 = 24$ .
5.  $k = 5$  ise:  $15 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{13} = 20$  için  $p_{13} = 2q_{13} + k = 2 \times 20 + 5 = 45$ .
6.  $k = 6$  ise:  $15 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{10} = 15$  için  $p_{10} = 2q_{10} + k = 2 \times 15 + 6 = 36$ .

7.  $k = 7$  ise:  $18 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
8.  $k = 8$  ise:  $20 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{13} = 20$  için  $p_{13} = 2q_{13} + k = 2 \times 20 + 8 = 48$ .
9.  $k = 9$  ise:  $24 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{19} = 36$  için  $p_{19} = 2q_{19} + k = 2 \times 36 + 9 = 81$ .
10.  $k = 10$  ise:  $25 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{15} = 25$  için  $p_{15} = 2q_{15} + k = 2 \times 25 + 10 = 60$ .
11.  $k = 11$  ise:  $27 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{18} = 32$  için  $p_{18} = 2q_{18} + k = 2 \times 32 + 11 = 75$ .
12.  $k = 12$  ise:  $30 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{17} = 30$  için  $p_{17} = 2q_{17} + k = 2 \times 30 + 12 = 72$ .
13.  $k = 13$  ise:  $32 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
14.  $k = 14$  ise:  $36 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
15.  $k = 15$  ise:  $40 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
16.  $k = 16$  ise:  $40 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{20} = 40$  için  $p_{20} = 2q_{20} + k = 2 \times 40 + 16 = 96$ .
17.  $k = 17$  ise:  $45 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{24} = 54$  için  $p_{24} = 2q_{24} + k = 2 \times 54 + 17 = 125$ .
18.  $k = 18$  ise:  $45 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{21} = 45$  için  $p_{21} = 2q_{21} + k = 2 \times 45 + 18 = 108$ .
19.  $k = 19$  ise:  $48 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
20.  $k = 20$  ise:  $50 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{23} = 50$  için  $p_{23} = 2q_{23} + k = 2 \times 50 + 20 = 120$ .
21.  $k = 21$  ise:  $q = q_{24} = 54$  için  $p_{24} = 2q_{24} + k = 2 \times 54 + 21 = 129$  sayısı düzgün değildir.
22.  $k = 22$  ise:  $q = q_{24} = 54$  için  $p_{24} = 2q_{24} + k = 2 \times 54 + 22 = 130$  sayısı düzgün değildir.

Şu hâlde bulunan  $m = \frac{p}{q}$  oranları arasındaki

$$[118] \quad \frac{9}{4} \left( = \frac{27}{12} = \frac{45}{20} = \frac{81}{36} \right) < \frac{125}{54} < \frac{75}{32} < m_1 = \frac{12}{5} \left( = \frac{24}{10} = \frac{36}{15} = \frac{48}{20} = \frac{60}{25} = \frac{72}{30} = \frac{96}{40} = \frac{108}{45} = \frac{120}{50} \right) \left[ < \overline{m}_0 = 1 + \sqrt{2} < m_0 = \frac{29}{12} \right]$$

sıralaması göz önüne alınırsa

$$[119] \quad m_1 = \frac{p_1}{q_1} = \frac{12}{5}$$

şeklinde  $(a_1, h_1, r_1)$  ilk dik üçgenini doğuran dik üçgenin eğimi elde edilir.

2. İkinci olarak

$$[120] \quad \frac{2q + k}{q} = m \leq m_1 = \frac{12}{5} \Rightarrow \frac{5}{2}k < q < 60 \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$$

eşitsizliklerine göre  $m_1$ 'in EBAS'ı olan  $m_2$ 'yi bulabilmek için her  $k$  pozitif tam sayısı için yine  $q$ 'nun bulunduğu aralıktaki ilk (en küçük)  $p$  düzgün sayısını almamız yeterli olacaktır. Buna göre biricik  $p_2$  düzgün sayısı için her adımda bulunan ilk  $p$  aday düzgün sayıları şu şekilde elde edilmektedirler:

1.  $k = 1$  ise:  $3 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_3 = 4$  için  $p_3 = 2q_3 + k = 2 \times 4 + 1 = 9$ .
2.  $k = 2$  ise:  $6 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_6 = 8$  için  $p_6 = 2q_6 + k = 2 \times 8 + 2 = 18$ .
3.  $k = 3$  ise:  $8 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_9 = 12$  için  $p_9 = 2q_9 + k = 2 \times 12 + 3 = 27$ .
4.  $k = 4$  ise:  $12 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{11} = 16$  için  $p_{11} = 2q_{11} + k = 2 \times 16 + 4 = 36$ .
5.  $k = 5$  ise:  $15 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{13} = 20$  için  $p_{13} = 2q_{13} + k = 2 \times 20 + 5 = 45$ .
6.  $k = 6$  ise:  $16 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{14} = 24$  için  $p_{14} = 2q_{14} + k = 2 \times 24 + 6 = 54$ .
7.  $k = 7$  ise:  $18 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
8.  $k = 8$  ise:  $24 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{18} = 32$  için  $p_{18} = 2q_{18} + k = 2 \times 32 + 8 = 72$ .
9.  $k = 9$  ise:  $24 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{19} = 36$  için  $p_{19} = 2q_{19} + k = 2 \times 36 + 9 = 81$ .
10.  $k = 10$  ise:  $27 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{16} = 27$  için  $p_{16} = 2q_{16} + k = 2 \times 27 + 10 = 64$ .
11.  $k = 11$  ise:  $30 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{18} = 32$  için  $p_{18} = 2q_{18} + k = 2 \times 32 + 11 = 75$ .
12.  $k = 12$  ise:  $32 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{22} = 48$  için  $p_{22} = 2q_{22} + k = 2 \times 48 + 12 = 108$ .
13.  $k = 13$  ise:  $36 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
14.  $k = 14$  ise:  $36 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
15.  $k = 15$  ise:  $40 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
16.  $k = 16$  ise:  $45 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
17.  $k = 17$  ise:  $45 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{24} = 54$  için  $p_{24} = 2q_{24} + k = 2 \times 54 + 17 = 125$ .
18.  $k = 18$  ise:  $48 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
19.  $k = 19$  ise:  $48 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
20.  $k = 20$  ise:  $q = q_{24} = 54$  için  $p_{24} = 2q_{24} + k = 2 \times 54 + 20 = 128$ .
21.  $k = 21$  ise:  $q = q_{24} = 54$  için  $p_{24} = 2q_{24} + k = 2 \times 54 + 21 = 129$  sayısı düzgün değildir.

Şu hâlde bulunan  $m = \frac{p}{q}$  oranları arasındaki

$$[121] \quad \frac{9}{4} \left( = \frac{18}{8} = \frac{27}{12} = \frac{36}{16} = \frac{45}{20} = \frac{54}{24} = \frac{72}{32} = \frac{81}{36} = \frac{108}{48} \right) < \frac{125}{54} < \frac{75}{32} < m_2 = \frac{64}{27} \left( = \frac{128}{54} \right) \left[ < m_1 = \frac{12}{5} \right]$$

sıralaması göz önüne alınırsa

$$[122] \quad m_2 = \frac{p_2}{q_2} = \frac{64}{27}$$

şeklinde  $(a_2, h_2, r_2)$  ikinci dik üçgenini doğuran dik üçgenin eğimi elde edilir.

3. Üçüncü olarak da

$$[123] \quad \frac{2q+k}{q} = m \leq m_2 = \frac{64}{27} \Rightarrow \frac{27}{10}k < q < 60 \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$$

eşitsizliklerine göre  $m_2$ 'nin EBAS'ı olan  $m_3$  için yine  $q$ 'nun bulunduğu aralıktaki ilk (en küçük)  $p$  düzgün sayısını almamız yeterlidir. Buna göre biricik  $p_3$  düzgün sayısı için her adımda bulunan ilk  $p$  aday düzgün sayıları şu şekilde elde edilmektedirler:

1.  $k = 1$  ise:  $3 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_3 = 4$  için  $p_3 = 2q_3 + k = 2 \times 4 + 1 = 9$ .
2.  $k = 2$  ise:  $6 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_6 = 8$  için  $p_6 = 2q_6 + k = 2 \times 8 + 2 = 18$ .
3.  $k = 3$  ise:  $9 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_9 = 12$  için  $p_9 = 2q_9 + k = 2 \times 12 + 3 = 27$ .
4.  $k = 4$  ise:  $12 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{11} = 16$  için  $p_{11} = 2q_{11} + k = 2 \times 16 + 4 = 36$ .
5.  $k = 5$  ise:  $15 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{13} = 20$  için  $p_{13} = 2q_{13} + k = 2 \times 20 + 5 = 45$ .
6.  $k = 6$  ise:  $18 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{14} = 24$  için  $p_{14} = 2q_{14} + k = 2 \times 24 + 6 = 54$ .
7.  $k = 7$  ise:  $20 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
8.  $k = 8$  ise:  $24 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{18} = 32$  için  $p_{18} = 2q_{18} + k = 2 \times 32 + 8 = 72$ .
9.  $k = 9$  ise:  $25 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{19} = 36$  için  $p_{19} = 2q_{19} + k = 2 \times 36 + 9 = 81$ .
10.  $k = 10$  ise:  $30 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{20} = 40$  için  $p_{20} = 2q_{20} + k = 2 \times 40 + 10 = 90$ .
11.  $k = 11$  ise:  $30 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{18} = 32$  için  $p_{18} = 2q_{18} + k = 2 \times 32 + 11 = 75$ .
12.  $k = 12$  ise:  $36 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{22} = 48$  için  $p_{22} = 2q_{22} + k = 2 \times 48 + 12 = 108$ .
13.  $k = 13$  ise:  $36 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
14.  $k = 14$  ise:  $40 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
15.  $k = 15$  ise:  $45 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
16.  $k = 16$  ise:  $45 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
17.  $k = 17$  ise:  $48 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{24} = 54$  için  $p_{24} = 2q_{24} + k = 2 \times 54 + 17 = 125$ .
18.  $k = 18$  ise:  $50 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
19.  $k = 19$  ise:  $q = q_{24} = 54$  için düzgün  $p$  sayısı yok.

Şu hâlde bulunan  $m = \frac{p}{q}$  oranları arasındaki

$$[124] \quad \frac{9}{4} \left( = \frac{18}{8} = \frac{27}{12} = \frac{36}{16} = \frac{45}{20} = \frac{54}{24} = \frac{72}{32} = \frac{81}{36} = \frac{90}{40} = \frac{108}{48} \right) < \frac{125}{54} < m_3 = \frac{75}{32} \left[ < m_2 = \frac{64}{27} \right]$$

sıralaması göz önüne alınırsa

$$[125] \quad m_3 = \frac{p_3}{q_3} = \frac{75}{32}$$

şeklinde  $(a_3, h_3, r_3)$  üçüncü dik üçgenini doğuran dik üçgenin eğimi elde edilir.

4. Dördüncü olarak

$$[126] \quad \frac{2q+k}{q} = m \leq m_3 = \frac{75}{32} \Rightarrow \frac{32}{11}k < q < 60 \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$$

eşitsizliklerine göre  $m_3$ 'ün EBAS'ı olan  $m_4$  için yine  $q$ 'nun bulunduğu aralıktaki ilk (en küçük)  $p$  düzgün sayısını almamız yeterlidir. Buna göre biricik  $p_4$  düzgün sayısı için her adımda bulunan ilk  $p$  aday düzgün sayıları şu şekilde elde edilmektedirler:

1.  $k = 1$  ise:  $3 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_3 = 4$  için  $p_3 = 2q_3 + k = 2 \times 4 + 1 = 9$ .
2.  $k = 2$  ise:  $6 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_6 = 8$  için  $p_6 = 2q_6 + k = 2 \times 8 + 2 = 18$ .
3.  $k = 3$  ise:  $9 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_9 = 12$  için  $p_9 = 2q_9 + k = 2 \times 12 + 3 = 27$ .
4.  $k = 4$  ise:  $12 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{11} = 16$  için  $p_{11} = 2q_{11} + k = 2 \times 16 + 4 = 36$ .
5.  $k = 5$  ise:  $15 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{13} = 20$  için  $p_{13} = 2q_{13} + k = 2 \times 20 + 5 = 45$ .
6.  $k = 6$  ise:  $18 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{14} = 24$  için  $p_{14} = 2q_{14} + k = 2 \times 24 + 6 = 54$ .
7.  $k = 7$  ise:  $24 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
8.  $k = 8$  ise:  $24 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{18} = 32$  için  $p_{18} = 2q_{18} + k = 2 \times 32 + 8 = 72$ .
9.  $k = 9$  ise:  $27 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{19} = 36$  için  $p_{19} = 2q_{19} + k = 2 \times 36 + 9 = 81$ .
10.  $k = 10$  ise:  $30 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{20} = 40$  için  $p_{20} = 2q_{20} + k = 2 \times 40 + 10 = 90$ .
11.  $k = 11$  ise:  $36 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
12.  $k = 12$  ise:  $36 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{22} = 48$  için  $p_{22} = 2q_{22} + k = 2 \times 48 + 12 = 108$ .
13.  $k = 13$  ise:  $40 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
14.  $k = 14$  ise:  $45 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
15.  $k = 15$  ise:  $45 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
16.  $k = 16$  ise:  $48 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
17.  $k = 17$  ise:  $50 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{24} = 54$  için  $p_{24} = 2q_{24} + k = 2 \times 54 + 17 = 125$ .
18.  $k = 18$  ise:  $q = q_{24} = 54$  için düzgün  $p$  sayısı yok.

Şu hâlde bulunan  $m = \frac{p}{q}$  oranları arasındaki

$$[127] \quad \frac{9}{4} \left( = \frac{18}{8} = \frac{27}{12} = \frac{36}{16} = \frac{45}{20} = \frac{54}{24} = \frac{72}{32} = \frac{81}{36} = \frac{90}{40} = \frac{108}{48} \right) < m_4 = \frac{125}{54} \left[ < m_3 = \frac{75}{32} \right]$$

sıralaması göz önüne alınırsa  $(a_4, h_4, r_4)$  dik üçgenini doğuran dik üçgenin eğimi şu şekilde ortaya çıkar:

$$[128] \quad m_4 = \frac{p_4}{q_4} = \frac{125}{54}.$$

5. Beşinci olarak

$$[129] \quad \frac{2q+k}{q} = m \leq m_4 = \frac{125}{54} \Rightarrow \frac{54}{17}k < q < 60 \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$$

eşitsizliklerine göre  $m_4$ 'ün EBAS'ı olan  $m_5$  için yine  $q$ 'nun bulunduğu aralıktaki ilk (en küçük)  $p$  düzgün sayısını almamız yeterlidir. Buna göre biricik  $p_5$  düzgün sayısı için her adımda bulunan ilk  $p$  aday düzgün sayıları şu şekilde elde edilmektedirler:

1.  $k = 1$  ise:  $4 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_3 = 4$  için  $p_3 = 2q_3 + k = 2 \times 4 + 1 = 9$ .
2.  $k = 2$  ise:  $8 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_6 = 8$  için  $p_6 = 2q_6 + k = 2 \times 8 + 2 = 18$ .
3.  $k = 3$  ise:  $10 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_9 = 12$  için  $p_9 = 2q_9 + k = 2 \times 12 + 3 = 27$ .
4.  $k = 4$  ise:  $15 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{11} = 16$  için  $p_{11} = 2q_{11} + k = 2 \times 16 + 4 = 36$ .
5.  $k = 5$  ise:  $16 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{13} = 20$  için  $p_{13} = 2q_{13} + k = 2 \times 20 + 5 = 45$ .
6.  $k = 6$  ise:  $20 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{14} = 24$  için  $p_{14} = 2q_{14} + k = 2 \times 24 + 6 = 54$ .
7.  $k = 7$  ise:  $24 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
8.  $k = 8$  ise:  $27 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{18} = 32$  için  $p_{18} = 2q_{18} + k = 2 \times 32 + 8 = 72$ .
9.  $k = 9$  ise:  $30 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{19} = 36$  için  $p_{19} = 2q_{19} + k = 2 \times 36 + 9 = 81$ .
10.  $k = 10$  ise:  $32 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{20} = 40$  için  $p_{20} = 2q_{20} + k = 2 \times 40 + 10 = 90$ .
11.  $k = 11$  ise:  $36 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
12.  $k = 12$  ise:  $40 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{22} = 48$  için  $p_{22} = 2q_{22} + k = 2 \times 48 + 12 = 108$ .
13.  $k = 13$  ise:  $45 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
14.  $k = 14$  ise:  $45 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
15.  $k = 15$  ise:  $48 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
16.  $k = 16$  ise:  $q = q_{24} = 54$  için düzgün  $p$  sayısı yok.

Şu hâlde bulunan  $m = \frac{p}{q}$  oranları arasındaki

$$[130] \quad m_5 = \frac{9}{4} \left( = \frac{18}{8} = \frac{27}{12} = \frac{36}{16} = \frac{45}{20} = \frac{54}{24} = \frac{72}{32} = \frac{81}{36} = \frac{90}{40} = \frac{108}{48} \right) \left[ < m_4 = \frac{125}{54} \right]$$

sıralaması göz önüne alınırsa  $(a_5, h_5, r_5)$  dik üçgenini doğuran dik üçgenin eğimi şöyle edilmiş olur:

$$[131] \quad m_5 = \frac{p_5}{q_5} = \frac{9}{4}.$$

6. Altıncı olarak

$$[132] \quad \frac{2q+k}{q} = m \leq m_5 = \frac{9}{4} \Rightarrow 4k < q < 60 \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$$

eşitsizliklerine göre  $m_5$ 'in EBAS'ı olan  $m_6$  için yine  $q$ 'nun bulunduğu aralıktaki ilk (en küçük)  $p$  düzgün sayısını almamız yeterlidir. Buna göre biricik  $p_6$  düzgün sayısı için her adımda bulunan ilk  $p$  aday düzgün sayıları şu şekilde elde edilmektedirler:

1.  $k = 1$  ise:  $5 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_9 = 12$  için  $p_9 = 2q_9 + k = 2 \times 12 + 1 = 25$ .
2.  $k = 2$  ise:  $9 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_7 = 9$  için  $p_7 = 2q_7 + k = 2 \times 9 + 2 = 20$ .
3.  $k = 3$  ise:  $15 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{19} = 36$  için  $p_{19} = 2q_{19} + k = 2 \times 36 + 3 = 75$ .
4.  $k = 4$  ise:  $18 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{12} = 18$  için  $p_{12} = 2q_{12} + k = 2 \times 18 + 4 = 40$ .
5.  $k = 5$  ise:  $24 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
6.  $k = 6$  ise:  $25 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{16} = 27$  için  $p_{16} = 2q_{16} + k = 2 \times 27 + 6 = 60$ .
7.  $k = 7$  ise:  $30 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
8.  $k = 8$  ise:  $36 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{19} = 36$  için  $p_{19} = 2q_{19} + k = 2 \times 36 + 8 = 80$ .
9.  $k = 9$  ise:  $40 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
10.  $k = 10$  ise:  $45 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{21} = 45$  için  $p_{21} = 2q_{21} + k = 2 \times 45 + 10 = 100$ .
11.  $k = 11$  ise:  $45 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
12.  $k = 12$  ise:  $50 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{24} = 54$  için  $p_{24} = 2q_{24} + k = 2 \times 54 + 12 = 120$ .
13.  $k = 13$  ise:  $q = q_{24} = 54$  için düzgün  $p$  sayısı yok.

Şu hâlde bulunan  $m = \frac{p}{q}$  oranları arasındaki

$$[133] \quad \frac{25}{12} \left( = \frac{75}{36} \right) < m_6 = \frac{20}{9} \left( = \frac{40}{18} = \frac{60}{27} = \frac{80}{36} = \frac{100}{45} = \frac{120}{54} \right) \left[ < m_5 = \frac{9}{4} \right]$$

sıralaması göz önüne alınırsa  $(a_6, h_6, r_6)$  dik üçgenini doğuran dik üçgenin eğimi şu olur:

$$[134] \quad m_6 = \frac{p_6}{q_6} = \frac{20}{9}$$

7. Yedinci olarak

$$[135] \quad \frac{2q+k}{q} = m \leq m_6 = \frac{20}{9} \Rightarrow \frac{9}{2}k < q < 60 \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$$

eşitsizliklerine göre  $m_6$ 'nın EBAS'ı olan  $m_7$  için yine  $q$ 'nun bulunduğu aralıktaki ilk (en küçük)  $p$  düzgün sayısını almamız yeterlidir. Buna göre biricik  $p_7$  düzgün sayısı için her adımda bulunan ilk  $p$  aday düzgün sayıları şu şekilde elde edilmektedirler:

1.  $k = 1$  ise:  $5 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_9 = 12$  için  $p_9 = 2q_9 + k = 2 \times 12 + 1 = 25$ .
2.  $k = 2$  ise:  $10 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{10} = 15$  için  $p_{10} = 2q_{10} + k = 2 \times 15 + 2 = 32$ .
3.  $k = 3$  ise:  $15 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{19} = 36$  için  $p_{19} = 2q_{19} + k = 2 \times 36 + 3 = 75$ .
4.  $k = 4$  ise:  $20 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{15} = 25$  için  $p_{15} = 2q_{15} + k = 2 \times 25 + 4 = 54$ .
5.  $k = 5$  ise:  $24 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
6.  $k = 6$  ise:  $30 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{21} = 45$  için  $p_{21} = 2q_{21} + k = 2 \times 45 + 6 = 96$ .
7.  $k = 7$  ise:  $32 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
8.  $k = 8$  ise:  $40 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{23} = 50$  için  $p_{23} = 2q_{23} + k = 2 \times 50 + 8 = 108$ .
9.  $k = 9$  ise:  $45 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
10.  $k = 10$  ise:  $48 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
11.  $k = 11$  ise:  $50 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.

Şu hâlde bulunan  $m = \frac{p}{q}$  oranları arasındaki

$$[136] \quad \frac{25}{12} \left( = \frac{75}{36} \right) < \frac{32}{15} \left( = \frac{96}{45} \right) < m_7 = \frac{54}{25} \left( = \frac{108}{50} \right) \left[ < m_6 = \frac{20}{9} \right]$$

sıralaması göz önüne alınırsa  $(a_7, h_7, r_7)$  dik üçgenini doğuran dik üçgenin eğimi şöyle olur:

$$[137] \quad m_7 = \frac{p_7}{q_7} = \frac{54}{25}$$

8. Sekizinci olarak

$$[138] \quad \frac{2q+k}{q} = m \leq m_7 = \frac{54}{25} \Rightarrow \frac{25}{4}k < q < 60 \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$$

eşitsizliklerine göre  $m_7$ 'nin EBAS'ı olan  $m_8$  için yine  $q$ 'nun bulunduğu aralıktaki ilk (en küçük)  $p$  düzgün sayısını almamız yeterlidir. Buna göre biricik  $p_8$  düzgün sayısı için her adımda bulunan ilk  $p$  aday düzgün sayıları şu şekilde elde edilmektedirler:

1.  $k = 1$  ise:  $8 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_9 = 12$  için  $p_9 = 2q_9 + k = 2 \times 12 + 1 = 25$ .
2.  $k = 2$  ise:  $15 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{10} = 15$  için  $p_{10} = 2q_{10} + k = 2 \times 15 + 2 = 32$ .
3.  $k = 3$  ise:  $20 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{19} = 36$  için  $p_{19} = 2q_{19} + k = 2 \times 36 + 3 = 75$ .
4.  $k = 4$  ise:  $27 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{17} = 30$  için  $p_{17} = 2q_{17} + k = 2 \times 30 + 4 = 64$ .
5.  $k = 5$  ise:  $32 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
6.  $k = 6$  ise:  $40 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{21} = 45$  için  $p_{21} = 2q_{21} + k = 2 \times 45 + 6 = 96$ .
7.  $k = 7$  ise:  $45 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
8.  $k = 8$  ise:  $q = q_{24} = 54$  için düzgün  $p$  sayısı yok.

Şu hâlde bulunan  $m = \frac{p}{q}$  oranları arasındaki

$$[139] \quad \frac{25}{12} \left( = \frac{75}{36} \right) < m_8 = \frac{32}{15} \left( = \frac{64}{30} = \frac{96}{45} \right) \left[ < m_7 = \frac{54}{25} \right]$$

sıralaması göz önüne alınırsa  $(a_8, h_8, r_8)$  dik üçgenini doğuran dik üçgenin eğimi şöyle elde edilir:

$$[140] \quad m_8 = \frac{p_8}{q_8} = \frac{32}{15}$$

9. Dokuzuncu olarak

$$[141] \quad \frac{2q+k}{q} = m \leq m_8 = \frac{32}{15} \Rightarrow \frac{15}{2}k < q < 60 \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$$

eşitsizliklerine göre  $m_8$ 'in EBAS'ı olan  $m_9$  için yine  $q$ 'nun bulunduğu aralıktaki ilk (en küçük)  $p$  düzgün sayısını almamız yeterlidir. Buna göre biricik  $p_9$  düzgün sayısı için her adımda bulunan ilk  $p$  aday düzgün sayıları şu şekilde elde edilmektedirler:

1.  $k = 1$  ise:  $8 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_9 = 12$  için  $p_9 = 2q_9 + k = 2 \times 12 + 1 = 25$ .
2.  $k = 2$  ise:  $16 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{14} = 24$  için  $p_{14} = 2q_{14} + k = 2 \times 24 + 2 = 50$ .
3.  $k = 3$  ise:  $24 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{19} = 36$  için  $p_{19} = 2q_{19} + k = 2 \times 36 + 3 = 75$ .
4.  $k = 4$  ise:  $32 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{22} = 48$  için  $p_{22} = 2q_{22} + k = 2 \times 48 + 4 = 100$ .
5.  $k = 5$  ise:  $40 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
6.  $k = 6$  ise:  $48 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
7.  $k = 7$  ise:  $q = q_{24} = 54$  için düzgün  $p$  sayısı yok.

Şu hâlde bulunan  $m = \frac{p}{q}$  oranları arasındaki

$$[142] \quad m_9 = \frac{25}{12} \left( = \frac{50}{24} = \frac{75}{36} = \frac{100}{48} \right) \left[ < m_8 = \frac{32}{15} \right]$$

sıralaması göz önüne alınırsa  $(a_9, h_9, r_9)$  dik üçgenini doğuran dik üçgenin eğimi şu şekilde ortaya çıkar:

$$[143] \quad m_9 = \frac{p_9}{q_9} = \frac{25}{12}$$

10. Onuncu olarak

$$[144] \quad \frac{2q + k}{q} = m \leq m_9 = \frac{25}{12} \Rightarrow 12k < q < 60 \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$$

eşitsizliklerine göre  $m_9$ 'un EBAS'ı olan  $m_{10}$  için yine  $q$ 'nun bulunduğu aralıktaki ilk (en küçük)  $p$  düzgün sayısını almamız yeterlidir. Buna göre biricik  $p_{10}$  düzgün sayısı için her adımda bulunan ilk  $p$  aday düzgün sayıları şu şekilde elde edilmektedirler:

1.  $k = 1$  ise:  $15 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{20} = 40$  için  $p_{20} = 2q_{20} + k = 2 \times 40 + 1 = 81$ .
2.  $k = 2$  ise:  $25 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
3.  $k = 3$  ise:  $40 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
4.  $k = 4$  ise:  $50 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.

Şu hâlde bulunan  $m = \frac{p}{q}$  oranları arasındaki

$$[145] \quad m_{10} = \frac{81}{40} \left[ < m_9 = \frac{25}{12} \right]$$

sıralaması göz önüne alınırsa  $(a_{10}, h_{10}, r_{10})$  dik üçgenini doğuran dik üçgenin eğimi şu olur:

$$[146] \quad m_{10} = \frac{p_{10}}{q_{10}} = \frac{81}{40}$$

11. Onbirinci olarak

$$[147] \quad \frac{2q + k}{q} = m \leq m_{10} = \frac{81}{40} \Rightarrow 40k < q < 60 \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$$

eşitsizliklerine göre  $m_{10}$ 'un EBAS'ı olan  $m_{11}$  için yine  $q$ 'nun bulunduğu aralıktaki ilk (en küçük)  $p$  düzgün sayısını almamız yeterlidir. Buna göre biricik  $p_{11}$  düzgün sayısı için her adımda bulunan ilk  $p$  aday düzgün sayıları şu şekilde elde edilmektedirler:

1.  $k = 1$  ise:  $45 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok!

Şu hâlde zorunlu olarak

$$[148] \quad m_{11} = 2 < m_{10} = \frac{81}{40}$$

sıralaması göz önüne alınırsa  $(a_{11}, h_{11}, r_{11})$  dik üçgenini doğuran dik üçgenin eğimi şu şekilde olur:

$$[149] \quad m_{11} = \frac{p_{11}}{q_{11}} = 2.$$

**II. Bölüm.** Yine ilk  $m_n$  değerinin bilinmesine ve [114]&[115]'e göre

$$[150] \quad m_{40} = 1 < m_{17} = \sqrt{3} < \frac{p}{q} = m < m_{11} = 2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{p}{q} < 2 \Rightarrow p < 2q \Rightarrow p = 2q - k \quad (k \in \mathbb{Z}^+) \\ 1 < \frac{p}{q} \Rightarrow q < p \Rightarrow p = q + k \quad (k \in \mathbb{Z}^+) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{q + k}{q} = m \leq \frac{2q_{n+1} + k_{n+1}}{q_{n+1}} = m_{n+1} < m_n = \frac{p_n}{q_n} \Rightarrow \frac{q_n}{p_n - q_n} k < q < 60 \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$$

aralığından elde edilen  $p = q + k$  düzgün sayıları aşağıdaki tabloda siyah renkli sayılarla gösterilmiştir.

$q \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	27	30	32	36	40	45	48	50	54
1	3	4	5	6	7	9	10	11	13	16	17	19	21	25	26	28	31	33	37	41	46	49	51	55
2	4	5	6	7	8	10	11	12	14	17	18	20	22	26	27	29	32	34	38	42	47	50	52	56
3	5	6	7	8	9	11	12	13	15	18	19	21	23	27	28	30	33	35	39	43	48	51	53	57
4	6	7	8	9	10	12	13	14	16	19	20	22	24	28	29	31	34	36	40	44	49	52	54	58
5	7	8	9	10	11	13	14	15	17	20	21	23	25	29	30	32	35	37	41	45	50	53	55	59
6	8	9	10	11	12	14	15	16	18	21	22	24	26	30	31	33	36	38	42	46	51	54	56	60
7	9	10	11	12	13	15	16	17	19	22	23	25	27	31	32	34	37	39	43	47	52	55	57	61
8	10	11	12	13	14	16	17	18	20	23	24	26	28	32	33	35	38	40	44	48	53	56	58	62
9	11	12	13	14	15	17	18	19	21	24	25	27	29	33	34	36	39	41	45	49	54	57	59	63
10	12	13	14	15	16	18	19	20	22	25	26	28	30	34	35	37	40	42	46	50	55	58	60	64
11	13	14	15	16	17	19	20	21	23	26	27	29	31	35	36	38	41	43	47	51	56	59	61	65
12	14	15	16	17	18	20	21	22	24	27	28	30	32	36	37	39	42	44	48	52	57	60	62	66
13	15	16	17	18	19	21	22	23	25	28	29	31	33	37	38	40	43	45	49	53	58	61	63	67
14	16	17	18	19	20	22	23	24	26	29	30	32	34	38	39	41	44	46	50	54	59	62	64	68
15	17	18	19	20	21	23	24	25	27	30	31	33	35	39	40	42	45	47	51	55	60	63	65	69
16	18	19	20	21	22	24	25	26	28	31	32	34	36	40	41	43	46	48	52	56	61	64	66	70
17	19	20	21	22	23	25	26	27	29	32	33	35	37	41	42	44	47	49	53	57	62	65	67	71
18	20	21	22	23	24	26	27	28	30	33	34	36	38	42	43	45	48	50	54	58	63	66	68	72
19	21	22	23	24	25	27	28	29	31	34	35	37	39	43	44	46	49	51	55	59	64	67	69	73
20	22	23	24	25	26	28	29	30	32	35	36	38	40	44	45	47	50	52	56	60	65	68	70	74
21	23	24	25	26	27	29	30	31	33	36	37	39	41	45	46	48	51	53	57	61	66	69	71	75
22	24	25	26	27	28	30	31	32	34	37	38	40	42	46	47	49	52	54	58	62	67	70	72	76
23	25	26	27	28	29	31	32	33	35	38	39	41	43	47	48	50	53	55	59	63	68	71	73	77
24	26	27	28	29	30	32	33	34	36	39	40	42	44	48	49	51	54	56	60	64	69	72	74	78
25	27	28	29	30	31	33	34	35	37	40	41	43	45	49	50	52	55	57	61	65	70	73	75	79
26	28	29	30	31	32	34	35	36	38	41	42	44	46	50	51	53	56	58	62	66	71	74	76	80
27	29	30	31	32	33	35	36	37	39	42	43	45	47	51	52	54	57	59	63	67	72	75	77	81
28	30	31	32	33	34	36	37	38	40	43	44	46	48	52	53	55	58	60	64	68	73	76	78	82
29	31	32	33	34	35	37	38	39	41	44	45	47	49	53	54	56	59	61	65	69	74	77	79	83
30	32	33	34	35	36	38	39	40	42	45	46	48	50	54	55	57	60	62	66	70	75	78	80	84
31	33	34	35	36	37	39	40	41	43	46	47	49	51	55	56	58	61	63	67	71	76	79	81	85
32	34	35	36	37	38	40	41	42	44	47	48	50	52	56	57	59	62	64	68	72	77	80	82	86
33	35	36	37	38	39	41	42	43	45	48	49	51	53	57	58	60	63	65	69	73	78	81	83	87
34	36	37	38	39	40	42	43	44	46	49	50	52	54	58	59	61	64	66	70	74	79	82	84	88
35	37	38	39	40	41	43	44	45	47	50	51	53	55	59	60	62	65	67	71	75	80	83	85	89
36	38	39	40	41	42	44	45	46	48	51	52	54	56	60	61	63	66	68	72	76	81	84	86	90
37	39	40	41	42	43	45	46	47	49	52	53	55	57	61	62	64	67	69	73	77	82	85	87	91
38	40	41	42	43	44	46	47	48	50	53	54	56	58	62	63	65	68	70	74	78	83	86	88	92
39	41	42	43	44	45	47	48	49	51	54	55	57	59	63	64	66	69	71	75	79	84	87	89	93
40	42	43	44	45	46	48	49	50	52	55	56	58	60	64	65	67	70	72	76	80	85	88	90	94
41	43	44	45	46	47	49	50	51	53	56	57	59	61	65	66	68	71	73	77	81	86	89	91	95
42	44	45	46	47	48	50	51	52	54	57	58	60	62	66	67	69	72	74	78	82	87	90	92	96
43	45	46	47	48	49	51	52	53	55	58	59	61	63	67	68	70	73	75	79	83	88	91	93	97
44	46	47	48	49	50	52	53	54	56	59	60	62	64	68	69	71	74	76	80	84	89	92	94	98
45	47	48	49	50	51	53	54	55	57	60	61	63	65	69	70	72	75	77	81	85	90	93	95	99
46	48	49	50	51	52	54	55	56	58	61	62	64	66	70	71	73	76	78	82	86	91	94	96	100
47	49	50	51	52	53	55	56	57	59	62	63	65	67	71	72	74	77	79	83	87	92	95	97	101
48	50	51	52	53	54	56	57	58	60	63	64	66	68	72	73	75	78	80	84	88	93	96	98	102
49	51	52	53	54	55	57	58	59	61	64	65	67	69	73	74	76	79	81	85	89	94	97	99	103
50	52	53	54	55	56	58	59	60	62	65	66	68	70	74	75	77	80	82	86	90	95	98	100	104
51	53	54	55	56	57	59	60	61	63	66	67	69	71	75	76	78	81	83	87	91	96	99	101	105

Tablo 16

12. Bu sefer

$$[151] \quad \frac{q+k}{q} = m \leq m_{12} < m_{11} = 2 \Rightarrow k < q < 60 \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$$

eşitsizliklerine göre  $m_{11}$ 'in EBAS'ı olan  $m_{12}$  için yine  $q$ 'nun bulunduğu aralıktaki ilk (en küçük)  $p$  düzgün sayısını alırsak biricik  $p_{12}$  düzgün sayısı için her adımda bulunan ilk  $p$  aday düzgün sayıları şu şekilde elde edilmektedirler:

1.  $k = 1$  ise:  $2 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_1 = 2$  için  $p_1 = q_1 + k = 2 + 1 = 3$ .
2.  $k = 2$  ise:  $3 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_2 = 3$  için  $p_2 = q_2 + k = 3 + 2 = 5$ .
3.  $k = 3$  ise:  $4 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_4 = 5$  için  $p_4 = q_4 + k = 5 + 3 = 8$ .
4.  $k = 4$  ise:  $5 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_4 = 5$  için  $p_4 = q_4 + k = 5 + 4 = 9$ .
5.  $k = 5$  ise:  $6 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_8 = 10$  için  $p_8 = q_8 + k = 10 + 5 = 15$ .
6.  $k = 6$  ise:  $8 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_7 = 9$  için  $p_7 = q_7 + k = 9 + 6 = 15$ .
7.  $k = 7$  ise:  $8 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_6 = 8$  için  $p_6 = q_6 + k = 8 + 7 = 15$ .
8.  $k = 8$  ise:  $9 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_8 = 10$  için  $p_8 = q_8 + k = 10 + 8 = 18$ .
9.  $k = 9$  ise:  $10 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{10} = 15$  için  $p_{10} = q_{10} + k = 15 + 9 = 24$ .
10.  $k = 10$  ise:  $12 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{10} = 15$  için  $p_{10} = q_{10} + k = 15 + 10 = 25$ .
11.  $k = 11$  ise:  $12 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{11} = 16$  için  $p_{11} = q_{11} + k = 16 + 11 = 27$ .
12.  $k = 12$  ise:  $15 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{10} = 15$  için  $p_{10} = q_{10} + k = 15 + 12 = 27$ .
13.  $k = 13$  ise:  $15 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{16} = 27$  için  $p_{16} = q_{16} + k = 27 + 13 = 40$ .
14.  $k = 14$  ise:  $15 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{11} = 16$  için  $p_{11} = q_{11} + k = 16 + 14 = 30$ .
15.  $k = 15$  ise:  $16 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{15} = 25$  için  $p_{15} = q_{15} + k = 25 + 15 = 40$ .
16.  $k = 16$  ise:  $18 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{13} = 20$  için  $p_{13} = q_{13} + k = 20 + 16 = 36$ .
17.  $k = 17$  ise:  $18 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
18.  $k = 18$  ise:  $20 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{16} = 27$  için  $p_{16} = q_{16} + k = 27 + 18 = 45$ .
19.  $k = 19$  ise:  $20 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{21} = 45$  için  $p_{21} = q_{21} + k = 45 + 19 = 64$ .
20.  $k = 20$  ise:  $24 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{15} = 25$  için  $p_{15} = q_{15} + k = 25 + 20 = 45$ .
21.  $k = 21$  ise:  $24 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{14} = 24$  için  $p_{14} = q_{14} + k = 24 + 21 = 45$ .
22.  $k = 22$  ise:  $24 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{18} = 32$  için  $p_{18} = q_{18} + k = 32 + 22 = 54$ .
23.  $k = 23$  ise:  $24 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{15} = 25$  için  $p_{15} = q_{15} + k = 25 + 23 = 48$ .
24.  $k = 24$  ise:  $25 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{17} = 30$  için  $p_{17} = q_{17} + k = 30 + 24 = 54$ .
25.  $k = 25$  ise:  $27 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{23} = 50$  için  $p_{23} = q_{23} + k = 50 + 25 = 75$ .
26.  $k = 26$  ise:  $27 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{24} = 54$  için  $p_{24} = q_{24} + k = 54 + 26 = 80$ .
27.  $k = 27$  ise:  $30 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{21} = 45$  için  $p_{21} = q_{21} + k = 45 + 27 = 72$ .
28.  $k = 28$  ise:  $30 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{18} = 32$  için  $p_{18} = q_{18} + k = 32 + 28 = 60$ .
29.  $k = 29$  ise:  $30 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
30.  $k = 30$  ise:  $32 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{21} = 45$  için  $p_{21} = q_{21} + k = 45 + 30 = 75$ .
31.  $k = 31$  ise:  $32 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{23} = 50$  için  $p_{23} = q_{23} + k = 50 + 31 = 81$ .
32.  $k = 32$  ise:  $36 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{20} = 40$  için  $p_{20} = q_{20} + k = 40 + 32 = 72$ .
33.  $k = 33$  ise:  $36 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{22} = 48$  için  $p_{22} = q_{22} + k = 48 + 33 = 81$ .
34.  $k = 34$  ise:  $36 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
35.  $k = 35$  ise:  $36 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{20} = 40$  için  $p_{20} = q_{20} + k = 40 + 35 = 75$ .
36.  $k = 36$  ise:  $40 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{21} = 45$  için  $p_{21} = q_{21} + k = 45 + 36 = 81$ .
37.  $k = 37$  ise:  $40 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
38.  $k = 38$  ise:  $40 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
39.  $k = 39$  ise:  $40 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
40.  $k = 40$  ise:  $45 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{23} = 50$  için  $p_{23} = q_{23} + k = 50 + 40 = 90$ .
41.  $k = 41$  ise:  $45 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
42.  $k = 42$  ise:  $45 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{22} = 48$  için  $p_{22} = q_{22} + k = 48 + 42 = 90$ .
43.  $k = 43$  ise:  $45 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
44.  $k = 44$  ise:  $45 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
45.  $k = 45$  ise:  $48 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
46.  $k = 46$  ise:  $48 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{23} = 50$  için  $p_{23} = q_{23} + k = 50 + 46 = 96$ .
47.  $k = 47$  ise:  $48 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
48.  $k = 48$  ise:  $50 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
49.  $k = 49$  ise:  $50 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
50.  $k = 50$  ise:  $q = q_{24} = 54$  için düzgün  $p$  sayısı yok.
51.  $k = 51$  ise:  $q = q_{24} = 54$  için  $p_{24} = q_{24} + k = 54 + 51 = 105$  sayısı düzgün değildir.
52.  $k = 52$  ise:  $q = q_{24} = 54$  için  $p_{24} = q_{24} + k = 54 + 52 = 106$  sayısı düzgün değildir.
53.  $k = 53$  ise:  $q = q_{24} = 54$  için  $p_{24} = q_{24} + k = 54 + 53 = 107$  sayısı düzgün değildir.

Şu hâlde bulunan  $m = \frac{p}{q}$  oranları arasındaki

$$[152] \quad \frac{64}{45} < \frac{40}{27} \left( = \frac{80}{54} \right) < \frac{3}{2} \left( = \frac{15}{10} = \frac{75}{50} \right) < \frac{8}{5} \left( = \frac{24}{15} = \frac{40}{25} = \frac{72}{45} \right) < \frac{81}{50} < \frac{5}{3} \left( = \frac{15}{9} = \frac{25}{15} = \frac{45}{27} = \frac{75}{45} \right) < \frac{27}{16} \left( = \frac{54}{32} = \frac{81}{48} \right) \\ < \frac{9}{5} \left( = \frac{18}{10} = \frac{27}{15} = \frac{36}{20} = \frac{45}{25} = \frac{54}{30} = \frac{72}{40} = \frac{81}{45} = \frac{90}{50} \right) < \frac{15}{8} \left( = \frac{30}{16} = \frac{45}{24} = \frac{60}{32} = \frac{75}{40} = \frac{90}{48} \right) < m_{12} = \frac{48}{25} \left( = \frac{96}{50} \right) [ < m_{11} = 2 ]$$

sıralaması göz önüne alınırsa  $(a_{12}, h_{12}, r_{12})$  dik üçgenini doğuran dik üçgenin eğimi şöyle bulunur:

$$[153] \quad m_{12} = \frac{p_{12}}{q_{12}} = \frac{48}{25}$$

13. Eğer

$$[154] \quad \frac{q+k}{q} = m < m_{12} = \frac{48}{25} \Rightarrow \frac{25}{23}k < q < 60 \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$$

eşitsizliklerine göre  $m_{12}$ 'nin EBAS'ı olan  $m_{13}$  için yine  $q$ 'nun bulunduğu aralıktaki ilk (en küçük)  $p$  düzgün sayısını alırsak biricik  $p_{13}$  düzgün sayısı için her adımda bulunan ilk  $p$  aday düzgün sayıları şu şekilde elde edilirler:

1.  $k = 1$  ise:  $2 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_1 = 2$  için  $p_1 = q_1 + k = 2 + 1 = 3$ .
2.  $k = 2$  ise:  $3 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_2 = 3$  için  $p_2 = q_2 + k = 3 + 2 = 5$ .
3.  $k = 3$  ise:  $4 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_4 = 5$  için  $p_4 = q_4 + k = 5 + 3 = 8$ .
4.  $k = 4$  ise:  $5 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_4 = 5$  için  $p_4 = q_4 + k = 5 + 4 = 9$ .
5.  $k = 5$  ise:  $6 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_8 = 10$  için  $p_8 = q_8 + k = 10 + 5 = 15$ .
6.  $k = 6$  ise:  $8 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_7 = 9$  için  $p_7 = q_7 + k = 9 + 6 = 15$ .
7.  $k = 7$  ise:  $8 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_6 = 8$  için  $p_6 = q_6 + k = 8 + 7 = 15$ .
8.  $k = 8$  ise:  $9 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_8 = 10$  için  $p_8 = q_8 + k = 10 + 8 = 18$ .
9.  $k = 9$  ise:  $10 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{10} = 15$  için  $p_{10} = q_{10} + k = 15 + 9 = 24$ .
10.  $k = 10$  ise:  $12 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{10} = 15$  için  $p_{10} = q_{10} + k = 15 + 10 = 25$ .
11.  $k = 11$  ise:  $12 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{11} = 16$  için  $p_{11} = q_{11} + k = 16 + 11 = 27$ .
12.  $k = 12$  ise:  $15 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{10} = 15$  için  $p_{10} = q_{10} + k = 15 + 12 = 27$ .
13.  $k = 13$  ise:  $15 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{16} = 27$  için  $p_{16} = q_{16} + k = 27 + 13 = 40$ .
14.  $k = 14$  ise:  $16 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{11} = 16$  için  $p_{11} = q_{11} + k = 16 + 14 = 30$ .
15.  $k = 15$  ise:  $18 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{15} = 25$  için  $p_{15} = q_{15} + k = 25 + 15 = 40$ .
16.  $k = 16$  ise:  $18 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{13} = 20$  için  $p_{13} = q_{13} + k = 20 + 16 = 36$ .
17.  $k = 17$  ise:  $20 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
18.  $k = 18$  ise:  $20 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{16} = 27$  için  $p_{16} = q_{16} + k = 27 + 18 = 45$ .
19.  $k = 19$  ise:  $24 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{21} = 45$  için  $p_{21} = q_{21} + k = 45 + 19 = 64$ .
20.  $k = 20$  ise:  $24 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{15} = 25$  için  $p_{15} = q_{15} + k = 25 + 20 = 45$ .
21.  $k = 21$  ise:  $24 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{14} = 24$  için  $p_{14} = q_{14} + k = 24 + 21 = 45$ .
22.  $k = 22$  ise:  $24 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{18} = 32$  için  $p_{18} = q_{18} + k = 32 + 22 = 54$ .
23.  $k = 23$  ise:  $27 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{16} = 27$  için  $p_{16} = q_{16} + k = 27 + 23 = 50$ .
24.  $k = 24$  ise:  $27 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{17} = 30$  için  $p_{17} = q_{17} + k = 30 + 24 = 54$ .
25.  $k = 25$  ise:  $30 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{23} = 50$  için  $p_{23} = q_{23} + k = 50 + 25 = 75$ .
26.  $k = 26$  ise:  $30 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{24} = 54$  için  $p_{24} = q_{24} + k = 54 + 26 = 80$ .
27.  $k = 27$  ise:  $30 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{21} = 45$  için  $p_{21} = q_{21} + k = 45 + 27 = 72$ .
28.  $k = 28$  ise:  $32 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{18} = 32$  için  $p_{18} = q_{18} + k = 32 + 28 = 60$ .
29.  $k = 29$  ise:  $32 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
30.  $k = 30$  ise:  $36 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{21} = 45$  için  $p_{21} = q_{21} + k = 45 + 30 = 75$ .
31.  $k = 31$  ise:  $36 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{23} = 50$  için  $p_{23} = q_{23} + k = 50 + 31 = 81$ .
32.  $k = 32$  ise:  $36 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{20} = 40$  için  $p_{20} = q_{20} + k = 40 + 32 = 72$ .
33.  $k = 33$  ise:  $36 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{22} = 48$  için  $p_{22} = q_{22} + k = 48 + 33 = 81$ .
34.  $k = 34$  ise:  $40 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
35.  $k = 35$  ise:  $40 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{20} = 40$  için  $p_{20} = q_{20} + k = 40 + 35 = 75$ .
36.  $k = 36$  ise:  $40 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{21} = 45$  için  $p_{21} = q_{21} + k = 45 + 36 = 81$ .
37.  $k = 37$  ise:  $45 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
38.  $k = 38$  ise:  $45 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
39.  $k = 39$  ise:  $45 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
40.  $k = 40$  ise:  $45 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{23} = 50$  için  $p_{23} = q_{23} + k = 50 + 40 = 90$ .
41.  $k = 41$  ise:  $45 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
42.  $k = 42$  ise:  $48 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{22} = 48$  için  $p_{22} = q_{22} + k = 48 + 42 = 90$ .
43.  $k = 43$  ise:  $48 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
44.  $k = 44$  ise:  $48 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
45.  $k = 45$  ise:  $50 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
46.  $k = 46$  ise:  $q = q_{24} = 54$  için  $p_{24} = q_{24} + k = 54 + 46 = 100$ .
47.  $k = 47$  ise:  $q = q_{24} = 54$  için düzgün  $p$  sayısı yok.
48.  $k = 48$  ise:  $q = q_{24} = 54$  için düzgün  $p$  sayısı yok.
49.  $k = 49$  ise:  $q = q_{24} = 54$  için düzgün  $p$  sayısı yok.

Şu hâlde bulunan  $m = \frac{p}{q}$  oranları arasındaki

$$[155] \quad \frac{64}{45} < \frac{40}{27} \left( = \frac{80}{54} \right) < \frac{3}{2} \left( = \frac{15}{10} = \frac{75}{50} \right) < \frac{8}{5} \left( = \frac{24}{15} = \frac{40}{25} = \frac{72}{45} \right) < \frac{81}{50} < \frac{5}{3} \left( = \frac{15}{9} = \frac{25}{15} = \frac{45}{27} = \frac{75}{45} \right) < \frac{27}{16} \left( = \frac{54}{32} = \frac{81}{48} \right) \\ < \frac{9}{5} \left( = \frac{18}{10} = \frac{27}{15} = \frac{36}{20} = \frac{45}{25} = \frac{54}{30} = \frac{72}{40} = \frac{81}{45} = \frac{90}{50} \right) < \frac{50}{27} \left( = \frac{100}{54} \right) < m_{13} = \frac{15}{8} \left( = \frac{30}{16} = \frac{45}{24} = \frac{60}{32} = \frac{75}{40} = \frac{90}{48} \right) \left[ < m_{12} = \frac{48}{25} \right]$$

sıralaması göz önüne alınırsa  $(a_{13}, h_{13}, r_{13})$  dik üçgenini doğuran dik üçgenin eğimi

$$[156] \quad m_{13} = \frac{p_{13}}{q_{13}} = \frac{15}{8}$$

olarak elde edilir.

14. Şimdi de

$$[157] \quad \frac{q+k}{q} = m < m_{13} = \frac{15}{8} \Rightarrow \frac{8}{7}k < q < 60 \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$$

eşitsizliklerine göre  $m_{13}$ 'ün EBAS'ı olan  $m_{14}$  için yine  $q$ 'nun bulunduğu aralıktaki ilk (en küçük)  $p$  düzgün sayısı alınırsa biricik  $p_{14}$  düzgün sayısı için her adımda bulunan ilk  $p$  aday düzgün sayıları şu şekilde elde edilmektedirler:

1.  $k = 1$  ise:  $2 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_1 = 2$  için  $p_1 = q_1 + k = 2 + 1 = 3$ .
2.  $k = 2$  ise:  $3 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_2 = 3$  için  $p_2 = q_2 + k = 3 + 2 = 5$ .
3.  $k = 3$  ise:  $4 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_4 = 5$  için  $p_4 = q_4 + k = 5 + 3 = 8$ .
4.  $k = 4$  ise:  $5 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_4 = 5$  için  $p_4 = q_4 + k = 5 + 4 = 9$ .
5.  $k = 5$  ise:  $6 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_8 = 10$  için  $p_8 = q_8 + k = 10 + 5 = 15$ .
6.  $k = 6$  ise:  $8 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_7 = 9$  için  $p_7 = q_7 + k = 9 + 6 = 15$ .
7.  $k = 7$  ise:  $9 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_7 = 9$  için  $p_7 = q_7 + k = 9 + 7 = 16$ .
8.  $k = 8$  ise:  $10 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_8 = 10$  için  $p_8 = q_8 + k = 10 + 8 = 18$ .
9.  $k = 9$  ise:  $12 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{10} = 15$  için  $p_{10} = q_{10} + k = 15 + 9 = 24$ .
10.  $k = 10$  ise:  $12 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{10} = 15$  için  $p_{10} = q_{10} + k = 15 + 10 = 25$ .
11.  $k = 11$  ise:  $15 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{11} = 16$  için  $p_{11} = q_{11} + k = 16 + 11 = 27$ .
12.  $k = 12$  ise:  $15 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{10} = 15$  için  $p_{10} = q_{10} + k = 15 + 12 = 27$ .
13.  $k = 13$  ise:  $15 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{16} = 27$  için  $p_{16} = q_{16} + k = 27 + 13 = 40$ .
14.  $k = 14$  ise:  $18 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{12} = 18$  için  $p_{12} = q_{12} + k = 18 + 14 = 32$ .
15.  $k = 15$  ise:  $18 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{15} = 25$  için  $p_{15} = q_{15} + k = 25 + 15 = 40$ .
16.  $k = 16$  ise:  $20 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{13} = 20$  için  $p_{13} = q_{13} + k = 20 + 16 = 36$ .
17.  $k = 17$  ise:  $20 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
18.  $k = 18$  ise:  $24 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{16} = 27$  için  $p_{16} = q_{16} + k = 27 + 18 = 45$ .
19.  $k = 19$  ise:  $24 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{21} = 45$  için  $p_{21} = q_{21} + k = 45 + 19 = 64$ .
20.  $k = 20$  ise:  $24 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{15} = 25$  için  $p_{15} = q_{15} + k = 25 + 20 = 45$ .
21.  $k = 21$  ise:  $25 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{16} = 27$  için  $p_{16} = q_{16} + k = 27 + 21 = 48$ .
22.  $k = 22$  ise:  $27 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{18} = 32$  için  $p_{18} = q_{18} + k = 32 + 22 = 54$ .
23.  $k = 23$  ise:  $27 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{16} = 27$  için  $p_{16} = q_{16} + k = 27 + 23 = 50$ .
24.  $k = 24$  ise:  $30 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{17} = 30$  için  $p_{17} = q_{17} + k = 30 + 24 = 54$ .
25.  $k = 25$  ise:  $30 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{23} = 50$  için  $p_{23} = q_{23} + k = 50 + 25 = 75$ .
26.  $k = 26$  ise:  $30 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{24} = 54$  için  $p_{24} = q_{24} + k = 54 + 26 = 80$ .
27.  $k = 27$  ise:  $32 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{21} = 45$  için  $p_{21} = q_{21} + k = 45 + 27 = 72$ .
28.  $k = 28$  ise:  $36 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{19} = 36$  için  $p_{19} = q_{19} + k = 36 + 28 = 64$ .
29.  $k = 29$  ise:  $36 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
30.  $k = 30$  ise:  $36 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{21} = 45$  için  $p_{21} = q_{21} + k = 45 + 30 = 75$ .
31.  $k = 31$  ise:  $36 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{23} = 50$  için  $p_{23} = q_{23} + k = 50 + 31 = 81$ .
32.  $k = 32$  ise:  $40 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{20} = 40$  için  $p_{20} = q_{20} + k = 40 + 32 = 72$ .
33.  $k = 33$  ise:  $40 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{22} = 48$  için  $p_{22} = q_{22} + k = 48 + 33 = 81$ .
34.  $k = 34$  ise:  $40 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
35.  $k = 35$  ise:  $45 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{21} = 45$  için  $p_{21} = q_{21} + k = 45 + 35 = 80$ .
36.  $k = 36$  ise:  $45 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{21} = 45$  için  $p_{21} = q_{21} + k = 45 + 36 = 81$ .
37.  $k = 37$  ise:  $45 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
38.  $k = 38$  ise:  $45 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
39.  $k = 39$  ise:  $45 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
40.  $k = 40$  ise:  $48 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{23} = 50$  için  $p_{23} = q_{23} + k = 50 + 40 = 90$ .
41.  $k = 41$  ise:  $48 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
42.  $k = 42$  ise:  $50 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{24} = 54$  için  $p_{24} = q_{24} + k = 54 + 42 = 96$ .
43.  $k = 43$  ise:  $50 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
44.  $k = 44$  ise:  $q = q_{24} = 54$  için düzgün  $p$  sayısı yok.
45.  $k = 45$  ise:  $q = q_{24} = 54$  için düzgün  $p$  sayısı yok.
46.  $k = 46$  ise:  $q = q_{24} = 54$  için  $p_{24} = q_{24} + k = 54 + 46 = 100$ .
47.  $k = 47$  ise:  $q = q_{24} = 54$  için düzgün  $p$  sayısı yok.

Şu hâlde bulunan  $m = \frac{p}{q}$  oranları arasındaki

$$[158] \quad \frac{64}{45} < \frac{40}{27} \left( = \frac{80}{54} \right) < \frac{3}{2} \left( = \frac{15}{10} = \frac{75}{50} \right) < \frac{8}{5} \left( = \frac{24}{15} = \frac{40}{25} = \frac{72}{45} \right) < \frac{81}{50} < \frac{5}{3} \left( = \frac{15}{9} = \frac{25}{15} = \frac{45}{27} = \frac{75}{45} \right) < \frac{27}{16} \left( = \frac{54}{32} = \frac{81}{48} \right) < \frac{16}{9} \left( = \frac{32}{18} = \frac{48}{27} = \frac{64}{36} = \frac{80}{45} = \frac{96}{54} \right) \\ < \frac{9}{5} \left( = \frac{18}{10} = \frac{27}{15} = \frac{36}{20} = \frac{45}{25} = \frac{54}{30} = \frac{72}{40} = \frac{81}{45} = \frac{90}{50} \right) < m_{14} = \frac{50}{27} \left( = \frac{100}{54} \right) \left[ < m_{13} = \frac{15}{8} \right]$$

sıralaması göz önüne alınırsa  $(a_{14}, h_{14}, r_{14})$  dik üçgenini doğuran dik üçgenin eğimi

$$[159] \quad m_{14} = \frac{p_{14}}{q_{14}} = \frac{50}{27}$$

olarak elde edilir.

15. Son olarak

$$[160] \quad \frac{q+k}{q} = m < m_{14} = \frac{50}{27} \Rightarrow \frac{27}{23}k < q < 60 \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$$

eşitsizliklerine göre  $m_{14}$ 'ün EBAS'ı olan  $m_{15}$  için yine  $q$ 'nun bulunduğu aralıktaki ilk (en küçük)  $p$  düzgün sayısını alırsak biricik  $p_{15}$  düzgün sayısı için her adımda bulunan ilk  $p$  aday düzgün sayıları şu şekilde elde edilmektedirler:

1.  $k = 1$  ise:  $2 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_1 = 2$  için  $p_1 = q_1 + k = 2 + 1 = 3$ .
2.  $k = 2$  ise:  $3 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_2 = 3$  için  $p_2 = q_2 + k = 3 + 2 = 5$ .
3.  $k = 3$  ise:  $4 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_4 = 5$  için  $p_4 = q_4 + k = 5 + 3 = 8$ .
4.  $k = 4$  ise:  $5 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_4 = 5$  için  $p_4 = q_4 + k = 5 + 4 = 9$ .
5.  $k = 5$  ise:  $6 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_8 = 10$  için  $p_8 = q_8 + k = 10 + 5 = 15$ .
6.  $k = 6$  ise:  $8 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_7 = 9$  için  $p_7 = q_7 + k = 9 + 6 = 15$ .
7.  $k = 7$  ise:  $9 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_7 = 9$  için  $p_7 = q_7 + k = 9 + 7 = 16$ .
8.  $k = 8$  ise:  $10 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_8 = 10$  için  $p_8 = q_8 + k = 10 + 8 = 18$ .
9.  $k = 9$  ise:  $12 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{10} = 15$  için  $p_{10} = q_{10} + k = 15 + 9 = 24$ .
10.  $k = 10$  ise:  $12 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{10} = 15$  için  $p_{10} = q_{10} + k = 15 + 10 = 25$ .
11.  $k = 11$  ise:  $15 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{11} = 16$  için  $p_{11} = q_{11} + k = 16 + 11 = 27$ .
12.  $k = 12$  ise:  $15 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{10} = 15$  için  $p_{10} = q_{10} + k = 15 + 12 = 27$ .
13.  $k = 13$  ise:  $16 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{16} = 27$  için  $p_{16} = q_{16} + k = 27 + 13 = 40$ .
14.  $k = 14$  ise:  $18 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{12} = 18$  için  $p_{12} = q_{12} + k = 18 + 14 = 32$ .
15.  $k = 15$  ise:  $18 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{15} = 25$  için  $p_{15} = q_{15} + k = 25 + 15 = 40$ .
16.  $k = 16$  ise:  $20 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{13} = 20$  için  $p_{13} = q_{13} + k = 20 + 16 = 36$ .
17.  $k = 17$  ise:  $20 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
18.  $k = 18$  ise:  $24 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{16} = 27$  için  $p_{16} = q_{16} + k = 27 + 18 = 45$ .
19.  $k = 19$  ise:  $24 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{21} = 45$  için  $p_{21} = q_{21} + k = 45 + 19 = 64$ .
20.  $k = 20$  ise:  $24 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{15} = 25$  için  $p_{15} = q_{15} + k = 25 + 20 = 45$ .
21.  $k = 21$  ise:  $25 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{16} = 27$  için  $p_{16} = q_{16} + k = 27 + 21 = 48$ .
22.  $k = 22$  ise:  $27 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{18} = 32$  için  $p_{18} = q_{18} + k = 32 + 22 = 54$ .
23.  $k = 23$  ise:  $30 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
24.  $k = 24$  ise:  $30 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{17} = 30$  için  $p_{17} = q_{17} + k = 30 + 24 = 54$ .
25.  $k = 25$  ise:  $30 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{23} = 50$  için  $p_{23} = q_{23} + k = 50 + 25 = 75$ .
26.  $k = 26$  ise:  $32 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{24} = 54$  için  $p_{24} = q_{24} + k = 54 + 26 = 80$ .
27.  $k = 27$  ise:  $32 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{21} = 45$  için  $p_{21} = q_{21} + k = 45 + 27 = 72$ .
28.  $k = 28$  ise:  $36 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{19} = 36$  için  $p_{19} = q_{19} + k = 36 + 28 = 64$ .
29.  $k = 29$  ise:  $36 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
30.  $k = 30$  ise:  $36 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{21} = 45$  için  $p_{21} = q_{21} + k = 45 + 30 = 75$ .
31.  $k = 31$  ise:  $40 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{23} = 50$  için  $p_{23} = q_{23} + k = 50 + 31 = 81$ .
32.  $k = 32$  ise:  $40 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{20} = 40$  için  $p_{20} = q_{20} + k = 40 + 32 = 72$ .
33.  $k = 33$  ise:  $40 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{22} = 48$  için  $p_{22} = q_{22} + k = 48 + 33 = 81$ .
34.  $k = 34$  ise:  $40 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
35.  $k = 35$  ise:  $45 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{21} = 45$  için  $p_{21} = q_{21} + k = 45 + 35 = 80$ .
36.  $k = 36$  ise:  $45 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{21} = 45$  için  $p_{21} = q_{21} + k = 45 + 36 = 81$ .
37.  $k = 37$  ise:  $45 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
38.  $k = 38$  ise:  $45 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
39.  $k = 39$  ise:  $48 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
40.  $k = 40$  ise:  $48 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{23} = 50$  için  $p_{23} = q_{23} + k = 50 + 40 = 90$ .
41.  $k = 41$  ise:  $50 \leq q \leq 54$  aralığında düzgün  $p$  sayısı yok.
42.  $k = 42$  ise:  $50 \leq q \leq 54$  aralığında  $q_{24} = 54$  için  $p_{24} = q_{24} + k = 54 + 42 = 96$ .
43.  $k = 43$  ise:  $q = q_{24} = 54$  için düzgün  $p$  sayısı yok.
44.  $k = 44$  ise:  $q = q_{24} = 54$  için düzgün  $p$  sayısı yok.
45.  $k = 45$  ise:  $q = q_{24} = 54$  için düzgün  $p$  sayısı yok.

Şu hâlde bulunan  $m = \frac{p}{q}$  oranları arasındaki

$$[161] \quad \frac{64}{45} < \frac{40}{27} \left( = \frac{80}{54} \right) < \frac{3}{2} \left( = \frac{15}{10} = \frac{75}{50} \right) < \frac{8}{5} \left( = \frac{24}{15} = \frac{40}{25} = \frac{72}{45} \right) < \frac{81}{50} < \frac{5}{3} \left( = \frac{15}{9} = \frac{25}{15} = \frac{45}{27} = \frac{75}{45} \right) < \frac{27}{16} \left( = \frac{54}{32} = \frac{81}{48} \right) < \frac{16}{9} \left( = \frac{32}{18} = \frac{48}{27} = \frac{64}{36} = \frac{80}{45} = \frac{96}{54} \right) \\ < m_{15} = \frac{9}{5} \left( = \frac{18}{10} = \frac{27}{15} = \frac{36}{20} = \frac{45}{25} = \frac{54}{30} = \frac{72}{40} = \frac{81}{45} = \frac{90}{50} \right) \left[ < m_{14} = \frac{50}{27} \right]$$

sıralaması göz önüne alınırsa  $(a_{15}, h_{15}, r_{15})$  dik üçgenini doğuran dik üçgenin eğimi için şu şekilde elde edilir:

$$[162] \quad m_{15} = \frac{p_{15}}{q_{15}} = \frac{9}{5}$$

Sonuçta işleme bu şekilde devam edersek **Manuel Benito Muñoz**'un [Tablo 1.2](#)'sinde geçen şu tabloyu elde etmiş oluruz (Bkz. "[Birkaç Diofant Problemi](#)", S. 9):

$n$	$p_n$	$q_n$	$a_n$	$h_n$	$r_n$	$\theta_n = \text{Sec}^{-1} \left( \frac{r_n}{h_n} \right)$
0	$\frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{2}$	$\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	45°00'00"
1	12	5	119	120	169	44°45'37"
2	64	27	3367	3456	4825	44°15'10"
3	75	32	4601	4800	6649	43°47'14"
4	125	54	12709	13500	18541	43°16'17"
5	9	4	65	72	97	42°04'30"
6	20	9	319	360	481	41°32'40"
7	54	25	2291	2700	3541	40°18'55"
8	32	15	799	960	1249	39°46'13"
9	25	12	481	600	769	38°43'05"
10	81	40	4961	6480	8161	37°26'14"
11	2 (60)	1 (30)	45	60	75	36°52'12"
12	48	25	1679	2400	2929	34°58'34"
13	15	8	161	240	289	33°51'18"
14	50	27	1771	2700	3229	33°15'43"
15	9	5	56	90	106	31°53'27"
16	16	9	175	288	337	31°17'04"
17	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	30°00'00"
18	27	16	473	864	985	28°41'55"
19	5	3	16	30	34	28°04'21"
20	81	50	4061	8100	9061	26°37'38"
21	8	5	39	80	89	25°59'21"
22	25	16	369	800	881	24°45'41"
23	3	2	5	12	13	22°37'12"
24	40	27	871	2160	2329	21°57'41"
25	36	25	671	1800	1921	20°26'40"
26	64	45	2071	5760	6121	19°46'34"
27	45	32	1001	2880	3049	19°09'57"
28	25	18	301	900	949	18°29'32"
29	27	20	329	1080	1129	16°56'32"
30	4	3	7	24	25	16°15'37"
31	32	25	399	1600	1649	14°00'09"
32	5	4	9	40	41	12°40'49"
33	6	5	11	60	61	10°23'20"
34	32	27	295	1728	1753	09°41'17"
35	9	8	17	144	145	06°43'59"
36	10	9	19	180	181	06°01'32"
37	27	25	104	1350	1354	04°24'19"
38	16	15	31	480	481	03°41'43"
39	25	24	49	1200	1201	02°20'18"
40	1	1	0	2	2	00°00'00"

**Tablo 17.** Bu tablonun Mathematica'daki doğrulanması şu dosyadadır: [Tablo 17](#), Oluşturma Tarihi: 13.03.2026, 21:38:05-Son Kaydetme Tarihi: 21.03.2026, 04:59:47 (ki rar klasörünün içinden çıkarttığınız Tablo 17.nb dosyasını [Wolfram Player](#) ile okuyabilir ve işletebilirsiniz ama eğer profesyonel kullanmak isterseniz [Mathematica 14.3](#)'ü bilgisayarınıza kurmanız gerekir).

### 4.3. Plimpton 322 No'lu Tablet'in Değerlendirilmesi

**1. Tablet'in Son Sütunundaki "1" Rakamı Hakkında.** Bu konuda bilinen bir şey varsa, o da tabletin sol tarafının son sütundaki sayıların 1'ler basamağındaki rakamların bulunduğu hat, daha açık bir deyişle "1" rakamlarının olduğu hat boyunca kırık olmasıdır. Fakat [bu kırıklık](#) doğal olmaktan ziyade adeta bir bıçak keskinliğinde son derece temizdir ve burada modern bir yapıştırıcı (zambak gibi) izleri görülmektedir. Bundan, kökeni meçhul olan bu tabletin toprak altından bütün olarak çıktığı ve sonradan kırıldığı, diğer parçasının belki de bilinmeyen bir yerde olduğu sanılmaktadır. **Edgar J. Banks** (yandaki resimdeki kişi), **1905**'te (ki bu tarihte **Atatürk** kurmay yüzbaşı olarak İstanbul Harp Akademisi'nden oldu) şimdi arkeolojik bir site olan modern Tell Senkereh/İrak'ın güneyindeki **Larsa**'da kaçak bir kazı yaparken bir grup tablet buldu ve bunlardan Plimpton 322 no'lu tableti **1923**'te (ki bu tarihte **Atatürk**, Türkiye Cumhuriyeti'ni kurdu) ilk Western sahibi ve The New York yayıncısı **George Arthur Plimpton**'a (ki 1936'daki ölümünden önce tarihi matematiksel kitaplar ve sanatla ilgili parçalardan oluşan koleksiyonunu Columbia Üniversitesi'ne verilmesini vasiyet eden kimsedir) **10 \$**'a (şimdi **305.98 \$**) sattı. Konuyla ilgili **Robson**'ın 2001'deki "[Neither Sherlock Holmes nor Babylon: A Reassessment of Plimpton 322](#)" makalesinin 171. ve 172. sayfalarına baktığımızda, bir zamanlar kaçak kazılarla çıkarılan eski Mısır'a ait buluntuların başına gelenlerin ne yazık ki burada da tekrarlandığını görüyoruz!



**Resim 6. Edgar J. Banks.** Fotoğraf Bismaya ya da kayıp şehir Adab'dan, 1908.

İşte bu nedenle aşağıdaki bulgular son derece önem arz eder:

**1.1. Neugebauer ve Sachs**  $\left(\frac{r_n}{h_n}\right)^2$  oranını kullandılar. Çünkü **Neugebauer**, "Eski matematikçiler yalnızca Pisagor üçlülerinin tanımıyla değil ama  $\frac{r_n}{h_n}$  oranlarıyla da ilgileniyorlardı" demişti. Bu yüzden Tablo 12'deki son sütun başlığını okuyamamalarına rağmen oradaki sayıların başlarına "1" rakamının gelmesi gerektiğine inandılar (Bkz. [Plate 25](#), S. 38). İkinci olarak 39. sayfadaki Şekil 2'deki ([Fig. 2](#)) grafikte dik üçgenlerdeki  $\frac{r_n}{h_n}$  oranlarına ilişkin eğim açılarının  $45^\circ$ 'den  $30^\circ$ 'ye kadar monoton azaldığını ve en düşük değer (en küçük eğim açısı) hemen hemen  $31^\circ$  olduğunu (ki bu, gerçekte  $31^\circ 53' 27''$  dir. Yani onlar  $32^\circ$  yerine yanlışlıkla  $31^\circ$  yazdılar) söylediler (Bkz. "[Otto Neugebauer: The Exact Sciences in Antiquity \(1951, 1957, 1969\), 2nd ed./Princeton, NJ: Brown University Press; reprint ed./New York: Dover, 1969](#)", Sayfa. 38). Fakat gerçekte son sütunda  $\left(\frac{r_n}{h_n}\right)^2$  oranını hiç kullanılmadı çünkü,

$$[163] \quad 1 + \left(\frac{a_n}{h_n}\right)^2 = \left(\frac{r_n}{h_n}\right)^2$$

nedeniyle son sütundaki sayıların kesir kısmını veren  $\left(\frac{a_n}{h_n}\right)^2$ 'nin başına "1" rakamının gelmesi gerekiyordu (Bkz. "[5.5.2009, 02:00](#)", S. 4, ③ ve S. 12). Ayrıca tabletteki 15 dik üçgenin eğim açıları için çifte kullanım mevcuttu: Birinci (kural gereğince tabletteki) kullanımda  $45^\circ$ 'den  $30^\circ$ 'ye kadar monoton azalan ve ikinci kullanımda  $45^\circ$ 'den  $60^\circ$ 'ye kadar monoton artan idi. Bunlardan bazıları daha önceden Mısır piramitlerinin yapımında kullanılmıştı. Örnekte Tablo 12'deki 4. dik üçgen [Bent piramiti](#)'nin üst parçasında ve [Kızıl piramitte](#), 11. dik üçgen [Khafre piramiti](#)nde kullanıldı!

**Not 6.** Bu açıklamalarla **Neugebauer ve Sachs**'in hatalarını düzeltiş oluyorum. Buna göre tabletin son sütunundaki  $\left(\frac{a_n}{h_n}\right)^2$  sayılarının "0" rakamı ile başladığını "[H. L. Resnikoff & Raymond O'Neil Wells: Mathematics in Civilization](#), 1984, S. 74"teki tabloda ve  $\left(\frac{r_n}{h_n}\right)^2$  sayılarının "1" rakamı ile başladığını "[Eli Maor: The Pythagorean Theorem: A 4,000-Year History](#), 2007, S. 9"daki tabloda görebilirsiniz. Bu son tablo **Neugebauer**'in (1951) [37. sayfasındaki](#) tablosu olup, son sütundaki 10., 11., 12. ve 14. satırlarındaki sayıların başında "1" rakamının tablette açık bir şekilde görüldüğü geçer!

**1.2. Robson**, son sütun başlığını "I. (Hasarlı)  $\left(\frac{r_n}{h_n}\right)^2 \vee \left(\frac{a_n}{h_n}\right)^2$ " şeklinde vermiş ama bu sütundaki her sayının, tercihini ilk seçimden yana kullanarak (ki hiçbir satırda okunamayan, dolayısıyla köşeli parantezler içinde verilen), "1" rakamıyla başladığını belirtmiştir (Bkz. "[Neither Sherlock Holmes nor Babylon: A reassessment of Plimpton 322](#)", *Historia Math.* 28 (2001), S. 167–206).

**Robson**, daha sonra MÖ 1900-1800 tarihli [YBC 6967](#) no'lu tabletindeki Problem 20'den hareketle son sütun başlığını

[ta]-ki-il-ti ſi-li-ip-tim	İB.SIğ SAG	İB.SIğ ſi-li-ip-tim	MU.BI.IM
[ša 1 in]-na-as-sà-ĥu-ma SAG i-il-lu-ú			
[(1) 59] 00 15	1 59	2 49	KI. 1
[(1) 56 56] 58 14 50 06 15	56 07	1 20 25	KI. 2
[(1) 55 07] 41 15 33 45	1 16 41	1 50 49	KI. 3
(1) 53 10 29 32 52 16	3 31 49	5 09 01	KI. 4
(1) 48 54 01 40	1 05	1 37	KI. [5]
(1) 47 06 41 40	5 19	8 01	[KI. 6]
(1) 43 11 56 28 26 40	38 11	59 01	KI. 7
(1) 41 33 45 14 3 45	13 19	20 49	KI. 8
(1) 38 33 36 36	8 01	12 49	KI. 9
(1) 35 10 02 28 27 24 26 40	1 22 41	2 16 01	KI. 10
(1) 33 45	45	1 15	KI. 11
(1) 29 21 54 2 15	27 59	48 49	KI. 12
(1) 27 00 03 45	2 41	4 49	KI. 13
(1) 25 48 51 35 6 40	29 31	53 49	KI. 14
(1) 23 13 46 40	28	53	KI. 15

**Figure 3. Transliteration of Plimpton 322.**

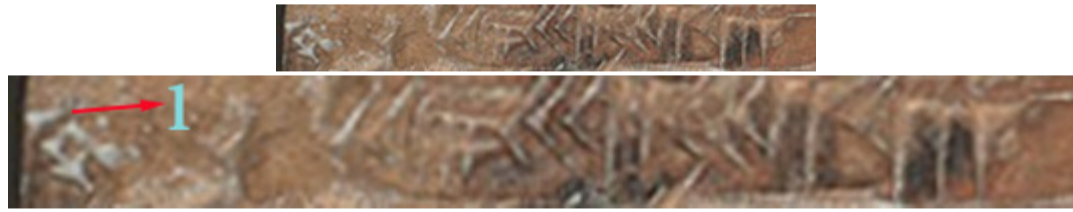
**Tablo 18.** **Robson**'a göre Plimpton 322 no'lu tabletin çevirisi. Bu tablodaki köşeli parantezler tabletteki tahribatlı yerleri, dolayısıyla okunamayan yerleri ve küçük parantezler yani "1" rakamının bulunduğu bölümler tabletteki okunması çok güç olan yerleri gösterir. Buna göre **Robson** tabletin sol tarafındaki "1"lerin hiç okunmadığını söyler!

şeklinde çözdükten sonra bu sütundaki sayıların kesinlikle “1” rakamıyla başladığını ama bu rakamın hiçbir satırda okunmadığını bildirdi (Bkz. “[Words and Pictures: New Light on Plimpton 322](#)”, *The Mathematical Association of America, Monthly* (2002), S. 3).

**1.3. YBC 7289** no’lu tabletin resimlerini çekerek tüm dünyaya tanıtılmasını sağlayan ünlü araştırmacı matematikçi-fotoğrafçı [Bill Casselman](#) ise, 2003’te tabletin son sütunundaki 14. satırdaki sayının başındaki “1” rakamının okunabildiğini bildiriyor. Ancak bu ilginç bulgu tabletin bir siyah-beyaz imajında doğruymuş gibi gözükmesine rağmen renkli imajlarına geçildiğinde aynı şeyi söylemenin çok zor olduğu görünmektedir. Bana göre bu durum büyük bir ihtimalle tabletin sol tarafındaki kırıklığın bu kısımda “1” rakamı gibi görüntü vermesinden kaynaklanıyordu (Bkz. “[Bill Casselman: The Babylonian tablet Plimpton 322](#)”).

**1.4.** Tabletteki bulguma geçmeden önce, tabletin son durumunu ve son sütundaki bulguları kısaca değerlendirmek istiyorum. Öncelikle bu tablet toprak altından çıkarılırken [2. sütun boyunca kırık olarak 2 parça halinde çıkarılmış](#) olduğu anlaşılmaktadır ama sol taraftaki yani 4. sütundaki “1” rakamlarının bulunduğu hat boyunca oluşan kırıklık keskin bir şekilde olup ilkindeki gibi doğal değildir. Dolayısıyla tableti ilk kez okuyup yorumlayan [Neugebauer](#) ve [Sachs](#), 1945’teki ilk çalışmalarında bu sütundaki sayıların okunuşlarına bir çekince koyarak yani bu sayıların tabletteki mevcut okunuşlarını vererek, dik üçgendeki [163]’e göre bu sayıların başına “1” rakamının gelmesi gerektiğine inandılar. Daha sonra [Neugebauer](#) 1951, 1957 ve 1969’daki çalışmalarında konuya bir açıklık getirmeye çalışmışsa da son sütundaki başlık ve sayıların okunuşları açıklığa kavuşamamış ve diğerlerinin yorumları da konuya bir açıklık getirememiştir. Çok sonraları bu yorumlara dayanan [Robson](#), ilkin 2001’deki çalışmasında son sütundaki sayıların okunuşu için 2 farklı kuralla birlikte [Neugebauer](#) ve [Sachs](#)’ın inancını dile getirirken (ama bunu yaparken de hiçbir satırda “1” rakamının okunmadığını belirtiyor), 2002’deki ikinci çalışmasında bu tablet ile [YBC 6967](#) no’lu tabletindeki Problem 20’yi karşılaştırarak, tabletin kırık yerlerinde bulunan son sütunun 1. ve 2. satır başlangıcındaki “[ta]” ve “[ša 1 in]” eklerini keşfederek [Neugebauer](#) ve [Sachs](#)’ın yorumunu düzeltir ve böylece son sütun başlığını tamamlamış olur! Fakat bu yorumlarla birlikte son zamanlarda bazı araştırmacıların Tablo 12’deki son sütundaki bazı (10., 11., 12. ve 14. satırlardaki) sayıların başında “1” rakamını görmesi ve [Robson](#) tarafından keşfedilen eklerle sütun başlığının tamamen okunabilir hale gelmesi, bir yerde halüsinasyon görmekten ibaret gibi olaylar idi. Yani bunları ispat etmek mümkün değildi. Bu nedenle tabletin orijinal resmine bakmak için internette Columbia Üniversitesi’ndeki Plimpton Kütüphanesi’ne girdim. Amacım tabletin orijinal resmi ile diğer resimlerini karşılaştırarak Photoshop ile farkları ortaya çıkartmak idi. Çünkü tablete ait çekilen resimlerde ışığın miktarı ve geliş açısı son derece önemliydi. Örneğin bir resimde tablete çok güçlü (projektörle) bir ışık verilmişti ama yansımalar nedeniyle bazı detaylar fark edilemiyordu. Özetle her resim tabletin farklı detaylarını veriyordu. Bu arada [YBC 7289](#) no’lu tabletin resimleri için gösterilen özenin bu tablette gösterilememiş olması, bizim için çok büyük bir talihsizlik ama diğerleri için daha da büyük bir talihsizlik oldu. Çünkü aşağıdaki bulgum bunu kesinlikle doğrular niteliktedir!

**Bulgu 1.** Demek ki zamanında dikkat edememişim ve yorumculara güvendiğimden olsa gerek, o sırada şimdiye kimsenin kadar fark edemediği şu bulguyla karşılaştım:



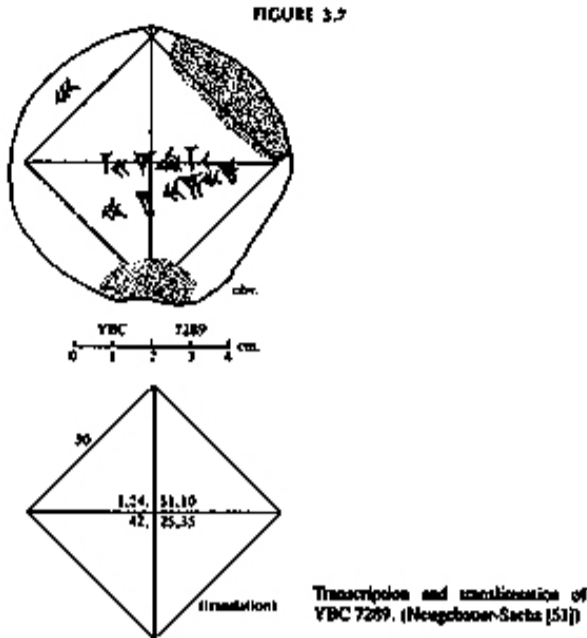
**Resim 7.** Plimpton 322 no’lu tabletindeki 4. Satır-4. Sütun’daki Sayı:  $1; 50[+3], 10, 29, 32, 52, 16$  (Columbia Üniversitesi Kütüphaneleri, Plimpton Kütüphanesi, 20.02.2008, Giriş Saati: 17:43:40, Keşif Saati: 18:08). [Robson](#), “1” in en iyi görüldüğü yerin 4. ve 12. satırlarda olduğunu söyler (Bkz. “[Words and Pictures: New Light on Plimpton 322](#)”, *The Mathematical Association of America, Monthly* 109, S. 105, Şekil 1). Fakat buradaki keşim [Robson](#)’dan değil [Neugebauer](#)’den kaynaklanıyordu. Çünkü [Neugebauer](#)’in (1951) [37. sayfa](#)daki tablodaki 10., 11., 12. ve 14. satırdakilerin başında “1” rakamını okurken 4. satırdakini görememesi (ki üstelik bu satırda daha güç okumalar yapmıştı. Örneğin “50” rakamı güç-bela okunabilirken “3” rakamı hiç okunamamaktadır ve sonraki “10” rakamını zayıf bir şekilde görmüştü), beni gerçekten şaşırtmıştı ama 14. satırda gördüğünü söylediği “1” in [Bill Casselman](#) tarafından tekrar görülmesi beni heyecanlandırmıştı (ki siz bu heyecanımı [Resim 1.3.13](#)’tekiyle karşılaştırabilirsiniz. Bendeki şu şansa bakın: [Neugebauer](#)’i ketum zannedirdim ama [Romberg](#) daha ketummuş. Bkz. “[A Mathematician’s Journeys: Otto Neugebauer and Modern Transformations of Ancient Science](#)”). İşte bu yüzden Plimpton Kütüphanesi’ne girdim ve “1” in hangi satırlarda mevcut olduğunu araştırmaya başladım!

Yukarıdaki ilk resim anılan tarihteki tabletin 4. Satır-4. Sütun’undaki sayısına ait orijinal resimdir ve onun altındakiyse bu orijinal resmin Adobe Photoshop ile 2 kat büyüttüğüm halidir (Bkz. “[This Ancient Babylonian Tablet Proves the Greeks Did Not Invent Trigonometry](#)”). Linkteki sayfadaki ilk resme göre yukarıdaki imajlarda Photoshop ile herhangi bir oynama olmamıştır. Dr. [Daniel Mansfield](#)’in 1989. sayfada tabletin bir tablosunu verirken bu noktaya dikkat çeken fotoğrafları vermesi iyi olurdu. Bkz. “[Plimpton 322: A Study of Rectangles, 2021](#)”, S. 988). [Neugebauer](#) bu sayıyı okurken 1’i okuyamadığını ama var olması gerektiğini, 1’den sonra gelen 53 rakamındaki 50’yi tamamen, 10 rakamını zayıf bir şekilde ve sonraki rakamları ise tamamen gördüğünü söylüyor. Fakat 50 rakamını okuyan [Neugebauer](#) nasıl oluyor da ondan önceki 1 rakamını göremiyor diye insanın hayıflanmaması mümkün değil. Çünkü eğer burada bir halüsinasyon görmüyorsam, ki öyledir ve bu görüntü tabletteki herhangi bir kırıklıktan da meydana gelmiş değildir, 1 rakamı kendini açık bir şekilde gösteriyor: Dikkat ederseniz 1 rakamı, 50’nin hemen solunda bütün gövdesiyle birlikte her 2 resimde adeta “*Ben buradayım, arkadaş. Ama sen okuyamıyorsan ben ne yapayım!*” diyor (Bkz. [Resim 1](#), [Resim 2](#). Her 2 resimde “1” rakamının en iyi görüldüğü yer 4. Satır-4. Sütun’dur). Bununla birlikte son sütundaki 2. ve 3. satırlarda elle yazıldığı anlaşılan “53, K, 55, 1426” karakterlerini okudum. Bunlardan “1426” sayısı 3. satırdaki sayının son rakamı olan 45’in üzerinde açıkça okunabilirken diğer karakterler görülmüyordu; onları ancak Photoshop ile güç-bela okuyabildim (ki şimdi bu karakterler silinmiş durumdadır. Bkz. [Resim 2](#). Tabletın tüm yüzlerinin gösterildiği bu resimde tabletin arkasında 4 farklı yazıt vardır. Diğerleri silinmeye yüz tuttuğu için sadece “PLIMTON LIBRARY” yazısı okunabiliyor). Muhtemelen keşfedildikten hemen sonra tablete konulan ilk envanter numara bu idi!

Şu hâlde bu bulgularına göre [Plimpton 322](#) no’lu tabletin 4. Satır-4. Sütun’daki sayının başındaki “1” rakamının açık bir şekilde görüldüğü, dolayısıyla son sütundaki diğer sayıların da “1” rakamıyla başlaması gerektiği sonucu çıkar. Özetle [Bill Casselman](#) 2003’te Plimpton 322 no’lu tabletin [14. Satır-4. Sütun](#)’daki sayının başında “1” rakamını okurken, [Neugebauer](#)’in 1949’daki okumasını kullanan [Eli Maor](#) 2007’de [Tablo 1.1](#)’de 10, 11, 12. ve 14. satırlarda “1” in mevcut olduğunu tekrarlamış ve ben de yukarıdaki resimde 4. Satır-4. Sütun’un başındaki “1” rakamının mevcut olduğunu ispat ettim. Ama şimdi, 2011 tarihli “[Plimpton 322: A Review And A Different Perspective](#)” makalesini yazan [John P. Britton](#), [Christine Proust](#) ve [Steve Shnider](#), [Tablo 1](#)’de 1-4. ve 10-11. satırlar hariç diğer satırlarda “1” in okunabildiğini bildiriyorlar. Demek ki tabletin sol tarafı kötü bir şekilde kırılmış ya da daha doğrusu, tam kırılmamışlar. Çünkü bu kırıklık [2. sütun başında hat boyunca görülen kırıklığa](#) hiç benzemiyor!

**2. Tabletın Son Sütunundaki “0” Rakamı Hakkında.** Öncelikle bu konuda yorumcuların Eski Babil tabletlerindeki “0” rakamını okuyuşlarına ve sonuçlarına kısaca bir göz atarak başlayalım işe. Eski Babil tabletlerinde eğer sıfır rakamı bir sayının ara basamaklarından birindeyse, bir karakterlik boşlukla sıfırın yeri belirtildiğinden okuma sorunu yoktu (Bkz. “[Plimpton 322: A Universal Cuneiform Table For Old Babylonian Mathematicians, Builders, Surveyors And Teachers](#)”, S. 4). Örneğin [Plimpton 322](#) no’lu tabletinde 2 tane böyle boşluk vardır ve ilk zamanlarda bu boşlukların sıfır rakamını gösterdiği birçok yorumcu tarafından kabul görmemişti. Çünkü Sıfır’ın Tarihçesi’ne göre bu mümkün değildi. Dolayısıyla bu ve diğer tabletlerdeki sıfır rakamı yerine konulan boşlukların onlara göre bir anlamı yoktu. Daha sonra yapılan detaylı araştırmalarda bu boşlukların sıfır rakamı yerine konduğu anlaşıldıysa da günümüzde hâlâ buna muhalefet eden

Batılı büyük bir kitle mevcuttur (Bkz. [“Note: The scribe does not use zero, California State University, Los Angeles”](#)). Bu link şimdi ölü durumdadır ama 2008'de Plimpton 322'deki anılan sıfırların kabul edilmediğini görmüştüm. Günümüzde ise şu sayfaya bakabilirsiniz: [“Ancient Babylonian Number System Had No Zero”](#). Araştırırsanız bunlardan mebzul miktarda bulabilirsiniz. Sizce hepsinin İngiliz ve Amerikan olması tesadüf mü?).



Şekil 9. YBC 7289 no'lu tabletteki sayıların Neugebauer ve Sachs tarafından okunması. Onlar 1945'te karenin bir kenar uzunluğunu yanlış okuduklarından doğal olarak köşegen uzunluğunu da yanlış okumuş oldular!

İkinci olarak eğer sıfır rakamı bir sayının başında ise, ki ara basamaklarından birinde olduğunda bile sıkı bir muhalefet vardı, probleme göre okuma sorunu vardı. Örneğin [Standart Ters Sayılar Tablosu](#)'ndaki 2'den 81'e kadar olan düzgün sayıların terslerinin "0" rakamı ile başladığı açık iken [YBC 7289](#) no'lu tabletindeki karenin bir kenar uzunluğunu veren sayıyı okumada problem vardı. Çünkü bu tabletteki karenin bir kenar uzunluğunu veren sayıyı "30" değil de 2'nin tersi olan "0;30"u okuyabilmeniz için epeyce sağlam delillere sahip olmanız gerekiyordu ve bu da ancak tabletin tam bir analizi yapıldıktan sonra anlaşılabilirdi. Dolayısıyla bu tableti ilk kez okuyup yorumlayan [Neugebauer](#) ve [Sachs](#)'ın böyle bir analize girmeden, doğrudan problemin içine dalmaları nedeniyle karenin kenarındaki sayıyı "0;30" değil yandaki şekilde gördüğünüz gibi yanlışlıkla "30" olarak okumaları açık bir hatayı göstermekteydi (ki şimdi bunun doğrusunu [Resim 1.3.5](#)'te tamamen sağlam delillerle görebilirsiniz). Özetle tabletteki bu sayılar 0;30 ve 0;42,25,35 olmalıdır (ki "0" rakamı başta olduğunda 1;24,51,10'un altına 0;42,25,35 yazılırken konum gereği 42'nin 24'ün altına yazılması gerekirdi ama bu durumda 0;42,25,35 sayısı karenin ve hatta tabletin dışına çıkacaktı. Bu, "0" başta olduğunda neden güç bir şekilde okunduğunu gösteren güzel bir örnektir).

Diğer taraftan aynı araştırmacıların incelediği bir başka muhteşem tablet olan [Plimpton 322](#) no'lu tabletindeki, hiç olmazsa, son sütuna yakından bir göz atalım. Çünkü "0" rakamının kullanımı nedeniyle orada da çok ilginç gelişmeler var. Bunun için öncelikle [Plimpton 322](#) no'lu tabletin son sütun başlığının,

**“(Robson) Köşegen kareden (İB.SI şiliptim) 1 çekildiğinde (çıkarıldığında) kısa kenar kare (İB.SI SAG), daha doğrusu kısa kenar kareye 1 br<sup>2</sup> eklendiğinde köşegen kare gelir ([ta]-ki-il-ti-şi-li-ip-tim [şa 1 in]-na-as-sà-hu-ma SAG i-il-lu-ú)”**

çözümlemiş şeklini göz önüne alırsak [163]'teki kural geçerli olur (bkz. [“Neither Sherlock Holmes nor Babylon: A Reassessment of Plimpton 322”](#), S. 192) ve bu durumda şu sonuçlar çıkar: 1. Satır-4. Sütun'daki

$$[164] \quad \left(\frac{r_1}{h_1}\right)^2 = 1 + \left(\frac{a_1}{h_1}\right)^2 = 1 + \left(\frac{119}{120}\right)^2 = 1 + 0;59,0,15 = 1;59,0,15$$

sayısının hesabında 0 rakamının kullanımı 2 farklı yerde karşımıza çıkar. İlk sütun başlığında verilen hesap kuralı nedeniyle 0;59,0,15 sayısının başında (tam kısmında) 0 rakamı vardır. İkinci olarak hem bu sayının hem de kural nedeniyle bu sayının 1 ile toplamından elde edilen 1;59,0,15 sayısının 3600'de 1'ler basamağında 0 rakamı bulunmaktadır. Fakat tabletin bu bölümü hasarlı olduğundan bu sayıdaki 0 rakamına karşılık gelen boşluk belli-belirsiz görülmektedir. Dolayısıyla oraya 0 için konulan boşluk açık bir şekilde görülemiyor (Bkz. [“5.5.2009, 02:00”](#), S. 10-12).

Aynı şekilde 13. Satır-4. Sütun'daki

$$[165] \quad \left(\frac{r_{13}}{h_{13}}\right)^2 = 1 + \left(\frac{a_{13}}{h_{13}}\right)^2 = 1 + \left(\frac{161}{240}\right)^2 = 1 + 0;27,0,3,45 = 1;27,0,3,45$$

sayısında da 0 rakamı aynı pozisyonlara sahiptir (Bkz. [“5.5.2009, 02:00”](#), S. 13). Ancak bu sayının bulunduğu bölüm hasarsız olduğundan buradaki 0 rakamı için konulan boşluk büyükçe, adeta kabak gibi görülmektedir. Ben bu durumu tablette ilk gördüğümde (ki 0 rakamını en anlamlı gördüğüm ilk yer burasıydı), aklıma 13'ün uğursuz değil uğurlu bir sayı olduğu gelmişti!

Şimdi bu bulgulara göre artık sıfırın kısa bir tarihçesini rahat rahat verebilirim:

**“0”ın Kısa Bir Tarihçesi.** [Plimpton 322](#) ve [YBC 7289](#) no'lu tabletlerinde bulgulara göre “0” rakamı, herhangi bir sembol kullanılmadan ama bir boşluk kullanılarak, ilk kez günümüzden yaklaşık 4,000 yıl önce Mezopotamya'nın güneyinde kullanıldı (ki bu Sümerliler ile daha da geriye gider) ve MS 3. yy'da Selökidler eski nesillerin bu geleneğinden vazgeçerek sıfır için bir sembol icat ettiler! Buna göre 60 tabanındaki “0” rakamı her tabanda sıfırdır ve bu durumda sıfırı icat ettikleri söylenen MÖ 450'de Mayalar, MS 150'de [Ptolemy \(Batlamyus\)](#), 800'de Hintliler, 1143'te [Harezmi](#) olmak üzere hepsi çizgi dışında kalırlar (ki [Georges Ifrah](#)'ın sıfır hakkındaki düşüncelerine tamamen katılmasam da [“Çakıl Taşlarından Babil Kulesine: Rakamların Evrensel Tarihi II”](#) adlı kitabının 181-185. sayfalarındaki [“Babililerin Sıfırı Nasıl Doğdu?”](#) parçasını okumanızı salık veriririm).

İşte bu sonuç Batılıların emperyalist politikaları gereğince eski Babil tabletlerinde ısrarla neden “sıfır yok!” dediklerini açıklar. Bunun arka planını öğrenebilmeniz için tarihçi [Cengiz Özakıncı](#)'nın [“Antik Yunan Yüceltiminin Türk Karşıtı Tarihsel Kökenleri”](#)ne ve ilgili diğer videolarına bakabilirsiniz.

**3. Tabletteki Hatalı Rakamlar.** Tablette Tablo 12'de kırmızı renkle vurguladığım toplam 5 tane hata vardır. Bunlardan 15. Satır-2. Sütun'daki “53” sayısının neden hatalı yazıldığını 6. maddede açıkladım. Diğerlerini kolaydan zora doğru açıklarsam ilkin 8. Satır-4. Sütun'da “59” hatalı rakamı  $1 + \left(\frac{a_8}{h_8}\right)^2$  hesabı yapılırken kâtip son sütuna

$$[166] \quad 1 + \left(\frac{a_8}{h_8}\right)^2 = 1 + \left(\frac{799}{960}\right)^2 = 1;41,33,45,14,3,45$$

yazması gerekirken yanlışlıkla  $45 + 14 = 59$  toplamış ve bunu  $45,14$ 'ün yerine yazmıştır (Bkz. "[5.5.2009, 02:00](#)", S. 6). Aynı şekilde 9. Satır-3. Sütun'daki "9" hatalı rakamı da  $8 + 1 = 9$  toplamından gelir (Bkz. "[5.5.2009, 02:00](#)", S. 6). Çünkü

$$[167] \quad a_9 = p_9^2 - q_9^2 = 25^2 - 12^2 = (25 - 12)(25 + 12) = 13.37 = 8,1.$$

Dördüncü olarak 13. Satır-3. Sütun'daki "7,12,1" hatalı sayısı

$$[168] \quad a_{13} = p_{13}^2 - q_{13}^2 = 15^2 - 8^2 = (15 - 8)(15 + 8) = 7.23 = 2,41$$

elde edildikten sonra son sütundaki  $1 + \left(\frac{a_{13}}{h_{13}}\right)^2$  işlemi için

$$[169] \quad a_{13}^2 = 2,41^2 = 7,12,1$$

sayısı kâtip tarafından yanlışlıkla 3. sütuna yazılmıştır (Bkz. "[5.5.2009, 02:00](#)", S. 6).

İşte bu sonuçla Plimpton 322 no'lu tabletindeki  $(a_n, h_n, r_n)$  dik üçgenlerinin kenarlarının uzunlukları bu şekilde bulduktan sonra son sütun için  $a_n^2$  ve  $h_n^2$  sayıları hesaplanıp  $\frac{a_n^2}{h_n^2} = \left(\frac{a_n}{h_n}\right)^2$  oranlarının belirlenmesiyle, Tablo 12'deki son sütun başlığında açıklandığı gibi,  $\left(\frac{a_n}{h_n}\right)^2$  oranlarına 1 eklenerek  $1 + \left(\frac{a_n}{h_n}\right)^2 = \left(\frac{r_n}{h_n}\right)^2$  köşegen kare kenarlarının uzunlukları bulunmaktaydı. Bunu kanıtlayan biricik delil, 13. Satır-3. Sütun'a yanlışlıkla "7,12,1" sayısının yazılmasıdır. Demek ki  $(a_{13}, h_{13}, r_{13})$  dik üçgeninin kenarlarının uzunlukları [81]'deki ([58])'deki formüllere göre bulduktan sonra son sütun için  $a_{13}^2$  ve  $h_{13}^2$  sayıları hesaplanıp  $\frac{a_{13}^2}{h_{13}^2} = \left(\frac{a_{13}}{h_{13}}\right)^2$  oranı belirlenmiş, bu oran aynı zamanda son sütundaki sayının kesir kısmıdır. Ancak bu oran belirlenirken  $a_{13}^2$  sayısı yanlışlıkla bir önceki sütuna yazılmıştır!

Beşinci ve son olarak 2. Satır-2. Sütun'daki "3,12,1" hatalı sayısı Avustralyalı matematikçi **R. J. Gillings** tarafından (ki kendisi "[Fıravunlar Zamanındaki Matematik \(Mathematics in Time of Pharaohs\)](#)" adlı son derece önemli bir kitap yazmıştır) şöyle keşfedilmiştir (Bkz. "[Unexplained Errors in Babylonian Cuneiform Tablet Plimpton 322 \(Plimpton 322 No'lu Tabletinde Açıklanamayan Hatalar\)](#)", *Australian Journal of Science* 16, 1953): 2. Satır-2. Sütun'daki sayı  $p_2 = 1,4 (= 64)$  ve  $q_2 = 27$  doğuranlarıyla [164]'teki 2. özdeşliğe göre

$$[170] \quad r_2 = p_2^2 + q_2^2 = (p_2 + q_2)^2 - 2p_2q_2 = (1,4 + 27)^2 - 2.1,4.27 = 1,31^2 - 2.1,4.27 = 2,18,1 - 57,36 = 1,20,25$$

olması gerekirken çift hatayla "3,12,1" olarak yazılmıştır.

Kâtip bu hesapta özdeşlikteki "-" işaretini [173]'teki 1. özdeşlikteki işaretle karıştırmış ve "+" almış ve sonra 2. terimdeki 1,4 yerine 1,0 almış ve yanlışlıkla şu sonucu bulmuştur (Bkz. "[5.5.2009, 02:00](#)", S. 5):

$$[171] \quad r_2 = p_2^2 + q_2^2 = (p_2 + q_2)^2 + 2p_2q_2 = (1,4 + 27)^2 + 2.1,0.27 = 1,31^2 + 2.1,0.27 = 2,18,1 + 54,0 = 3,12,1.$$

Fakat kâtipin çift hatayla bulduğu bu sonuçla [173]'teki 2. özdeşliği kullanmış olduğunu öğreniyoruz. Günümüzde "İki Kare Toplamı" olarak bilinen [173]'teki özdeşlikleri 8. Sınıf ve hatta 10. Sınıf matematik ders kitaplarında kullanıyoruz (Bkz. "[Özdeşlikler ve Özdeşlik Modelleri](#)").

**Not 7. Neugebauer** tabletin 2. Satır-4. Sütun'undaki sayının kesir kısmındaki "50" ve "6" rakamlarının bitişik yazılması nedeniyle "56" gibi okunması gerektiği belirtmiş ama bunu bir hata olarak algılamamıştır (Bkz. "[Plimpton 322: A Universal Cuneiform Table For Old Babylonian Mathematicians, Builders, Surveyors And Teachers](#)", S. 25. **Rudolf Hajosy** tabletin çok küçük olması nedeniyle "50" ve "6" rakamları yerine yanlışlıkla "56" yazıldığını söyler ama bu 2 rakam arasındaki "50"deki ve "6"yı "06" yazarak her 2 rakamdaki sıfırları temsil eden boşluğun tabletin küçük olmasından dolayı konulamadığını söylemesi absürt kaçtı). Tablo 12'de ben de öyle yaptım ve oradaki sayıyı "1;56,56,58,14,50,6,15" şeklinde yazdım!

**4. Tablo 17'deki Dik Üçgenlerin Doğuranlarının Bulunması Hakkında.** Plimpton 322 no'lu tabletteki dik üçgenlerin Tablo 13'teki doğuranları ilk kez **Neugebauer** ve **Sachs** tarafından 1945'te verilmiştir (Bkz. "[Matematiksel Çivi Yazıtları, New Heaven, Conn., 1945](#)", S. 40'teki 2. tablo). **Neugebauer** aynı tabloda  $p$  ve  $q$  doğuranlarını  $2^\alpha 3^\beta 5^\gamma = (\alpha, \beta, \gamma)$  sıralı üçlü olarak ayrıca vermiştir.

**Neugebauer**'in  $p$  ve  $q$  doğuranlarını bulması şöyle olmuştur: İlk tablet üzerindeki sayıları okuyarak 38. sayfadaki tabloyu ya da buradaki Tablo 12'yi buldu ya da keşfetti ve fazladan, bu tablodaki  $a_n$  ve  $r_n$  değerlerine göre [76]'dan  $h_n$  yüksekliklerini bularak 40. sayfadaki ilk tabloyu hazırladı. Sonra **Ray Creighton Buck**'in anlattığı gibi

$$[172] \quad r_n + a_n = 2p_n^2, r_n - a_n = 2q_n^2$$

eşitliklerinden  $p_n$  ve  $q_n$ 'leri buldu ya da keşfetti (Bkz. "[Sherlock Holmes Babil'de \(Sherlock Holmes In Babylon\), 1980](#)", S. 341. **Buck** bu eşitlikleri  $C + B = 2a^2$  ve  $C - B = 2b^2$  olarak verir). Bununla birlikte 39. sayfada tabletteki dik üçgenleri gösteren  $(b, \ell, d)$  sıralı üçlülerine göre alttaki eğri  $\frac{d}{\ell} - 1$ , ortadaki eğri  $\frac{d^2}{\ell^2} - 1$  ve üstteki eğri  $\frac{b}{\ell}$  olmak üzere bir grafik sunumu yapar ve (1)'deki  $\ell^2 + b^2 = d^2$  Pisagor bağıntısındaki tam sayılı  $b, \ell, d$ 'nin birer yaklaşıklık olmadığını ve "Son sütundaki sayıların önceki sayılarla tam bir ilişkisi yoktur, sadece şeklimizdeki (Şekil 2) yatay eksen üzerindeki birimler gibi adımların sayısını gösterir. Önlerindeki 'ki' onlara sıra sayıları karakterini vermektedir" olduğunu söyler. Yani **Neugebauer**'in Tablo 13'teki  $p_n$  ve  $q_n$  doğuranlarının, dolayısıyla tabletteki  $(a_n, h_n, r_n)$  dik üçgenlerinin nasıl elde edildiği hakkında bir bilgisi yoktur!

**Bir Doktora Tezi.** Ben bu keşif çalışmasının 4. bölümünde çalışırken 34. sayfaya geldiğimde, 27.07.2006, 23:23:34'te **Manuel Benito Muñoz**'un "[Birkaç Diofant Problemi \(Algunos problemas diofánticos\)](#)" adlı doktora tezini bilgisayarıma indirdim ve  $(x, y, z)$  dik üçgenlerini  $x < 15000$ 'e kadar bilgisayarla araştırmış ve buradaki Tablo 17'yi 9. sayfada vermiş olduğunu gördüm. **Muñoz** Tablo 17'ye karşılık gelen bu tablo için  $x < 15000$  düzgün ve  $(\alpha, \beta, \gamma) = (7, 4, 3)$ 'ten büyük olmayan  $(x, y, z)$  Pisagor üçlülerini araştırdığını söyler. Ayrıca **Abdulrahman A. Abdulaziz** "[The Plimpton 322 Tablet and Babylonian Method of Generating Pythagorean Triples](#)" makalesinin 11. sayfasında başlayan "4. Tabloyu Tamamlamak İçin Muhtemel Yollar (4. Possible Ways to Complete the Table)" başlığının

altında  $(w, \ell, d)$  Pisagor üçlüleri için  $w < \ell < d < 20000$  olmak üzere  $\ell < 15000$  düzgün sayıları ve  $EBOB(\ell, d) = 1$  ve  $\frac{d^2}{\ell^2} = 2$  geçerli olduğunu söyler ve 14. sayfada buradaki Tablo 17'ye karşılık gelen Tablo 6'yı verir (ki böyle birçok makale mevcuttur. Örneğin **James M. Parks**, "[Pirimitif Pisagor Üçlüleri'nin \(PPT\) Grafiklerindeki Kavisli Desenler Üzerine](#)" makalesinin devamı olan "[Pisagor Üçlülerini Hesaplama](#)"da  $(a, b, c)$  Pisagor üçlüleri için 14. sayfada  $a, b < 1000$  ve 15-16. sayfalarında  $a, b < 10000$ 'e kadar araştırır).

**Muñoz**'un doktora tezi 4 bölümden oluşur ve bu bölümler kısaca şöyle tanıtılmaktadır (Bkz. "[Some Diophantine problems](#)"): "Özellikle, 1. Bölüm Diofant aritmetiği ve Plimpton 322 tableti üzerine 2 kısa tarihsel notla başlamakta ve 2. Bölüm'de  $n$ 'den küçük ayaklı Pisagor üçgenlerinin sayısının incelenmesiyle devam etmektedir. Bu bölümün bir kısmı *Journal of Computational and Applied Mathematics* dergisinde yayınlanan "Pythagorean triangles with legs less than  $n$ " makalesinde toplanmıştır.

Bölüm 3'te  $M(n) = \sum_{m=1}^n \mu(m)$  fonksiyonunu inceledik. Bunun üzerine **Mertens**  $M(x) < \sqrt{x}$ 'i tahmin eder. **Odlyzco** ve **te Riele** [35]'te bu varsayımın yanlış olduğunu kanıtladılar, ancak açık bir karşı örnek vermediler. Mevcut hesaplama zorluklarından biri **Mertens**'in varsayımına açık bir karşı örnek bulmaktır. **Odlyzco** ve **te Riele**,  $x$ 'in  $10^{20}$ 'den küçük değerleri için bir karşı örnek olmadığını öngörmüştür.

Bölüm 4'te, Bölüm 3'te oluşturulan yinelenen formüllerden birine dayanarak,  $\mu$ ,  $M$  ve  $\phi$ 'ye benzer ve tamsayı değerleri almak yerine Gauss tamsayı değerleri alan fonksiyonlar tanımlıyoruz. Bu yeni fonksiyonlar için çeşitli tekrarlayan formüller ve boyutlar oluşturuyoruz."

Şu tesadüfe bakın ki ben de bu keşif çalışmama 2 tarihsel tabletle (Çatalhöyük ve Plimpton 322 no'lu tabletler) başladım ve **Muñoz** tezinin ilk bölümünde

1. Giriş. 2 Tarihsel Not (Introducción. Dos notas históricas).....	1
1.1. <b>Diofant</b> 'ta Pisagor Bağıntısı (Ternas pitagóricas en Diofanto).....	2
1.2. Plimpton 322 no'lu tablet (La tablilla Plimpton 322).....	6
giriş çalışmalarını yaptıktan sonra 2. bölümde $(x, y, z)$ dik üçgenlerini nasıl bulduğunu yüksek matematik vasıtalarını kullanarak anlatır:	
2. $n$ 'den Küçük Pisagor Üçlüleri Listeleri (Ternas pitagóricas de catetos $< n$ ).....	11
2.1. Giriş (Introducción).....	11
2.2. Bir İlk Tahmin (Una primera estimación).....	15
2.3. Tahmini İyileştirme Girişimi (Intentando mejorar la estimación).....	21
2.4. $\overline{P}_n$ ve $\overline{T}_n$ 'nin Tam Değerleri (Valores exactos de $\overline{P}_n$ y $\overline{T}_n$ ).....	38

Benim şansım **Julio Iglesias**'in amcasının, "[Mi suerte dijo si \(Şansım 'Evet' dedi\)](#)" dediği gibi **Muñoz**'un makalesini aldıktan sonra 10. günde açıldı (Bkz. "[YBC 7289 No'lu Tabletin 2. Çözümü](#)", Önsöz, Dipnot 1. Bu çözüm **E. F. Robertson**'un 2000'de önerdiği alternatif bir çözümdür ama bu çözüm ilk kez 1865'te verilmişti. Bkz. "[Babilonya Matematiğinde Pisagor Teoremi](#)". Bu makalenin PDF'si için [şuraya](#) bakabilirsiniz. **Tom Zara** aynı çözümü "[A Brief Study of Some Aspects of Babylonian Mathematics](#)" makalesinin 16-17. sayfalarında verir. Fakat bu çözüm YBC 7289 no'lu tableti için gerçek bir çözüm değil ve aynı çözümü ya da sonuçları [BM 15285](#) no'lu tablete göre [Tablo 1.1.2](#)'de vermem tarihsel bir taban kazandırmaktan başka bir şey değildi. Aslında bu makalemle birlikte "[YBC 7289 No'lu Tablet](#)"te 4 farklı çözüm verdim ve elimde 2 çözüm daha var. Burada şu durum dikkatimi çekti: YBC 10529 no'lu tabletteki sayıları [Tablo 1.4.2](#)'de verirken Dr. **Daniel Mansfield**'in "[Mesopotamian square root approximation by a sequence of rectangles](#)" makalesinin 181. sayfasındaki [Tablo 3](#)'üyle aynı vermişim ve ikimiz de 2023'te yayınlamışız ama ben makalemi 03.02.2023'te ve o da [02.09.2023](#)'te verdiği göre demek ki o pişti olmuş).



**Resim 8. Manuel Iglesias** (soldaki) kardeşi **Julio** (sağdaki) ile birlikte. Aralarında büyük uluslararası şarkıcı **Julio Iglesias**'in portresi var. **Julio Iglesias**'in amcası **Manuel Iglesias Sarria y Puga**, 1987'de "[Mi suerte dijo si. Evocación autobiográfica de Guerra y Paz \(Talihimin Güldüğü An. Savaş ve Barış'ın otobiyografik çağrışımı\) \(1918-1936-1945\)](#)" kitabını yayımladı. Fakat rahmetli **Engin Ardıç** "[Hiç kimsenin Hoşuna Gitmeyecek Bir İç Savaş Tarihi \(Una Historia De La Guerra Civil Que No Va A Gustar A Nadie\)](#)" kitabından hareketle yazdığı "[Zil, Şal ve Utanç](#)" makalesinde 1938'in sonunda meşru İspanyol Cumhuriyeti'ni .iç gibi ortada bıraktığımızı söylemişti ve **Manuel Iglesias**, kitabında 1937 Nisan'ında kendisiyle birlikte 712 İspanyol milliyetçisini **Atatürk**'ün kurtardığını söylemez. Çünkü bilmez, onlar Türk Hükümeti tarafından yollanan [Karadeniz vapuru](#)yla kurtulduklarını sanıyorlardı (Bkz. "[Arrivederci Siracusa!](#)". Karadeniz vapurunun bir benzerini "[İspanyolca Haber Bülteni No. 12](#)"deki [1:46](#)'daki **Franco**'nun vapurunda görebilirsiniz. Arriba España! (Yaşasın İspanya!)). Bu sırrı Madrid'teki Büyükelçimiz **Ender Arat** çözmüş ve göreve yeni başladığı günlerde onuruna verilen bir yemek sırasında davetlilere anlatmıştır (Bkz. "[İspanyol iç savaşında Julio Iglesias'm amcasını Türk gemisi Karadeniz kurtarmış](#)"). **Engin Ardıç**'in 2 yıl önce Hürriyet ve diğer gazetelerde yayınlanan bu haberden habersiz olması düşünülemez ama makalelerinden edindiğim izlenimime göre babasının sürgün hayatı yaşaması onu bu iflah olmaz kötü yola düşürdü!

O sırada 35. sayfaya kadar tüm çözüm yollarını tüketmişim ve tam bırakacaktım ki aklıma 06.08.2006, 01:00'da "[4.2.2. Babillilerin Seçme Metodu](#)" geldi ve Tablo 13'teki Plimpton 322 no'lu tabletindeki dik üçgenlerin doğuranlarını bir önceki maddede verdiğim Babilli kâtipin doğuranları hesaplama yöntemi yerine tüm yönleriyle gösteren Tablo 15 ve 16 ile verdim ve devamında **Muñoz**'un tezinin 9. sayfasındaki tablosundaki yani Tablo 17'deki doğuranları sıralı bir şekilde keşfettim!

**5. Tabletteki Dik Üçgenlerin Bulunması Hakkında.** Tablo 12'deki 15 dik üçgeni temsil eden  $n = 1, 2, \dots, 15$  için  $(a_n, h_n, r_n)$  sıralı üçlüleri Tablo 13'teki  $(p_n, q_n)$  doğuranlarına ve Şekil 5'teki  $O_n H_n C_n$  dik üçgenindeki Pisagor bağıntısından elde edilen

$$[173] \quad (p_n - r_n, q_n, r_n) = \left( \frac{p_n^2 - q_n^2}{2p_n}, q_n, \frac{p_n^2 + q_n^2}{2p_n} \right)$$

sıralı üçlüsüne göre (ki  $O_n H_n C_n$  dik üçgenindeki  $(|O_n H_n|, |H_n C_n|, |O_n C_n|) = (p_n - r_n, q_n, r_n)$  sıralı üçlüsünde [78]'deki  $r_n$  yerlerine konursa  $p_n$  ve  $q_n$ 'ye göre yukarıdaki sıralı üçlü elde edilmektedir ve bu sıralı üçlü ya da çözüm Geç Babilonya Dönemi'ne (MÖ 2. yy) ait [BM 34568 no'lu tablette](#) de kullanıldı. Bkz. "[The Plimpton 322 Tablet and Babylonian Method of Generating Pythagorean Triples](#)", S. 31, Şekil 8. Bu şekildeki problem eski Çin'deki "Kırık Bambu Problemi"ne karşılık gelir. Fakat bu problemin en eski şekli Menkaure Piramiti'nde kullanılmıştır. Bkz. "[Menkaure Piramiti'nin Batı Kesiti Görünüşündeki Planı](#)". Çünkü Menkaure piramitinin mimarı, Büyük Piramit'teki 75 RC'lik yükselen koridoru alttaki parçası yatay koridor üzerinde 13 RC olacak şekilde 2 parçaya bölerek azalan koridoru tasarlamıştır. Buna göre eğer "[Plimpton 322 no'lu tabletinde kullanılan Pisagor bağıntısı neydi?](#)" diye unutursanız aklınıza "Kırık Bambu Problemi" gelsin. Belki böyle daha iyi hatırlarsanız!

Bu arada **Kim Dong-Keun** ([김 동근](#))-**Yoon Dae-Won** ([윤 대원](#)) adlı 2 Güney Koreli matematikçinin 2012 tarihli "[Pisagor Üçlüsünü Bulmak. Çeşitli Problem Çözme Yöntemlerini Keşfetmek](#)" makalelerinde Plimpton 322 no'lu tabletindeki Pisagor üçlüleri için 5 yöntemden 4.'sünde **Hatch** ve **Mills**'in 2. dereceden denklemin çözümünün kullanılmasında [172]'yi vermiş olmaları dikkatimi çekti: "4) 2. Dereceden Denklemin Çözümünü Kullanma. Pisagor sayıları  $x, y, z$ 'yi gözlemleyerek ve  $y$ 'nin ardışık tam sayılar olduğu, yani  $y = x + 1$  olduğu durumlar vardır. Daha ileri bir genelleme olarak, **Hatch (1995)** ve **Mills (1996)** Pisagor sayılarını bulmak için bir algoritma sunmuşlardır (Aktaran **Dye & Nickalls, 1998**. Bkz. "[Pisagor Üçlülerini Üretmek İçin Yeni Bir Algoritma](#)"). Algoritmaları şöyledir: Önce  $z = y + b$ , sonra  $x^2 + y^2 = (y + b)^2$  ve sonra  $y = \frac{x^2 - b^2}{2b}$  olsun. O zaman 3 sayı  $x, \frac{x^2 - b^2}{2b}, \frac{x^2 + b^2}{2b}$  olarak ifade edilebilir...". Burada şuna dikkat etmek gerekiyor: **Hatch, Mills, Dye** ve **Nickalls** [172]'yi sadece Pisagor üçlülerini üretmek için kullanırlarken anılan 2 Koreli matematikçi bunu son ikisinden alıp Plimpton 322 no'lu tabletindeki Pisagor üçlülerine uygulamaya çalışırlar)

$$[174] \quad (a_n, h_n, r_n) = 2p_n(p_n - r_n, q_n, r_n) = (p_n^2 - q_n^2, 2p_n q_n, p_n^2 + q_n^2)$$

sıralı üçlüsünden elde edilmektedir. Fakat Babilli kâtip  $(a_n, h_n, r_n)$  sıralı üçlüsünü bulabilmek için bir önceki maddedeki hatalardan görüldüğü üzere  $(p_n - r_n, q_n, r_n)$  sıralı üçlüsünün ilkin  $p_n$  ve sonra 2 katlarını alırken  $p_n^2 - q_n^2$  ve  $p_n^2 + q_n^2$  için [82]'deki 2 kare farkı ve toplamı özdeşliklerini kullanıyordu. Buna göre [172]'deki ikinci sıralı üçlüdeki bileşenleri teker teker birleşik (mürekkep) olarak hesaplarken (ki  $q_n$  birleşik değil tektir)  $p_n$  ve  $q_n$ 'yi biliyor ve  $(p_n^2 - q_n^2, 2p_n q_n, p_n^2 + q_n^2)$  sıralı üçlüsüne erişmeye çalışıyordu (Bkz. "[5.5.2009, 02:00](#)", S. 8-13).

Şimdi tabletteki ya da Tablo 12'deki 2. ve 3. sütunlardaki sayıların nasıl hesaplandığını gösterebilmek için hemen bir örnek vereyim. Babilli kâtip ilk satırdaki ya da  $(a_1, h_1, r_1) = (119, 120, 169)$  sıralı üçlüsünü şöyle hesaplar: Kâtip  $(p_1, q_1) = (12, 5)$  doğuranlarını [173]'teki bileşenlerdeki yerlerine koyar ve [82]'ye göre

$$(p_1 - r_1, q_1, r_1) = \left( \frac{p_1^2 - q_1^2}{2p_1}, q_1, \frac{p_1^2 + q_1^2}{2p_1} \right) = \left( \frac{12^2 - 5^2}{2 \times 12}, 5, \frac{12^2 + 5^2}{2 \times 12} \right) = \left( \frac{(12 - 5)(12 + 5)}{2 \times 12}, 5, \frac{(12 + 5)^2 - 2 \times 12 \times 5}{2 \times 12} \right) = \left( \frac{7 \times 17}{24}, 5, \frac{17^2 - 120}{24} \right) = \left( \frac{119}{24}, 5, \frac{169}{24} \right)$$

sıralı üçlüsünü elde eder ve bu sıralı üçlüdeki 24'ün tersini alarak (ki 24'ün tersi  $24^{-1} = 0; 2,30$ 'dur)

$$\left( \frac{119}{24}, 5, \frac{169}{24} \right) = (119 \times 24^{-1}, 5, 169 \times 24^{-1}) = (119 \times 0; 2,30, 5, 169 \times 0; 2,30) = (4; 57,30,5,7; 2,30)$$

işlemleri sonucunda

$$[175] \quad (p_1 - r_1, q_1, r_1) = (4; 57,30,5,7; 2,30)$$

bulur.

Şimdi kâtip bunun ilkin  $p_1 = 12$  katını alıyor

$$p_1(p_1 - r_1, q_1, r_1) = 12(4; 57,30,5,7; 2,30) = (12 \times 4; 57,30,12 \times 5,12 \times 7; 2,30) = (59; 30,60,1,24; 30)$$

ve sonra bunun da 2 katını alıyor

$$(a_1, h_1, r_1) = (p_1^2 - q_1^2, 2p_1 q_1, p_1^2 + q_1^2) = 2p_1(p_1 - r_1, q_1, r_1) = 2(59; 30,60,1,24; 30) = (2 \times 59; 30,2 \times 60,2 \times 1,24; 30) = (1,59,2,0,2,49)$$

eşitliklerinden ilk satırdaki dik üçgenin kenarlarının uzunluklarını

$$[176] \quad (a_1, h_1, r_1) = (1,59,2,0,2,49)$$

olarak buluyor. Buna göre ilk üçgenin tabanı  $a_1 = 1,59 = 1 \times 60 + 59 = 119$ , yüksekliği  $h_1 = 2,0 = 2 \times 60 + 0 = 120$  ve hipotenüsü  $r_1 = 2,49 = 2 \times 60 + 49 = 169$  olur (Bkz. "[5.5.2009, 02:00](#)", S. 10-12).

Babilli kâtip Tablo 12'deki diğer dik üçgenlerin kenarlarının uzunluklarını 11. dik üçgene kadar bu şekilde buluyor. Çünkü 11. satırda mertlik bozuluyor ve [149]'dan görüldüğü üzere  $m_{11} = \frac{p_{11}}{q_{11}} = 2$ 'dir. Bu orandan  $p_{11}$  ve  $q_{11}$ 'i nasıl seçerseniz seçin  $(a_{11}, h_{11}, r_{11})$  için mutlaka elle bir müdahalede bulunmanız gerekir. Çünkü 2 oranından elde edilen hiçbir  $p_{11} = 2k$  ve  $q_{11} = k$  tam sayılarıyla  $(p_{11}^2 - q_{11}^2, 2p_{11}q_{11}, p_{11}^2 + q_{11}^2)$  sıralı üçlüsünden  $(45,1,0,1,15)$  elde edilemez!

Bu durumda şu çözümler söz konusu olur.

**1. Çözüm.** Eğer  $(p_{11}, q_{11}) = (2,1)$  doğuranlarını alırsanız

$$(p_{11} - r_{11}, q_{11}, r_{11}) = \left( \frac{p_{11}^2 - q_{11}^2}{2p_{11}}, q_{11}, \frac{p_{11}^2 + q_{11}^2}{2p_{11}} \right) = \left( \frac{2^2 - 1^2}{2 \times 2}, 1, \frac{2^2 + 1^2}{2 \times 2} \right) = \left( \frac{(2-1)(2+1)}{2 \times 2}, 1, \frac{(2+1)^2 - 2 \times 2 \times 1}{2.12} \right) = \left( \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4} \right) = (0; 45, 1, 1; 15)$$

ve bu son sıralı üçlünün  $1,0 = 60$  katını alırsak 11. dik üçgenin kenarlarının uzunluklarını

$$[177] \quad (a_{11}, h_{11}, r_{11}) = (45, 1, 0, 1, 15)$$

şeklinde bulmuş oluruz (Bkz. "[5.5.2009, 02:00](#)", S. 1-2, 11-12). Tablo 12'deki 2. ve 3. sütunlardaki tam sayılara göre bu sıralı üçlü yazar görünür ama bu  $(0; 45, 1, 1; 15)$  de olabilir!

**2. Çözüm.** Eğer Tablo 13'e göre  $(p_{11}, q_{11}) = (60, 30)$  doğuranlarını alırsanız [174]'e göre

$$(a_{11}, h_{11}, r_{11}) = (p_{11}^2 - q_{11}^2, 2p_{11}q_{11}, p_{11}^2 + q_{11}^2) = (60^2 - 30^2, 2 \times 60 \times 30, 60^2 + 30^2) = ((60-30)(60+30), 1, 0, 0, (60+30)^2 - 2 \times 60 \times 30) \\ = (30 \times 1, 30, 1, 0, 0, 90^2 - 1, 0, 0) = (45, 0, 1, 0, 2, 15, 0 - 1, 0, 0) = (45, 0, 1, 0, 0, 1, 15, 0)$$

ve bu son sıralı üçlüyü  $1,0 = 60$ 'a bölersek 11. dik üçgenin kenarlarının uzunluklarını yine aynı şekilde buluruz:

$$[178] \quad (a_{11}, h_{11}, r_{11}) = (45, 1, 0, 1, 15).$$

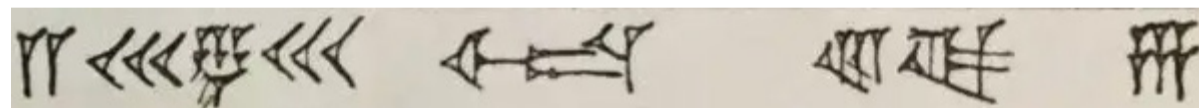
Burada ilk çözümü alıyoruz çünkü 2. çözüme göre daha avantajlıdır. Hem zaten tüm yorumcuların ittifak ettiği çözüm budur! Ayrıca eski Babil dönemine ait [Tell Dhibayi tabletinde](#) alanı  $0;45$  ve bir köşegeni  $1;15$  verilen dikdörtgenin kenarlarının uzunlukları  $p_{11} - r_{11} = 0;45$  ve  $q_{11} = 1$  olarak bulunmuştur (Bkz. "[Babil Matematiği'nde Pisagor Teoremi](#)". Bu çözümün [173]'e göre 2. çözümünü "[5.5.2009, 02:00](#)", S. 1'de bulabilirsiniz).

**Abdulahman A. Abdulaziz** tabletteki 11. satırdaki dik üçgen için şu bilgileri verir (Bkz. "[The Plimpton 322 Tablet and Babylonian Method of Generating Pythagorean Triples](#)", S. 15'in girişi): "İki yöntem arasındaki farkı daha iyi anlamak için 11. ve 15. satırlara daha yakından bakalım. Satır 11 için **Price**  $p = 1,00$  ve  $q = 30$  aldı, böylece  $2pq = 1,00,00$  oldu ve  $(1,00,00,45,00,1,15,00)$  üçlüsünü verdi. Bu biraz yapmacık görünmektedir çünkü  $p = 2$  ve  $q = 1$  alındığında eşdeğer üçlü  $(4,3,5)$  elde edilir. Öte yandan, **Bruins**'in yöntemi  $x = 0;45$  ve  $y = 1;15$  değerlerini verir (Bkz. "[Plimpton 322 No'lu Tabletteki Pisagor Sayıları, 1949](#)"). Bu iki sayı  $\ell = 1$  ile birlikte iyi bilinen  $(1,00,45,15)$  üçlüsünü oluşturduğundan, yazar indirgenmiş  $(4,3,5)$  üçlüsünü elde etmek için sadeleştirme yapmakla uğraşmamıştır. Sadece bu vakaya dayanarak hangi yöntemin kullanıldığına karar vermek zor olsa da, yine de  $r$ -yönteminin neden indirgenmemiş üçlünün sonunda tablette görünen üçlü olduğunu daha iyi açıkladığını düşünüyoruz. Bu görüşü, indirgenmemiş üçlünün  $(1,00,45,15)$  Tell Dhibayi'den [**Baqir**, 1974] başka bir OB (eski Babilonya) metninde bulunabileceği gerçeği ışığında benimsiyoruz. Metin şu problemi ortaya koymakta ve çözmektedir: Köşegeni  $45$  ve alanı  $1,15$  olan dikdörtgenin kenarlarını bulun. Problemin bizim durumumuzla ilgisi sadece hesaplanan kenarların ve köşegenin  $(1,00,45,15)$  üçlüsünü oluşturması değil, daha da önemlisi çözüm algoritması ile  $r$ -yöntemi arasındaki açık benzerliktir [**Friberg**, 1981]."

Şu hâlde Tablo 17'deki 12-16. dik üçgenler ya da bunlara karşılık gelen sıralı üçlüler yukarıda gösterdiğim 1. dik üçgenin sıralı üçlüsündeki gibi bulunur. 18-39. satırlardaki sıralı üçlüler

$$[179] \quad m_{39} < \dots < m_{19} < m_{18} = \frac{p_{18}}{q_{18}} < m_{17} = \frac{p_{17}}{q_{17}} = \sqrt{3} < 1;45 = 1\frac{3}{4}$$

eşitsizliklerinden elde edilen eğimlerden, dolayısıyla doğuranlara göre bulunur. Burada  $\sqrt{3}$ 'e bir yaklaşık olarak verilen  $1;45$  değeri için TMS'deki III. Metin'deki 1. Tablet'teki 27. satırda şöyle bir metin vardır (Bkz. "[E.M. Bruins et M. Rutten: Textes mathématiques de Suse, \(Mémoires de la Mission archéologique en Iran. t. XXXIV\), Ed. P.Geuthner, Paris-1961](#)"):



Şekil 10. SATIR 27: 2;37,30 igi-gub ša SAR (6-genin katsayısı 2;37,20), TEXTE III, Tablette I.

Bu metin TMS 34-Tablet 1-Metin 3'ün 27. satırındadır ve düzgün 6-genin katsayısı yani alanı  $2;37,30$  olarak verilmiştir. **Neugebauer** bu katsayı için şöyle der (Bkz. "[Babil ve Mısır II'si](#)", S. 5): "Başka bir tablet düzgün 6-genini verir ve bundan  $\sqrt{3} \cong 1;45$  yaklaşımı çıkarabilir". Bu nedenle eğer düzgün 6-genin 6 eşkenar üçgene ayrıldığını ve bir eşkenar üçgenin bir kenarının uzunluğunu  $a$  birim alırsanız yukarıdaki metinden şu sonuç elde edilir:

$$[180] \quad A_6 = 6 \times \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cong 2;37,30 a^2 \text{ br}^2.$$

Burada  $\sqrt{3}$  için

$$[181] \quad \sqrt{3} = \sqrt{2^2 - 1} \cong 2 - \frac{1}{2 \times 2} = 2 - \frac{1}{4} = 1\frac{3}{4} = 1;45$$

yaklaşıklığı geçerli olduğundan düzgün 6-genin alanı yaklaşık olarak

$$[182] \quad A_6 = 6 \times \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cong 6 \times \frac{1;45 a^2}{4} = 6 \times 0;26,15 a^2 = 2;37,30 a^2 \text{ br}^2$$

olur.

**Babilli Kâtibin Doğuranları Hesaplama Yöntemi.** Şimdi Plimpton 322 no'lu tabletindeki 15 dik üçgeni doğuran yukarıdaki tablolama yönteminden farklı olarak [Babilli kâtibin](#) hesabına ya da yöntemine göre Tablo 17'deki 18. satırdaki dik üçgeni doğuranların nasıl hesaplandığını göstereceğim. Öncelikle [179]'dan elde edilen

$$[183] \quad m_{18} = \frac{p_{18}}{q_{18}} < \overline{m_{17}} = \sqrt{3} < 1; 45 = \frac{7}{4} = m_{17} \Rightarrow p_{18} < \frac{7}{4}q_{18}$$

eşitsizliğindeki

$$[184] \quad q_{18} = (2,3,4,5,6,8,9,10,12,15,16,18,20,24,25,27,30,32,36,40,45,48,50,54)$$

düzgün sayılarına göre

$$p_{18} < \frac{7}{4}q_{18} = \left(3\frac{1}{2}, 5\frac{1}{4}, 7, 8\frac{3}{4}, 10\frac{1}{2}, 14, 15\frac{3}{4}, 17\frac{1}{2}, 21, 26\frac{1}{4}, 28, 31\frac{1}{2}, 35, 42, 43\frac{3}{4}, 47\frac{1}{4}, 52\frac{1}{2}, 56, 63, 70, 78\frac{3}{4}, 84, 87\frac{1}{2}, 94\frac{1}{2}\right)$$

eşitsizliklerinden

$$[185] \quad p_{18} = (3,5,6,8,10,12,15,16,20,25,27,30,32,40,40,45,50,54,60,64,75,81,81,90)$$

elde edilir. Burada [184]'teki her bir  $q_{18}$  düzgün sayısına karşılık  $p_{18} < \frac{7}{4}q_{18}$  eşitsizliğini gerçekleyen  $EBAS(p_{18})$  düzgün sayısı alınmıştır!

İkinci olarak 18. satırdaki dik üçgeni doğuranların oranı için [184] ve [185]'teki karşılıklı elemanları oranlarsak

$$[186] \quad m_{18} = \frac{p_{18}}{q_{18}} = \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{6}{4}, \frac{8}{5}, \frac{10}{6}, \frac{12}{8}, \frac{15}{9}, \frac{16}{10}, \frac{20}{12}, \frac{25}{15}, \frac{27}{16}, \frac{30}{18}, \frac{32}{20}, \frac{40}{24}, \frac{40}{25}, \frac{45}{27}, \frac{50}{30}, \frac{54}{32}, \frac{60}{36}, \frac{64}{40}, \frac{75}{45}, \frac{81}{48}, \frac{81}{50}, \frac{90}{54}$$

oranları elde edilir ve bunları küçükten büyüğe doğru sıralarsak

$$[187] \quad \frac{3}{2} = \frac{6}{4} = \frac{12}{8} < \frac{8}{5} = \frac{16}{10} = \frac{32}{20} = \frac{40}{25} = \frac{64}{40} < \frac{81}{50} < \frac{5}{3} = \frac{10}{6} = \frac{15}{9} = \frac{20}{12} = \frac{25}{15} = \frac{30}{18} = \frac{40}{24} = \frac{45}{27} = \frac{50}{30} = \frac{60}{36} = \frac{75}{45} = \frac{90}{54} < \frac{27}{16} = \frac{54}{32} = \frac{81}{48}$$

eşitsizlikleri ortaya çıkar.

Fakat  $m_{18}$  bu oranların EBAS'ı olduğundan

$$[188] \quad m_{18} = \frac{p_{18}}{q_{18}} = \frac{27}{16}$$

oranı, dolayısıyla doğuranlar şu şekilde elde edilmiş olur:

$$[189] \quad p_{18} = 27, q_{18} = 16.$$

Bu, Tablo 17'deki 18. satırdaki doğuranlardır ve [187]'deki  $\frac{8}{5} < \frac{81}{50} < \frac{5}{3} < \frac{27}{16}$  oranları 18-21. satırlardaki doğuranların oranları olmasına rağmen bu işlem her oran için tekrar edilir, çünkü 20. satırdaki doğuranların oranı olan  $\frac{25}{16}$  [187]'de mevcut değildir!

Buna göre [Babilli kâtip](#) bir sonraki doğuranların oranı için

$$[190] \quad m_{19} = \frac{p_{19}}{q_{19}} < m_{18} = 1; 41,15 = \frac{27}{16} \Rightarrow p_{19} < \frac{27}{16}q_{19}$$

eşitsizliğindeki

$$[191] \quad q_{19} = (2,3,4,5,6,8,9,10,12,15,16,18,20,24,25,27,30,32,36,40,45,48,50,54)$$

düzgün sayılarına göre

$$p_{19} < \frac{27}{16}q_{19} = \left(3\frac{3}{8}, 5\frac{1}{16}, 6\frac{3}{4}, 8\frac{7}{16}, 10\frac{1}{8}, 13\frac{1}{2}, 15\frac{3}{16}, 16\frac{7}{8}, 20\frac{1}{4}, 25\frac{5}{16}, 27, 30\frac{3}{8}, 33\frac{3}{4}, 40\frac{1}{2}, 42\frac{3}{16}, 45\frac{9}{16}, 50\frac{5}{8}, 54, 60\frac{3}{4}, 67\frac{1}{2}, 75\frac{15}{16}, 81, 84\frac{3}{8}, 91\frac{1}{8}\right)$$

eşitsizliklerinden

$$[192] \quad p_{19} = (3,5,6,8,10,12,15,16,20,25,25,30,32,40,40,45,50,50,60,64,75,80,81,90)$$

elde eder. Burada [191]'deki her bir  $q_{19}$  düzgün sayısına karşılık  $p_{19} < \frac{27}{16}q_{19}$  eşitsizliğini gerçekleyen  $EBAS(p_{19})$  düzgün sayısı alınmıştır!

İkinci olarak 19. satırdaki dik üçgeni doğuranların oranı için [191] ve [192]'deki karşılıklı elemanları oranlarsak

$$[193] \quad m_{19} = \frac{p_{19}}{q_{19}} = \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{6}{4}, \frac{8}{5}, \frac{10}{6}, \frac{12}{8}, \frac{15}{9}, \frac{16}{10}, \frac{20}{12}, \frac{25}{15}, \frac{25}{16}, \frac{30}{18}, \frac{32}{20}, \frac{40}{24}, \frac{40}{25}, \frac{45}{27}, \frac{50}{30}, \frac{50}{32}, \frac{60}{36}, \frac{64}{40}, \frac{75}{45}, \frac{80}{48}, \frac{81}{50}, \frac{90}{54}$$

oranları elde edilir ve bunları küçükten büyüğe doğru sıralarsak

$$[194] \quad \frac{3}{2} = \frac{6}{4} = \frac{12}{8} < \frac{25}{16} = \frac{50}{32} < \frac{8}{5} = \frac{16}{10} = \frac{32}{20} = \frac{40}{25} = \frac{64}{40} < \frac{81}{50} < \frac{5}{3} = \frac{10}{6} = \frac{15}{9} = \frac{20}{12} = \frac{25}{15} = \frac{30}{18} = \frac{40}{24} = \frac{45}{27} = \frac{50}{30} = \frac{60}{36} = \frac{75}{45} = \frac{80}{48} = \frac{90}{54}$$

eşitsizlikleri ortaya çıkar.

Fakat  $m_{19}$  bu oranların EBAS'ı olduğundan

$$[195] \quad m_{19} = \frac{p_{19}}{q_{19}} = \frac{5}{3}$$

oranı, dolayısıyla doğuranlar şu şekilde elde edilmiş olur:

$$[196] \quad p_{19} = 5, q_{19} = 3.$$

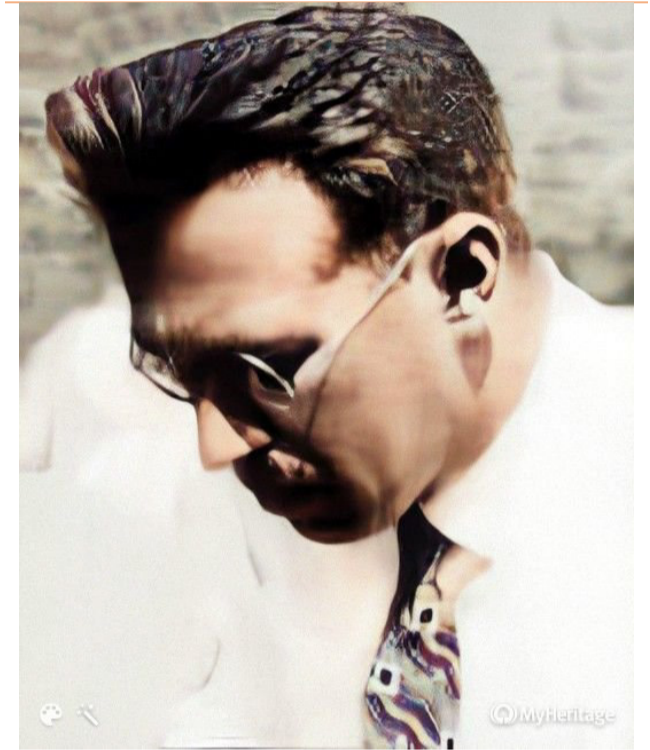
Bu, Tablo 17'deki 19. satırdaki doğuranlardır ve [194]'teki  $\frac{3}{2} < \frac{25}{16} < \frac{8}{5} < \frac{81}{50} < \frac{5}{3}$  oranları 19-23. satırlardaki doğuranların oranlarıdır ve bunlar sıralı olmasına rağmen yine bu işlem her oran için tekrar edilmelidir!

Şimdi Tablo 17'deki 17. satırdaki dik üçgenin doğrularının oranından 18. ve 19. satırlardaki dik üçgenlerin doğuranların oranlarının nasıl elde edildiğini Tablo 15 ve 16'daki gibi değil Babilli kâtibin hesabına göre gösterdim ve aynı şekilde 20-39. satırlardaki doğuranların oranları elde edilebilir. Bu doğuranlardan 3-5. sütunlardaki dik üçgenlere ait  $n = 20, 21, \dots, 39$  için  $(a_n, h_n, r_n) = (p_n^2 - q_n^2, 2p_nq_n, p_n^2 + q_n^2)$  sıralı üçlülerin nasıl elde edildiklerini yukarıda gösterdim. Ancak Babilli kâtip tablete Tablo 17'deki 38 (ki gerçekte 40) dik üçgenden yalnızca ilk 15 tanesini yazdı. Eğer tabletin arkasını da kullanmış olsaydı bu 38 dik üçgenin tamamını yazabilirdi!

**6. Neugebauer'in Tahminleri ve Sonuçları.** Tabletteki sütunlar  $(a_n, h_n, r_n)$  dik üçgenlerine göre oluşturulurken Babillilerin [79]&[80]'deki hem  $m_n$  tek parametrelî çözümü hem de  $p_n$  ve  $q_n$  çifte parametrelî çözümü bildikleri anlaşılmaktadır. Burada önemli olan tabletin 4. sütunundaki sayıların 60 tabanında sonlu olarak yazılabilişiydi ki bu da  $(a_n, h_n, r_n)$  dik üçgenlerine ait  $p_n$  ve  $q_n$  doğuranlarının düzgün sayılar olarak seçilmesiyle yerine getirilmiştir. Buna göre Neugebauer ve Sachs'ın  $p_n$  ve  $q_n$  sayıları düzgün olmak üzere  $m_n = p_nq_n^{-1}$  ve  $m_n^{-1} = p_n^{-1}q_n$  tersinin hesaplanmış olmaları gerektiğine ilişkin tahminlerinin 61 yıl (1945-2006) sonra doğru çıktığını görüyoruz. O hâlde [86], [87] ve [102]'deki  $m_n$  ve  $m_n^{-1}$  oranlarından bazılarının "[Standart Ters Sayılar Cetvelleri](#)"ne uygun düşmesi bir benzerliği, dolayısıyla bu benzerlik de bir yanılgıyı gösterir. Çünkü  $m_n$  ve  $m_n^{-1}$  oranları bir puzzle oyunu sonucunda değil, gerçekten  $p_n$  ve  $q_n$ 'ler ayrı ayrı hesaplanarak bulunmuşlardır!

Bu sonuçla birlikte Neugebauer'in şu son sözlerine de bir bakalım.

"e. [Tarihsel Sonuçlar](#). MKT III'te Babil matematiğinin karakteri hakkında yer alan son matematik açıklamaları şu cümleyi içermektedir: 'Bu nedenle, **bir tür daha temel sayılar teorisinin tanınabilir hale gelmesi beklenebilir** - öyle bir şey ki, eski tarihsel okulun **Pisagoru Babilli** olarak adlandırılabilir (Man wird also erwarten können, dass noch eine Art elementarer Zahlentheorie erkennbar wird -etwa so, dass **pythagoreisch** der älteren historischen Schule besser **babylonisch** wird heißen dürfen)' Bu, burada tartışılan metin tarafından tamamen doğrulanmaktadır. Artık elimizde, zaten iyi bilinen diğer problemlerden organik olarak geliştirilen problemleri ele alan ve tam da Babil sayısal yöntemleri için karakteristik olan araçları kullanarak çözülen, tamamen sayı teorisi karakterli bir metin var.



**Resim 9. Otto Neugebauer (1899-1990)**, 1945 (ki orijinali [surada](#)dır). Oğulun babayı geçmesi hakkında ne düşündüğünü merak etmekten kendimi alamıyorum!

Şimdi **Babil sayılar teorisinin Pisagor sayılarını üretmek için (2) gibi kurullarla, yani 'Elemanlar: 10. Kitap, Önerme 29, Lemma 1' gibi bir teoreme tanışık olduğunuzu** görüyoruz.

Pisagor sayılarının Babil matematiğinin bu bölümü tarafından ele alınan tek problem olarak kalmadığına dair çok az şüphe olabilir. Günümüze ulaşan malzemenin kendisinden bu yönde açık bir ipucuna sahibiz:  $c = 9, 16, 1, 40$  ve  $3, 45$  tabanlarının  $n = 1, 2, \dots, 10$  üsleri için  $c^n$ 'yi veren tablolar var. Tüm bunlar düzgün sayılardır ve yukarıda açıklandığı gibi hem problemleri hem de yöntemleri diğer sayıların ve farklı üslerin kombinasyonlarına genişletmek doğal olacaktır.  $\sum n, \sum n^2$  vb. karelerin incelenmesi de aynı yönde ilerlemektedir. Ayrıntılar ancak yeni metinlerin keşfedilmesiyle ortaya çıkarılabilir, ancak genel yönleri açık görünmektedir.

Özetle, metnimiz Eski Babil matematiğinin farklı bölümlerini, sayıların kendi temel yasalarının araştırılmasıyla birbirine bağlayan son halkayı vermektedir."

Fakat bu açıklamalara göre Neugebauer'in "daha temel bir sayılar teorisi" beklentisi doğru çıkmadı ve "Babil sayılar teorisinin Pisagor üçlülerini üretmek için (2) gibi kurullarla **Öklit**'in **Lemma 1** gibi tanışık olduğunuzu görüyoruz" demesi ise anlaşılır gibi değildir, çünkü tablette tam da bu yapılıyordu!

Neugebauer 24 yıl sonra şu kritiği yapar (Bkz. "[Otto Neugebauer: The Exact Sciences in Antiquity \(1951, 1957, 1969\), 2nd ed./Princeton, NJ: Brown University Press; reprint ed./New York: Dover, 1969](#)", S. 36):

"20. Karenin köşegeninin kenarından belirlenmesine ilişkin yukarıdaki örnek, Pisagor Teoremi'nin **Pisagor**'dan 1000 yıldan fazla bir süre önce bilindiğinin yeterli kanıtıdır. Bu teoremin aynı çağa ve Selevkoslar dönemine ait problem metinlerinde kullanıldığına dair pek çok başka örnek de bunu doğrulamaktadır. Başka bir deyişle, bir dik üçgenin kenar uzunluklarının karelerinin toplamının hipotenüs uzunluğunun karesine eşit olduğu Babil matematiği boyunca bilinmekteydi. Bu geometrik gerçek bir kez keşfedildikten sonra,  $\ell^2 + b^2 = d^2$  bağıntısını sağlayan tüm  $\ell, b$  ve  $d$  sayı üçlülerinin bir dik üçgenin kenarları olarak kullanılabileceğini varsaymak oldukça doğaldır. Ayrıca şu soruyu sormak da normal bir adımdır:  $\ell, b, d$  sayıları yukarıdaki bağıntıyı ne zaman sağlar? Sonuç olarak, Babilli matematikçileri 'Pisagor sayıları' üretmeye yönelik sayı teorisi problemini araştırırken bulmamız çok şaşırtıcı değildir. Pisagor teoreminin 3, 4 ve 5'in Pisagor bağıntısını karşıladığının keşfedilmesinden kaynaklandığı sıklıkla öne sürülmüştür. **Bu kenarlarla üçgenler oluşturma ve bunların dik üçgen olup olmadıklarını araştırma fikrine yol açacak hiçbir neden göremiyorum. Aritmetik ya da cebrik ilişkilerin geometrik bir temsilinin mümkün olduğunu hemen düşünmemiz, yalnızca matematiğe Yunan yaklaşımındaki eğitimimize dayanmaktadır.**

Geometrik teoremin keşfinin doğal olarak ilgili aritmetik problemine yol açtığını söylemek, ikinci problemin gerçekten çözüldüğünü beklemekten çok farklıdır. Bu nedenle, Eski Babil döneminde bu probleme ilişkin geniş kapsamlı bir kavrayışa ulaşıldığını açıkça gösteren bir metne sahip olmamız büyük bir tarihsel ilgi çekicidir. Söz konusu metin New York'taki Columbia Üniversitesi'nin Plimpton Koleksiyonu'na aittir..."

**Neugebauer** yukarıda kırmızıyla vurguladığım yerde özetle, "(3,4,5) üçlüsünün Pisagor bağıntısına neden olabilecek hiçbir neden göremiyorum ve bu düşünce Yunan eğitim sisteminden geliyordu!" diyor ama [Testo 5.6](#)'daki Not 5.6.13'te (3,4,5) üçlüsünün kısa bir tarihçesini anlatırken Khafre Piramiti'nin  $k(3 RC, 4 RC, 5 RC)$  ve hemen ardından Stonehenge'in  $8(5 MY, 12 MY, 13 MY)$  üçlülerine göre inşa edilmiş olduklarını ortaya koyduktan sonra sonuç olarak bu sıralı üçlülerin mimarlıktan matematiğe geçtiklerini ve I. Babil Hanedanlığı'nda bu sıralı üçlülerini veren Pisagor Teoremi'nin matematiksel olarak esaslı bir şekilde incelendiğini belirtmiştim (Bkz. [Testo 5.6](#), S. 57-65). Bu sonuçla birlikte **Neugebauer**'in **Thales** ve **Sokrates** öncesi matematikçileri atlayıp, geometriyi **Ödoksus** ve **Theaetetus** ile başlatması bu değerlendirmeyi eksik bilgilere göre yaptığımı açıklar bize. Aynı şekilde, Orta Çağ yazarı **Proklus**, **Thales**'in, bilgilerini Mısır'dan aldığına inanmış ve matematik tarihini **Thales** ile başlatmıştır. **Plutarkhos**, **Vitruvius** ve yine **Proklus** ise Pisagor Teoremi'ni ve "alan uygulaması" metodunu **Pisagor**'un kendi şahsî keşfi sanmışlardır. Oysa **Thureau-Dangin**, **Taha Baqir**, **Bruins**, **Van der Waerden** gibi dönemin bazı yazarları Mezopotamya ilmini olağanüstü önemde saymaktadırlar (Bkz. "[Mezopotamya'da Geometri](#)").

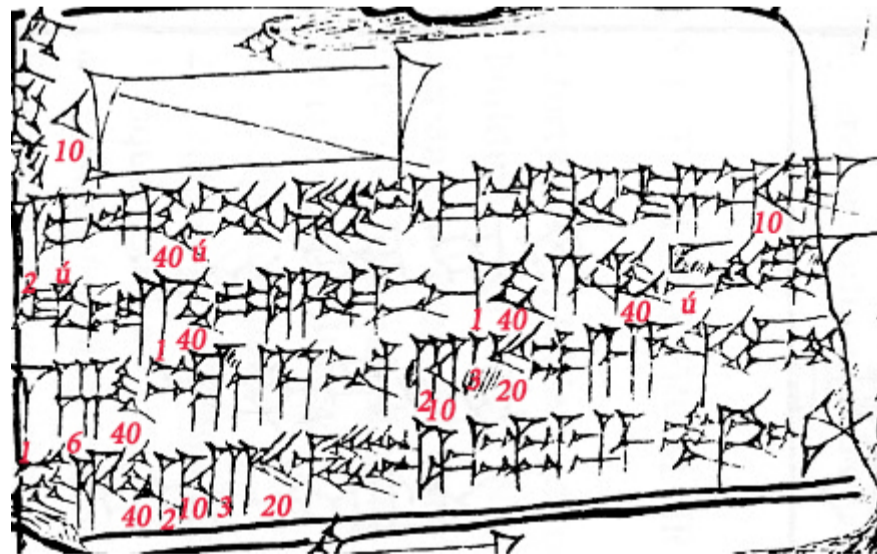
Şimdi **Neugebauer**'in yanıldığını gösterebilmek için eski Babil dönemine ait Sippar'da keşfedilen BM 85194 no'lu tableti örnek olarak vermem yeterlidir (Bkz. "[YBC 7289 No'lu Tablet](#)", S. 3, Resim 1.1.4). Bu tabletteki 21. (ve 22.) problemde çapı 20 Nindan ve çembere en kısa uzaklığı 2 Nindan olan kirişin uzunluğu sorulmaktadır. **Jens Höyrup** bu kirişin uzunluğunu çapı gören çevre açının dik olmasından hareketle (ki bu bilgi **Thales**'in 2. Teoremi olarak biliniyordu) dik üçgende Pisagor bağıntısına göre 12 Nindan olarak gösterir (Bkz. "[Pisagor Kuralı ve Teoremi: Babil ve Yunan Matematiği Arasındaki İlişkinin Aynası](#)", S. 397). Eğer Babillilerin bir dik üçgeni inşa etmeden haberi yoksa bu problemi nasıl çözdüler peki? Bu dik üçgen (12,16,20)'dir ve onun bir dik olduğu çember içinde gösterilerek gayet iyi bilinmektedir. Çünkü Babilli matematikçinin kirişin uzunluğunu bulabilmesi için onun bir dik üçgen olduğunu göstermesi gerekiyordu. Oysa **Neugebauer** hemen yukarıda kırmızı renkle vurguladığım yerde "[Babil matematiğinde Pisagor üçlülerini üretilen üçgenlerin dik üçgen olup olmadıklarını araştırma fikrine yol açacak hiçbir neden göremiyorum. Aritmetik ya da cebrik ilişkilerin geometrik bir temsilinin mümkün olduğunu hemen düşünmemiz, yalnızca matematiğe Yunan yaklaşımındaki eğitimimize dayanmaktadır.](#)" demiş ve BM 85194 no'lu tableti 1935'te MKT I'de incelemişti (Bkz. "[Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences](#)", S. 298-299. BM 85194 no'lu tabletindeki 21. problemin çizimi ve metni [295](#). sayfadadır. Ayrıca BM 85194 no'lu tabletindeki 21-22. problemlerine benzer problemler MS 3049 no'lu tabletinde de mevcuttur. Bkz. S. 307).

#### YBC 7289 No'lu Tablette Düzgün Olmayan Sayılar İçin Yaklaşık Değerlerin Kullanılması Hakkında

**Neugebauer**'in bir diğer eksiği şudur: **Neugebauer 42-43**. sayfalarda YBC 7289 no'lu tabletinde  $\sqrt{2}$  için verilen 1;24,51,10 yaklaşıklığını AGM'e (Aritmetik-Geometrik Ortalamalar Metodu) göre incelerken bu metodun kullanıldığına ilişkin bir tabletin olmadığını söylerken diğer taraftan  $\sqrt{40^2 + 10^2} = \sqrt{28,20}$  değerini bulmak için başka bir tablette onaylanmış olması gerektiğine dair bir kıtır atar ortaya (Bkz. "[YBC 7289 No'lu Tablet](#)", S. 39-40). Bu kıtır dediğim şeyi burada açıklamak çok zaman alır çünkü birbirine bağlı 4 problem var ve bunları tüm yönleriyle ele almak epey yer işgal eder. Ama yine de kısaca verebilirim.

#### BM 96957 ve VAT 6598 No'lu Tabletlerdeki $\sqrt{28,20}$ 'ye Rasyonel Yaklaşıklıklar

**Friberg**'in [BM 96957](#) ve [VAT 6598](#) no'lu tabletlerdeki 5-a, b, c ve 6-a problemlerindeki çeviri ve çözümlerine göre öğrenci hem birim çevirme hatası hem de (1.1.3)'teki algoritmanın kullanımında hata yapmıştır (Bkz. "[A Remarkable Collection of Babylonian Mathematical Texts](#)", S. 304-307). Şöyle ki, aynı dik üçgende bu 4 problemde (1.1.3)'e göre  $d = \sqrt{h^2 + w^2} \lesssim h + \frac{w^2}{2h}$  yaklaşımında kapının genişliği  $w = 2$  Kuş verilirken  $w^2 = (2 \text{ Kuş})^2 = \left(\frac{2}{12} \text{ Nindan}\right)^2 = \frac{1}{36} \text{ Nindan}^2 = 0;1,40 \text{ Šar}$  alınmaktadır ama kapı yüksekliği  $h = 40$  Kuş değil  $h = 0;40$  Nindan'dır. **Neugebauer**'in okuması ve çözümüne göre öğrencinin ilk hatası budur (Bkz. "[YBC 7289 No'lu Tablet](#)", S. 13-14, 1.3.2.1. VAT 6598 No'lu Tablet). Yani kapının yüksekliği 40 Kuş değil 0;40 Nindan olacaktır. Çünkü  $\frac{w^2}{h} = \frac{0;1,40 \text{ Šar}}{0;40 \text{ Nindan}} = 0;2,30 \text{ Nindan}$  ve bunun yarısının alınmasıyla  $\frac{w^2}{2h} = \frac{0;2,30}{2} \text{ Nindan} = 0;1,15 \text{ Nindan}$  elde edilmekte ve bu kapının yüksekliğine eklendiğinde  $h + \frac{w^2}{2h} = 0;40 \text{ Nindan} + 0;1,15 \text{ Nindan} = 0;41,15 \text{ Nindan}$  sonucu çıkmaktadır. İkinci olarak öğrenci 6-a probleminde  $w^2$ 'yi  $2h$ 'ye bölecekken çarpmış ve  $2hw^2 = 2 \times 0;40 \times 0;1,40 = 0;2,13,20$  bulmuş ve bunu kapının yüksekliğine ekleyerek  $h + 2hw^2 = 0;40 + 0;2,13,20 = 0;42,13,20$  sonucunu elde etmiştir. Bu da öğrencinin ikinci hatasıdır ve bu hata öğrencinin algoritmayı yanlış kullanmasından, dolayısıyla bu algoritmayı tam olarak hatırlayamadığından, büyük bir ihtimalle  $0;42,13,20 \text{ Nindan} \approx \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2} \text{ Kuş}$  yaklaşımını yapmasından yani dikdörtgene kareyle yaklaşmasından kaynaklandı!



**Şekil 11.** VAT 6598 no'lu tabletindeki Problem 6-a'daki sayılar ve uzunluk ölçüsü birimi. **Ernst F. Weidner** ve **H. Zimmern**'in 1916'daki okumalarına göre ilk satırda "2 u" ve "40 u" yazar ama "u" ile gösterilen uzunluk ölçüsü biriminin ne olduğu bilinmez (Bkz. "[Die Berechnung rechtwinkliger Dreiecke bei den Akkadern um 2000 \(Akkadlar'da 2000 Yılı Civarında Dik Üçgenlerin Hesaplanması\)](#)", S. 2589-259. **Zimmern**, aynı yıl yayımladığı 320-325. sayfalardaki "[Zu den altaakkadischen geometrischen Berechnungsaufgaben](#)" adlı makalesinde **Weidner**'in VAT 6598 no'lu tablet okumasını doğrular. Fakat "u" ile gösterilen uzunluk ölçüsü birimi yine tanımlı değildir. Bkz. "[Eski Mezopotamya Ölçü Birimleri](#)"). Onlar bunları "2 Ellen (?) Seite (?) (2 Kübit genişlik)" ve "40 Ellen Tiefe (?) (40 Kübit derinlik)" olarak çevirirler!

**Weidner** 5-a probleminde  $d = \sqrt{h^2 + w^2} \approx h + \frac{w^2}{2h}$  doğru yaklaşımını kullanırken yukarıdaki şekilde verilen 6-a probleminde  $d = \sqrt{h^2 + w^2} \approx h + \frac{2hw^2}{3600}$  yaklaşımını kullanır (Bkz. S. 260-261. Burada **Neugebauer**'in çözümüne göre  $a$  yerine  $h$  ve  $b$  yerine  $w$  kullanılmıştır). **Neugebauer** ise yukarıdaki çizimde dikdörtgenle gösterilen kapının boyutlarını ilkin "Über Vorgerische Mathematik" adlı el yazmasının 6-9 Mart 1934 tarihli 8-9. sayfasında "0;10" ve "0;40" ve sonra "Mathematische Keilschrift-Texte I (MKT I), 1935"deki 277-282. sayfalarında zorunlu olarak "10" ve "40" olarak okur (ki **Jöran Friberg** BM 96957 no'lu tabletin desteğinde VAT 6598 no'lu tabletteki problemleri okuyarak **Neugebauer**'in ilk okumasına sadık kalır. Bkz. "A Remarkable Collection of Babylonian Mathematical Texts", S. 304-307. **Jens Höyrup** bu okumayı esas alır. Bkz. "Pythagorean Rule and Theorem", S. 397-399). Şaşırtıcı olan şey, 8. sayfanın sonunda 1)'de yani 5-a probleminde  $d = \sqrt{h^2 + w^2} \approx h + \frac{w^2}{2h}$  yaklaşımını yaparken 9. sayfanın başındaki 2)'de yani 6-a probleminde  $d = \sqrt{h^2 + w^2} \approx h + \frac{2hw^2}{3600}$  yaklaşımını yapması ve bunu açıklamaya çalışmasıdır. Çünkü 2)'nin hemen altında bu yaklaşımı açıklamaya çalışmış ve ben de onun bu yaklaşımından hareketle 14. sayfadaki "2. Problem 6-a'nın Orijinal Çözümü"nü yaptım. Ama şimdi görüyorum ki, 6-a problemini yazan öğrenci hem birimde hem de yaklaşım algoritmasında hata yapmıştır!

İşte **Neugebauer** 11 yıl sonra YBC 7289 no'lu tabletin çözümünde bunu dile getiriyordu ve Babillilerin kareköklü bir sayıya yaklaşımda 2 farklı algoritma kullanmış olduğunu zannederek  $\sqrt{40^2 + 10^2} = \sqrt{28,20}$  değerini bulmak için başka bir tablette onaylanmış olması gerektiğini söylüyordu ama "Matematiksel Civi Yazıtları (Mathematical Cuneiform Texts), New Heaven, Conn., 1945" kitabının 42-43. sayfalarında ya da "YBC 7289 No'lu Tablet" makalem 39-40. sayfalarında YBC 7289 no'lu tabletin çözümünü yaparken  $\beta_2 = \frac{2}{1;25}$  yaklaşıklığındaki 1;25'in tersinden hiç söz etmedi. Çünkü 2008'de **Neugebauer**'in çözümünden hareketle "1.4. YBC 7289 No'lu Tablet'in İlk Çözümü"nü yaparken elimde sadece **John N. Crossley**'in "The Emergence of Number" adlı kitabının 122. ve 123. (I ve II) sayfaları vardı ve ben anılan kitabın dijital baskısı olmadığı için 16. sayfasındaki YBC 10529 no'lu tableten yani Tablo 1.4.2'den habersiz yapmıştım, ancak son anda bir akıllılık edip Bulgu 3 ile bunu aşmayı başardım. O sırada incelediğim tüm kaynaklarda eski Babillilerin düzgün olmayan bir sayının tersini alamadıkları söyleniyordu. Yani **Neugebauer**  $\alpha_2$  ve  $\beta_2$ 'nin altında "Burada yukarıda anılan  $\sqrt{2} \approx 1;25$  değerine ulaştık" derken devamında "1;25'in tersi vardır. Bkz. S. 16, YBC 10529" deseydi bizi büyük bir sıkıntıdan kurtarmış olurdu. Burada ilginç olan şey şu ki, YBC 10529 no'lu tabletteki sayıları Tablo 1.4.2'de veririrken Dr. **Daniel Mansfield**'in "Mesopotamian square root approximation by a sequence of rectangles" makalesinin 181. sayfasındaki Tablo 3'üyle aynı vermişim ve ikimiz de 2023'te yayınlamışız ama ben makalemi 03.02.2023'te ve o da 02.09.2023'te verdiği göre demek ki o pişti olmuş!

**7. Dik Üçgende Metrik Bağıntının Antik Greklerde Görülmesi.** [76] denkleminin ilk çözümü olan  $\left(\frac{a_n}{h_n}, 1, \frac{r_n}{h_n}\right) = \left(\frac{m_n - m_n^{-1}}{2}, 1, \frac{m_n + m_n^{-1}}{2}\right)$  sıralı üçlüsünün  $m_n$  ile çarpımından bulunan  $\left(\frac{m_n^2 - 1}{2}, m_n, \frac{m_n^2 + 1}{2}\right)$  ikinci çözümü  $m_n$  tek tam sayı ise **Pisagor**'a atfedilir (Bkz. **Proklus**, **Öklit** Şerhi, S. 427, Friedlein Çevirisi, S. 464, "İskenderiyeli Diofant: Yunan Cebir Tarihi Üzerine Bir Çalışma", S. 116). Eğer ikinci çözümde  $m_n = 3$  özel değeri alınır (3,4,5) Kutsal üçgeni elde edilir ki, bu, **Vitruvius**'a göre **Pisagor** tarafından keşfedilmiştir.

Oysa gerçekte bu bilgilerin doğru olmadığını görüyoruz. Çünkü ilkin **Pisagor**'a atfedilen çözümün Babil kaynaklı olduğu açıktır. Örneğin **Pisagor**'a atfedilen bu ikinci çözümün yukarıda Susa tabletinden ve özellikle YBC 6967 no'lu tabletinden elde edilebildiğini açık bir şekilde gördük. Ayrıca **Vitruvius**'a göre **Pisagor** tarafından keşfedildiği söylenen (3,4,5) geçiş üçgeni başta Plimpton 322 no'lu tableti olmak üzere birçok eski Babil tabletinde mevcuttur (Bkz. "Si.427 no'lu tablet"). Hatta eski Mısır'da bile! Örneğin **Khafre**'nin piramidi buna göre yapılmıştır (Bkz. Testo 5.6, Not 5.6.13).

### Khafre Piramidi k(3, 4, 5) Dik Üçgenine Göre İnşa Edildi!

**Petrie** Khafre Piramidi'nin eğim açısını 1883'te 53°10'+4' verirken 1940'ta  $(a_3, h_3, r_3) = (3k, 4k, 5k)$  olduğunu kabul ederek 53°07'48" vermek zorunda kaldı. Bu eğim açısını kabul etmesi 1940'ta, ölümünden 2 yıl önce, "128 Çizimle Mısır Bilgeliği" adlı kitabında RMP'deki "seked" konusunu öğrendikten sonra oldu (Bkz. "Babil ve Mısır II'si"). Dolayısıyla **Pisagor**'un keşifleri olduğu söylenen bu bilgiler kendisini bağlar. Bununla birlikte **Öklit** (M.Ö. 365-300) "Elemanlar: 10. Kitap, Önerme 29, Lemma 1"de Şekil 5'teki Susa tabletinde  $O_n H_n C_n$  dik üçgeninin kenar uzunlukları olarak bulunan  $(p_n - r_n, q_n, r_n) = \left(\frac{p_n^2 - q_n^2}{2p_n}, q_n, \frac{p_n^2 + q_n^2}{2p_n}\right)$  sıralı üçlüsünün  $p_n$  katı olan  $\left(\frac{p_n^2 - q_n^2}{2}, p_n q_n, \frac{p_n^2 + q_n^2}{2}\right)$  çözümünü vermiş ve matematik tarihine bu formülleri ilk yayınlanan matematikçi olarak geçmişti ama bu da doğru değildi!

### Ölümcül Hata!

Ancak Plimpton 322 no'lu tabletindeki 15. satırdaki bir hata bütün bu olaylar zincirinin çözülmesine neden oldu. Çünkü 15. satırdaki dik üçgenin genişliği 56 olarak doğru yazılırken hipotenüsünün 53 olarak yanlış yazılmış olması Babilli kâtibin Pisagor bağıntısını kullanırken kritik bir hata yaptığını gösterir.

Bu kritik hatayı aşağıdaki bulgumda şöyle açıklayabilirim.

**Bulgu 2.** Tablo 12'deki 15. Satır-2. Sütun'da hipotenüs uzunluğunun "53" olarak yanlış yazılması Babilli kâtibin Susa tabletindeki çözüme göre [58] ya da [81]'deki  $p_n$  ve  $q_n$  çifte parametrelili çözüme birden geçmediğini gösterir. Kâtip Şekil 5'teki Susa tabletine göre  $(p_{15} - r_{15}, q_{15}, r_{15}) = \left(\frac{p_{15}^2 - q_{15}^2}{2p_{15}}, q_{15}, \frac{p_{15}^2 + q_{15}^2}{2p_{15}}\right) = \left(\frac{9^2 - 5^2}{2 \cdot 9}, 5, \frac{9^2 + 5^2}{2 \cdot 9}\right) = (3; 6,40,5; 0,5: 53,20)$  sıralı üçlüsünü ilkin  $p_{15} = 9$  ile çarpıp  $\left(\frac{p_{15}^2 - q_{15}^2}{2}, p_{15} q_{15}, \frac{p_{15}^2 + q_{15}^2}{2}\right) = 9 \cdot (3; 6,40,5; 0,5: 53,20) = (28,45,53)$  buluyor ve sonra bunun 2 katını alarak  $(a_{15}, h_{15}, r_{15}) = (p_{15}^2 - q_{15}^2, 2p_{15} q_{15}, p_{15}^2 + q_{15}^2) = 2 \cdot (28,45,53) = (56,1; 30,1; 46)$  elde ediyor (Bkz. "Plimpton 322 No'lu Tabletteki Pisagor Sayıları, 1949", **E.M. Bruins** 630. (PDF'de 2.) sayfadaki tablodaki son satırda (28,45,53) sıralı üçlüsünü alır ama bu doğru değildir. Fakat kâtip bu sayıları tablete kazırken 56'yı doğru yazarken 1;46 yerine unutkanlıkla 53'ü yazar (Bkz. "5.5.2009, 02:00", S. 4-5). Bu sonuç kâtip için "basit hata"yı ama diğerleri için "ölümcül hata"yı gösterir (Bkz. "Kitap 10-Önerme 28-Lemma 1". TMS No. 1'deki [173] bağıntısının **Öklit**'in 4.7.3.1'deki bağıntısına adım adım nasıl dönüştüğünü "5.5.2009, 02:00", S. 3-7 ve 8-9'dan görebilirsiniz).

Kâtip bu hesapları yaparken  $p_n^2 - q_n^2$  için

$$[197] \quad p_n^2 - q_n^2 = (p_n - q_n)(p_n + q_n)$$

(ki bu özdeşlik 10. Sınıf matematik ders kitabındaki Ünite 3: Polinomlar'daki Çarpanlara Ayırma Yöntemleri'nde 2) İki Kare Farkı Özdeşliği olarak geçer. Bu özdeşliğin ilk verildiği yer 8. Sınıf matematik ders kitabındaki Ünite 3: Cebirsel İfadeler ve Özdeşlikler'deki İki Terimin Farkının Karesi Özdeşliği'dir. Bkz. S. 146) ve  $p_n^2 + q_n^2$  için

$$[198] \quad p_n^2 + q_n^2 = \begin{cases} (p_n - q_n)^2 + 2p_nq_n, \\ (p_n + q_n)^2 - 2p_nq_n \end{cases}$$

özdeşliklerini kullanır. Bu özdeşliklerin her ikisi birden IM 67118 ve bir kopyası olan VAT 3971 no'lu tabletlerde kullanılmıştır (Bkz. "[A Remarkable Collection of Babylonian Mathematical Texts](#)", S. 251-252. Bu özdeşliklerin elde edilmesinde kullanılan şekil, 8. Maddedeki Çinlilerin (3,4,5) üçgenini elde etmede kullandıkları kare içindeki kare şeklindedir. Bkz. "[Eski Mısır ve Eski Babilonya Matematikleri Arasındaki Beklenmedik Bağlantılar](#)", S. 125-126, 3.1. Ayrıca Babilliler 2 sayının çarpımı için de bu son özdeşliğe benzer özdeşlikler kullanmışlardır. Bkz. "[Eski Babil Matematiği \(MÖ 2000-1600\)](#)". Bu konuda Karatsuba yöntemiyle yapılan çarpma işlemi için 9. Sınıf matematik ders kitabındaki Ünite 3: Algoritma ve Bilişim'in sonundaki Ölçme ve Değerlendirme'deki [5. soru](#)ya bakabilirsiniz).

Bu nedenle kâtip bu özdeşliklere göre

$$[199] \quad \frac{9^2 - 5^2}{2.9} = \frac{(9 - 5)(9 + 5)}{2.9} = \frac{4.14}{18} = 56.0; 3,20 = 3; 6,40$$

ve

$$[200] \quad \frac{9^2 + 5^2}{2.9} = \frac{(9 - 5)^2 + 2.9.5}{2.9} = \frac{4^2 + 90}{18} = \frac{16 + 90}{18} = \frac{106}{18} = 106.0; 3,20 = 5; 53,20$$

sonuçlarını bulur.

Sonuçta yine ilk kez **Neugebauer** ve **Sachs** tarafından "[Teorem \(1. Dynastie von Babylon\)](#)" olarak önerilen [81]'deki ([58])  $p_n$  ve  $q_n$  çifte parametrelili çözümün Plimpton 322 no'lu tabletteki dik üçgenlerin kenarlarının uzunluklarında bulunmasında 2 adımda kullanılmış olduğu sonucu çıkmaktadır (Bkz. "[Matematiksel Civi Yazıtları \(Mathematical Cuneiform Texts\), New Heaven, Conn., 1945](#)", S. 40, (2) ve "[Otto Neugebauer: The Exact Sciences in Antiquity \(1951,1957,1969\), 2nd ed./Princeton, NJ: Brown University Press; reprint ed./New York: Dover, 1969](#)", S. 39. Ayrıca **Neugebauer** tarafından 1. Babil Hanedanlığına tarihlenen Pisagor bağıntısını "[YBC 7289 No'lu Tablet](#)" makalesinin 11. sayfasındaki [Resim 1.3.1](#)'de görebilirsiniz. **Neugebauer**'in 4 Mayıs 1928'e tarihli araştırma notlarından aldığım [Resim 1.3.1](#)'de şunlar yazılıdır: " $a^2 + b^2 = c^2$  also Pythagoras in der 1. Dyn. von Bab. (1. Babil Hanedanlığındaki Pisagor bağıntısı  $a^2 + b^2 = c^2$ ). Bu şekildeki çözüme **Dionfant**'ın "[Arithmetica](#)" adlı eserinde tekrar rastlamaktayız (Bkz. "[İskenderiyeli Diofant; Yunan Cebir Tarihi Üzerine Bir Çalışma](#)", S. 93, 105 ve uygulama için Kitap 3'teki [Problem 19](#), Kitap 4'teki [Problem 15](#), Kitap 5'teki Problem 6'ya ait [Lemma 2](#) ve daha bir sürü örnek. **Diofant** Pisagor bağıntısını eski Babilliler gibi probleme uygun yani **Pisagor**'daki gibi  $(\frac{m_n^2-1}{2}, m_n, \frac{m_n^2+1}{2})$  tek parametrelili, **Öklit**'teki gibi  $(\frac{p_n^2-q_n^2}{2}, p_nq_n, \frac{p_n^2+q_n^2}{2})$  çift parametrelili ya da [81]'deki gibi bunun 2 katı alınmış  $(p_n^2 - q_n^2, 2p_nq_n, p_n^2 + q_n^2)$  bağıntılarını kullanır). Alman filozof **Schopenhauer**'e göre, **Öklit** 1. Kitap'taki [Önerme 47](#) Pisagor bağıntısı için geometrik bir ispat değil sanatkarane bir "faretuzak" kurmuştur (Bkz. "[Alemuddin Kaysar ve Bir Geometri Teoremi](#)").

**Jason M. Costanzo**, **Schopenhauer**'in "**Öklit**'in fare kapanı gösterisini" 18 sayfalık makalesinde inceler. Bu makaleden can alıcı bölümleri aşağıya çıkarttım.

### **Öklit'in Fare Kapanı**

#### **Schopenhauer'in Geometrideki Sentetik Yönteme Eleştirisi**

**Özet.** **Arthur Schopenhauer**, "[Yeterli Temel İlkesi Üzerine](#)" adlı doktora tezinde, Kantçı idealizmin bir sonucu olarak matematiğin ve dolayısıyla matematiğin değişen doğası temelinde Öklit geometrisinin bir eleştirisinin ana hatlarını çizer. **Schopenhauer**'a göre **Öklit** geometriyi sentetik olarak ele alır: Basitten karmaşığa, bilinenden bilinmeyene doğru ilerler, daha sonraki ispatları daha öncekiler temelinde "sentezler". Böyle bir yöntem, her ne kadar durumu mantıksal olarak kanıtla da yine de varlığın varoluş nedenine ulaşmayı başaramaz. Bunu elde etmek için, **Schopenhauer**'in "analiz" olarak adlandırdığı ayrı bir yöntem gereklidir, böylece bazı önemli farklılıklarla birlikte erken Yunan geometricileri arasında zaten uygulanmakta olan bir yöntemi yankılamaktadır. Bu makalede, **Schopenhauer**'in **Öklit**'in "[Elemanlar](#)"ındaki sentez eleştirisini ve kendi analiz yönteminin doğasını ve uygunluğunu tartışıyorum.

**Arthur Schopenhauer**'in daha sonra işaret edeceği gibi, **Kant**'ın Kopernik devrimi zorunlu olarak tüm bunları değiştirir. **Schopenhauer** bunu eserlerinde, **Öklit**'in kullandığı sentez yöntemine yönelik eleştiriler yoluyla belirtir ve **Öklit**'in "[Elemanlar](#)"daki 1. Kitap'taki [Önerme 47](#)'deki Pisagor teoreminin kanıtına "fare kapanı gösterisi" olarak atıfta bulunur. **Schopenhauer**'a göre, özne için ideal nesnelere matematiksel varlıklar, artık bu tür varlıkların herhangi bir keşfinin, bu varlıkların ilk ortaya çıktığı ve biliş içinde karşılaşıldığı sezgisel zeminin incelenmesini veya "analizini" gerektirdiği anlamına gelir. **Schopenhauer**, bu analiz yöntemini, antik geometriciler arasında kullanılan önceki sentetik yöntemden üstün görür, çünkü analiz yalnızca herhangi bir varlığın varlığının veya yokluğunun doğrulanmasına yol açmakla kalmaz, aynı zamanda ortaya çıktığı sezgisel zemini ortaya çıkararak varlığın neden olduğu gibi olduğunu da ortaya çıkarır. Bu, sentetik yöntemle çarpıcı bir tezat oluşturur. Çünkü matematiğin sezgisel zemininden rasyonel soyutlamaya doğru uzaklaşırken, bu yöntem mantıksal kesinlik sunmasına rağmen, yine de varlığın var olma nedeninin kaybına yol açar. Bunun daha geniş sonuçları, takip eden bölümlerde işlenir, ana tez, **Schopenhauer**'in **Öklit**'teki sentez yöntemine yönelik eleştirisinin önemi ve **Schopenhauer**'in analiz yöntemine ilişkin anlayışı ve yorumunun tartışılması etrafında toplanır.

"Analiz ve sentez" başlıklı sonraki bölümde, bu iki yöntemin antik Yunan geometri uzmanları tarafından anlaşıldığı ve uygulandığı şekliyle anlamını açıklıyorum. Bir sonraki bölüm olan "**Öklit**'in Fare Kapanı Gösterimi"nde, **Schopenhauer**'in, **Öklit**'in "[Elemanlar](#)"daki Pisagor teoreminin sentetik yöntemle ispatına yönelik eleştirisini incelemeye devam ediyorum. **Schopenhauer**'in bu yöntemi reddetmesinin nedenleri orada ayrıntılı olarak açıklanıyor.

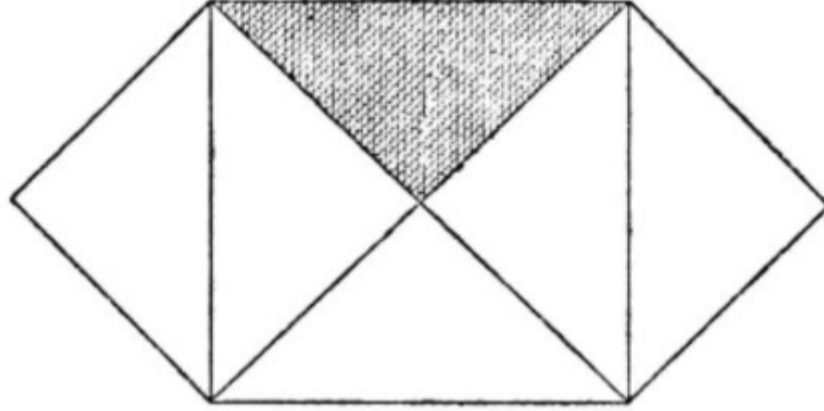
Bir sonraki bölüm olan "**Schopenhauer**'in analitik yöntemi"nde, **Schopenhauer**'in analiz anlayışını ve bunun antik geometri uzmanları tarafından uygulanan yöntemle nasıl ilişkili olduğunu ve yine de nasıl farklılaştığını ele alıyorum. Son bölüm olan "Sonuç gözlemleri"nde, **Schopenhauer**'in idealizmle ilgili eleştirel açıklamalarının önemini ve özellikle **Friedrich Nietzsche** gibi filozoflar arasında rasyonalizmin daha sonraki reddini tartışıyorum.

Yukarıda sadece anılan makalenin ilk 3 sayfasının çevirisini verdim ve bunlardan sadece **Schopenhauer**'in "**Öklit**'in Fare Kapanı Gösterisi" ile ilgili 9. sayfadaki ilk paragraftan 13. sayfadaki "Sonuç gözlemleri (Concluding observations)"ne kadar olan bölümün çevirisini aşağıda veriyorum.

**Arthur Schopenhauer**'a göre, Öklit teoremin doğru olduğunu başarıyla kanıtlamış olsa da yine de bir dik üçgenin neden zorunlu olarak Pisagor teoremine yol açması gerektiğine dair bir anlam eksiktir. Bu, **Schopenhauer**'in, parlak bir kanıt sunmasına rağmen, yine de süreçte oldukça önemli bir şeyi kaybettiğine olan

inancından kaynaklanmaktadır; bu kanıtı komik bir şekilde “*Öklit*’in fare kapanı gösterisi” olarak atıfta bulunur. Eleştirisinin ardındaki temel fikir, *Öklit*’in teoremi tartışmasız bir şekilde kanıtladığıdır; ancak sorun, kanıtın doğası gereği, söz konusu şeyin içeriğinin, teoremin nedeninin geri dönülemez bir şekilde kaybolmasıdır. *Schopenhauer*’a göre, bu nedenle alternatif bir yöntem gereklidir; her durum için varlığın nedenini ortaya çıkarabilen bir yöntem ve bunu analizle özdeşleştirerek şu sonuca varır: “Genellikle, matematiği açıklamak istediğim için, *Öklit*’in kullandığı sentetik yöntem yerine analitik yöntemdir.”

*Schopenhauer*, Pisagor teoreminin ispatı için *Öklit*’in sentetik yöntemine karşıt olarak, daha açık ve doğrudan bir ispat öneriyor; tekil bir görüntü biçiminde, bu görüntünün Pisagor teoreminin neden olduğu gibi olduğunu sezgisel olarak ortaya koyduğunu düşünüyor; *Öklit*’in yönteminin bir sonucu olarak başvurmak zorunda kaldığı el çabukluğu numaralarına başvurmadan:



**Şekil 12. Schopenhauer:** “Daha önce başka bir yerde sunulmuş olmasına rağmen (bkz. “*Z1. Geometrik İspat*”), Şekil 6’yı tekrar vermekten kendimi alamıyorum; çünkü bu şeklin kelimeler olmadan sadece görülmesi bile Pisagor teoreminin doğruluğu konusunda *Öklit*’in fare kapanı gösterisinden 10 kat daha fazla ikna edicidir.” (Bkz. “*Arthur Schopenhauer: İrade ve Temsil Olarak Dünya, Cilt 1*”, S. 187 ve “*Arthur Schopenhauer: Yeterli Temel İlkesinin Dörtlülük Kökü Üzerine ve Diğer Yazıları*”, S. 253). Bu şekle göre *Schopenhauer*’in istediği ispat, 2 kareyi üçüncü karenin içine olduğu gibi sokmaktır. Ama böyle bir ispat mümkün değildir ve *Öklit* sadece bu 2 kareyi dikkörtgenleştirerek üçüncü karenin içine sokabilmişti (Bkz. S. 61, 2. ve 3. Şekil). Ancak *Öklit*’in amacı bu değildi, teoremi Babil Matematiği’nden Yunan Matematiği’ne transfer etmektir. Aranılan ispat sadece genel bir dik üçgenin özel durumunda, ikizkenar dik üçgende mevcuttur ve yukarıdaki şekilde bu gösterilmiştir! Acaba genel bir dik üçgende dik kenarların üzerlerindeki kareler hipotenüs üzerindeki karenin içine olduğu gibi transfer edilebilir mi? Eğer böyle bir ispat ortaya koyulabilirse *Schopenhauer*’in isteği gerçekleşmiş ve böylece felsefi tartışma son bulmuş olacaktır. Çünkü 370 farklı ispatın bir derlemesi olan “*Pisagor Önermesi*”nde böyle bir ispat yoktur! Şahsen *Öklit*’in ispatını uzayda araştırdığımda daha şık sonuçlar elde ettim ama *Schopenhauer*’in istediği ispata ulaşamadım (Bkz. 2026-02-06 211317).



### ARTHUR SCHOPENHAUER

*Öklit*’in “Fare Kapanı Gösterisi” İle Pisagor Teoremi’nin Babil Matematiği’nden Yunan Matematiği’ne Transferi

Bu görüntüde ne ortaya çıkıyor? *Schopenhauer* için bir “kare”nin ve onun aracılığıyla “4 eşit kenarın” doğasını hemen tanırız. Kareyi kesen 2 köşegen çizgi de açıkça eşittir ve ortaya çıkan iç üçgenler eşit ve diktir. Benzer şekilde, köşegenlerdeki 2 küçük kare, görüntünün simetrisini tamamladığı için, 2 üçgenin bunları işgal etmesi nedeniyle, her bir iç üçgenin alanının 2 katı olduklarını daha da gösterir. Son olarak, iç üçgenlerin hipotenüsüne eşit bir uzunluğa sahip olan daha büyük kare, böylece 2 küçük karenin toplamına eşit bir alanı kapsar. Pisagor teoremi böylece, sanki varlığın varoluş sebebine dair bir içgörüyle, hemen ve doğrudan kanıtlanır. Gerçekten de yukarıdaki görüntüden teoremin neden böyle olduğunu tam olarak “görebiliriz”.

*Schopenhauer* için yukarıdaki görüntü (karenin dışındaki dik üçgenler içte temsil edildiklerinden ve bunlar da karenin yarısı olduklarından), Pisagor teoreminin özelliklerinin doğasına dair doğrudan ve sezgisel bir içgörü sunar. Bunun nedeni, ona göre matematiğin başlangıçta bilişsel ve sezgisel bir biçimsel temsile (*Vorstellung*) dayanmasıdır; bu temsil, algısal anlama yeteneği (*Verstand*) aracılığıyla ortaya çıkar ve daha sonra akıl yeteneği (*Vernunft*) içinde kavramsal soyutlamaya getirilir -oldukça Kantçı bir kavram. Sezgisel ve soyut arasındaki temel fark, birincisinin verisinin çok daha ilkel, doğrudan ve özel olmasına karşın, ikincisinin verisinin esasen türetilmiş, dolaylı ve evrensel olmasıdır. Dünya hakkındaki tüm bilgimiz başlangıçta sezgisel deneyimden ve ikinci olarak bu deneyimin rasyonel soyutlamamızdan kaynaklanır ve *Schopenhauer* bu ayrı kaynaklara kökler olarak atıfta bulunur. Her ne kadar sezgisel olanın bir alt bölümü olarak 4 kökten, bir soyut ve 3 ek kökten bahsetse de, bu makalenin amaçları doğrultusunda, yalnızca ikisini dikkate almak gerekir: Akıl yoluyla bilmenin soyut kökü ve

zaman ve mekânın biçimsel temsili yoluyla var olmanın sezgisel kökü.

Dahası, her bir varlık için deneyim içinde ve deneyim yoluyla ortaya çıktığı şekliyle bir açıklama, yani varoluşu için bir neden veya yeter sebep verebiliriz, ancak bunu doğru bir şekilde ve bilgi için yapabilmek için her şeyden önce her bir şeyin doğru kökünü tespit etmek gerekir. Bu ayrıca, başlangıçta sezgisel olan bir varlığı soyutlama temelinde açıklamaya yönelik her türlü girişimin yeter sebebin kaybına yol açtığı anlamına gelir, çünkü bu şekilde, söz konusu varlığın varlığının doğrulanması, onun yalnızca bir gölgesi veya yansıması, yani “temsillerin temsilleri” temelinde aranır. En temel anlamıyla, **Schopenhauer**'in eleştirisi esasen sezgisel verilerin soyut olan temelinde doğru bir şekilde doğrulanamayacağı fikrine işaret eder ve ona göre **Öklit**'in [Elemanlar](#)'da yaptığı da tam olarak budur.

**Schopenhauer**'a göre, geometride, matematikle ilgili tüm bilgilerimizi edindiğimiz sezgisel varlık köküne karşıt olarak akıldaki soyut bilme kökü temelinde ilerleyen herhangi bir kanıtlama, her ne kadar yapının gerçek varlıkla mantıksal tutarlılığını “kanıtlaşa” da (bir gölgenin karşılık geldiği şeyin varlığını ima etmesi gibi), varlığın varlık nedeni yine de kaybolur. **Öklit**'in Pisagor teoremine ilişkin fare kapanı ispatında da tam olarak bu durum söz konusudur. Orada teorem, rasyonel bilgi için mantıksal ve soyut bir temelde kanıtlanır, ancak dik üçgenin iç doğasını ortaya çıkarmada başarısız olur. Bu nedenle **Schopenhauer** **Öklit**'in kanıtının bilgi için yalnızca “mantıksal kesinlik” sunduğunu ve ayrıca “kuşkusuz kanıtlanan teoremin doğru olduğu inancını taşırken, yine de iddia ettiği şeyin neden olduğu şey olduğuna dair hiçbir fikir vermediğini” belirtir.

**Schopenhauer**'in eleştirisi, **Aristoteles**'in [Posterior Analytics](#)'teki genel tavsiyelerinden yola çıkar: Bir varlığın nedenini ortaya koyan bilgi, yalnızca öyle olduğunu ortaya koyan bilgidir. **Schopenhauer**'in anlayışına göre analizin başarılması gereken tam da budur. Çünkü analizle birlikte her ayrı problem ya da teorem, deyim yerindeyse “şeyin kendisine”, kendisinden çıktığı ilk sezgiye geri götürülür ve böylece uzay ve zamandaki varlık zemini temelinde doğrulanır. Bu nedenle **Schopenhauer**, sağladığı yukarıdaki imgenin Pisagor teoremini yeterince gösterdiğini düşünmektedir. Dahası, bu tür imgelerin hazırda bulunmadığı ya da aşırı karmaşık olduğu durumlarda, **Schopenhauer**'a göre doğru adımlar yalnızca “geometrik bir kanıtın ilk keşfindeki düşünce sürecinin analizini” gerektirir. Başka bir deyişle, söz konusu varlık, varlık içindeki zeminine ilişkin orijinal sezgi, kökü tespit edilene kadar analiz edilir.

Ancak bu son anlamda **Schopenhauer**'in analiz yöntemi, antik geometricilerin onu anlama ve uygulama biçiminden kesinlikle farklıdır. Önceki bölümlerde açıklandığı üzere, eski geometriciler için analiz ya bir geometri ilkesine ya da önceki sentezler temelinde kurulmuş önceki teoremlere ve problemlere gerilemeyi ima ediyordu. İkinci durumda, problemin varlık zemini hala gizli kalmaktadır. Bu zemini ortaya çıkarmak için analizin bir aksiyoma ulaşana kadar sürdürülmesi gerekecektir, ancak o zaman da söz konusu gerçek varlık kaybolacaktır, zira yalnızca parçaları ve unsurları ortaya çıkacaktır. İlk durumda, sadece bazı çok temel aksiyomlar geometriciler tarafından daha fazla sorgulanmadan, “sezgisel” olarak kabul edilmiştir. Gerçekten de bu tür aksiyomlar geometri için hem ispatlanamaz hem de vazgeçilmez olarak görülüyordu, çünkü onlar olmadan bilimde daha fazla ilerleme mümkün olmazdı. Öte yandan **Schopenhauer**'a göre her geometrik varlık aksiyomatiktir ve uzaya ilişkin bilişsel sezgilerimizde kök salmış uzamsal bir yapının temsilcisidir ve bu nedenle şöyle der: “*Varlığın nedeni kesinlikle her durumda bu kadar açık değildir... yine de ne kadar karmaşık olursa olsun her teoremden kanıtlanabileceğine ve önermenin her zaman böyle basit bir sezgiye indirgenebileceğine ikna oldum.*”

Yukarıdaki açıklamalara ek olarak şunu söyleyebilirim: **Schopenhauer**, Pisagor teoremi için **Öklit**'in [Önerme 47](#)'deki ispatı yerine Şekil 12'yi önerir ama bu şekil yalnız ikizkenar dik üçgenler için geçerlidir. Dolayısıyla **Schopenhauer**'a göre bir dik üçgenin dik kenarları üzerindeki karelerin toplamının hipotenüs üzerindeki kareye eşit olduğunu gösteren “[eş parçalama metodu](#)”na göre yapılan ispatlar varlığın nedenini ortaya koyduğundan akılda daha kalıcı olur. Bu “analitik çözüm”dür ve **Öklit**'in ispatı ise varlığın öyle olduğunu gösterdiğinden “sentetik çözüm”dür. Buna göre **Schopenhauer**'in aradığı şey şöyle bir şey olsa gerek: “[Pisagor Bulmacası](#)”. Yani dik kenarlar üzerindeki kareleri hipotenüs üzerindeki karenin içine sığdırmak. Herhalde 4000 yıl önceki eski Babil öğrenci tabletlerini kast ediyor!

Özetle yine de **Öklit**'in 1. Kitap'taki [Önerme 47](#) ve 6. Kitap'taki [Önerme 31](#)'de dolaylı olarak kaydettiği diğer ispatlarla daha sonra pek çok matematikçinin ispatları bir araya getirildiğinde bugün Pisagor bağıntısı için matematik tarihinde 100'lerce ispat verilmiştir (Bkz. “[Pisagor Teoreminin Çeşitli İspatları](#)”). Örneğin 13. yy'ın ileri gelen bilgilerinden **Alemuddin Kaysar**'ın (ki Alman imparatoru **II. Friedrich**'in felsefe, tıp ve matematik sahasında cevaplandırılması için **el-Melik el-Kamil**'e gönderdiği sorulara verdiği yanıtlarla dikkat çeker) teoremi her ne kadar Pisagor bağıntısını kullanarak başka bir geometrik yapıyı inşa ediyorsa da, farklı bir açıdan, **Öklit**'in kareleri yerine daireleri kullanarak bağıntının başka bir ispatını verir. Bir diğer dikkat çekici ispat, 4 ay sonra bir suikaste kurban giden 20. ABD başkanı **James A. Garfield**'in ispatıdır ve **Garfield** bu bakımdan matematiğe özgün katkıda bulunan tek ABD başkanıdır. İspat önemsiz değildir ve matematik tarihçisi **William Dunham**'a göre, “**Garfield**'inki gerçekten çok zekice bir ispattır”. İspat 370 farklı ispatın bir derlemesi olan “[Pisagor Önermesi](#)”nde [231. ispat](#) olarak yer almaktadır (Bkz. “[Garfield'in Pisagor Teoremi İspatı](#)”). İspatın orijinali “[Matematiksel Hazine: James A. Garfield'in Pisagor Teoremi İspatı](#)”nda yer alır. Eğer **Garfield** bu ispatı 1876'da Kongre üyesi değil ortaokuldayken yapsaydı matematik öğretmeni ona gıpta bakardı. Çünkü ortada parlak bir başarı var. Bkz. “[Garfield'in Pisagor Teoremi İspatı](#)”. Örneğin **Ne'Kiya D Jackson** ve **Calcea Johnson** adlı 2 lise kız öğrenci Pisagor teoreminin geometrik seriye göre yeni bir ispatını buldular. Bkz. “[Bu 2000 yıllık eski problemde hepimiz neyi kaçırdık?](#)”)

**Yeni Teoremler.** Fakat Pisagor bağıntısıyla yapılabilecek en iyi iş, onu bir vasıta olarak kullanıp matematikte yeni teoremlerin kapısını açmak olacaktır. Örneğin **Heron**'un üçgenin alanı için verdiği formül böyle bir şeydir. Formül yükseklikleri ortak 2 dik üçgenden elde edilir. Örneğin (5,12,13) ve (9,12,15) dik üçgenlerinin birleşmesinden (13,14,15) üçgeni elde edilir ve **Heron** bu üçgenin alanını formülle 84 bulur (Bkz. “[İskenderiyeli Heron: Opera Quae Svpersvnt Omnia, Vol. 3](#)”, 1. Kitap, [5. Problem](#). Bu problem üçgenin alanı için verilen ilk problemdir ve sonraki problemler Pisagor bağıntısından arındırılır). Günümüzde **Heron**'un üçgenleri olarak bilinen rasyonel üçgenler bu yolla türetilmiştir ve bu türetme metodu bir eski Babil tableti olan VAT 7531 no'lu tabletindeki 4. problemden gelir (Bkz. “[Jöran Friberg: Amazing Traces of a Babylonian Origin in Greek Mathematics, Copyright © 2007 by World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.](#)”, S. 48-50). İşte bu nedenle **Heron** üçgenin alan formülünün ispatı verirken sanatkârane bir şekilde “fare tuzağını” kurar. Ancak **Friberg** bu fare tuzağını 363-364. sayfalardaki “[14.2. Two Simple Metric Algebra Proofs of the Triangle Area Rule \(Üçgenin Alan Kuralının 2 Basit Metrik Cebir İspatı\)](#)”nda bozar. Çünkü **Heron**'un [362-363.](#) sayfalarda verdiği ispat yükseklikleri ortak 2 dik üçgenin alanlarının toplamından kolaylıkla elde edilirken **Heron**'un bu ispatı üçgenin iç teğet çemberinde benzer üçgenleri kullanarak süslemesi yeni bir fare tuzağı idi. Ben ise **Friberg**'in ispatta kullandığı Babilonya metrik bağıntılarını üçgenin yeni bir alan formülü olan ATA Formülü'nde kullandım ve bu metrik bağıntıların Babil'den geldiğini övünerek söyledim (Bkz. “[Üçgenin Yüksekliklerinin Tabanlarda Ayırdığı Parçalar Hakkında Bazı Sonuçlar](#)”). Bu yüzden ATA formülü Pisagor bağıntısı için başat bir teoremdir (Bkz. “[Bölüm 1: ATA Formülü ve Uygulamaları](#)”). Bu formülün keşif hikâyesini “[Rasyonel Üçgenler](#)” adlı makalemde anlattım. Bu formülü 15 Temmuz 2000'de sadece Pisagor bağıntısı kullanarak keşfettiğimi biliyor muydunuz?). “ATA”, geçmişte bu işle uğraşan tüm insanların büyük önderimiz **Atatürk**'ün kişiliğinde toplandığı bir göndermedir. Dolayısıyla bu formülde ister istemez Babil matematikçilerini de anmış oluyorum. Muhtemelen **Atatürk** sağlığında böyle bir şeye şahit olsaydı çok mutlu olurdu diye düşünüyorum. Çünkü “Üçgen” ve geometrideki diğer terimleri dilimize kazandıran kişi O'dur!

8. Dik Üçgende Metrik Bağıntının Diğer Kaynaklarda Görülmesi

		<p>تربیع به الی سطح بل ل و نصف ح و ا و فی غیره ششانی در جیب با وضعی      ب و ذراویته جیب مساویة لصلعی است و ذراویته اب و کجوه المثلث      متساویین و مثلث جیب متساوی نصف وتر ب ل کونهما علی قاعده جیب      بین مساوی جیب ب و کونک مثلث با اب و ی نصف سطح بل کونهما      قاعده ب و بین مساوی جیب و ا ل فرج ب و ی مساوی سطح بل مساوی      و مثلث کت بین ا و جیب و جیب و ی      سطح جیب ا ل و جیب جیب و ی      جیب ب ا و و کت ما اردنا      انواع هذا الشکل بلقب بالهوس      و کون ا ب مختلف و قوع المثلث      الششانی کج جهات اضلاع      و یخصر کت فی قاعده او جیب کما</p>
<p>Bir Eski Çin Metni (MÖ 100). (3,4,5) Kutsal üçgeninin ispatı, Matematiksel Hazinesel: <i>Zhoubi suanjing</i> (<i>Arithmetic Classic of the Gnomon and Circular Paths of Heaven</i>).</p>	<p><b>Öklit</b>'in (MÖ 330-275) "<i>Elemanlar</i>", I. Kitap, <b>Önerme 47</b>'deki ispatı. İspat şöyledir: [AL] dikmesini [DE] tabanına indirin ve [AD], [AE], [BK] ve [CF]'yi çizin. Bu durumda</p> $\begin{aligned}  BE ^2 &= Alan([BL]) + Alan([CL]) \\ &= 2Alan(ABD) + 2Alan(ACE) \\ &= 2Alan(FCB) + 2Alan(KCB) \\ &=  FA ^2 +  AK ^2 \end{aligned}$ <p>olduğundan <math> BC ^2 =  AC ^2 +  AB ^2</math> şeklinde Pisagor bağıntısı elde edilir. Bu eşitlikte köşegenleri [BL] ve [CL] dikdörtgenlerinin alanlarından söz edilmiştir, dolayısıyla bu ispatta kullanılan karelerin ve dikdörtgenlerin köşegenleri (ki bu kullanım şekli tüm Grek matematikçilerinde mevcuttur) eski Babil'den geliyordu.</p> <p>İşte bu ispat 20. yüzyıla kadar okullarda Pisagor Teoremi'nin ispatı olarak kullanıldı. Bu nedenle Osmanlı döneminde okullarda "Pisagor Teoremi" olarak okutuldu. Fakat bunun doğru olmadığını dünyada yalnızca ve yalnızca bir kişi fark etti: <b>ATATÜRK</b>.</p> <p><b>Atatürk</b> 3. Dil Kurultayı'ndan sonra 1936-1937'nin kış aylarında Dolmabahçe Sarayı'nda son kültür hamlesini yaparken öğrenciliğine geri döner ve "<b>Geometri</b>" kitabını yazmaya başlar. Bu kitaptaki Türkçe terimler içinde bir dik üçgende "<b>Hipotenüs</b>"e karşılık "<b>Dikeyin Çapı</b>" ve "<b>Pisagor Bağıntısı</b>" yerine "<b>Dikeyin Çap Karesi</b>" der (Bkz. S. 30-32. Daha fazla ayrıntılı bilgi için "<b>YBC 7289 No'lu Tablet'in 2. Çözümü</b>" adlı makaledeki 10-13. sayfalarındaki "<b>Atatürk'ün Antik Yunan Yüceltimine Karşı Bir Yanıtı: Dikeyin Çap Karesi</b>"ne bakınız). <b>Atatürk</b>'ün bu çıkarımları yaptığı orijinal çizim de elimizde mevcuttur (Bkz. "<b>Atatürk'ün Ölümünün 84. Yılı Dönümü</b>", Şekil 3).</p> <p><b>Atatürk</b> ve maiyeti 13 Kasım 1937'de Sivas'a geldiklerinde ilkin 4 Eylül 1919'da tarihsel kongrenin toplandığı Kongre Salonunu ve özel odaları gezdiler ve duygulandılar. Sonra topluluk halinde lisenin 9-A sınıfında programındaki Geometri (Hendese) dersine girdiler ve <b>Atatürk</b>'ün bu sınıfta Pisagor Teoremi'ni anlattığının söylenmesi "<b>Geometri</b>" kitabının henüz yetişmemesi üzerine eskiye bağlı kalmasından kaynaklanmış olmalıdır (Bkz. "<b>Atatürk'ün Matematik Alanında Yaptığı Çalışmalar</b>"). Fakat ölümünden hemen sonra <b>Atatürk</b>'ün çıkarımları müfredattan kaldırılarak eskiye dönülür ve bu değişiklik halen geçerlidir (Bkz. "<b>YBC 7289 No'lu Tablet'in 2. Çözümü</b>").</p>	<p>13. yüzyıl tarihli el yazmasında <b>Nasirüddin Tûsi</b>'nin (1201-1274) <b>Öklit</b> tarafından verilen ispatın Arapça çevirisi (Bkz. <i>Alamy</i>. Aynı ispata ait bir diğer <a href="#">el yazması sayfası</a> Harvard Müzesi'ndedir. <b>Schopenhauer</b>'in Şekil 12'deki çizimi "<b>Matematiksel Hazine: Tûsi'nin Öklit'in Elemanları</b>"ndaki 5. son sayfadaki en alttaki sol baştaki şekildir. Bu ispat daha sonra 1873'te <b>H. Perigal</b> tarafından verilmiştir. Bkz. "<b>5. Geometrik İspat</b>"). Söz konusu bu ispata ait Arapça çeviri başta <b>Sabit bin Kurra (821-901)</b> olmak üzere diğer İslam matematikçileri tarafından devam ettirilmiştir (Bkz. "<b>Sabit bin Kurra'nın İspatı</b>").</p> <p><b>Nasirüddin Tûsi</b>, yukarıdaki şekilde <b>Öklit</b>'in yandaki şekline göre geometrik ispatı verirken sadece ACKH karenin alanının yarısı olan üçgenleri çizmiştir (ki bu çizim <b>Sabit bin Kurra</b>'dan gelir. Yani Arapça çeviri eksik yapılmıştır), dolayısıyla hem onun şeklini tamamladım hem de <b>Öklit</b>'in geometrik ispatını en basit şekilde açıkladım, çünkü <b>Önerme 47</b>'de bunlar verilmez!</p> <p>Şimdi verdiğim bu ispat her seviyedeki öğrenciler için tamamen uygun hale gelmiştir. Çünkü <b>Öklit</b>'in şekline göre <math>Alan(FCB) = \frac{Alan(ABFG)}{2} + Alan(ABC) = Alan(ABD)</math> ve <math>Alan(KCB) = \frac{Alan(ACKH)}{2} + Alan(ABC) = Alan(ABD)</math> iken ABD ve ACE üçgenlerinin ABC üçgeni içinde kalan parçaları A tepe noktasından indirilen dikmenin BCED karesini böldüğü dikdörtgenlerin pembe renkli köşegenleriyle oluşan küçük üçgenlerin alanlarına eşit olduklarından ABFG karesi dikdörtgenin sol tarafında yeşil renkli ve ACKH karesi de sağ tarafında turkuaz renkli dik üçgenler olarak toplanmışlardır ve böylece <math> FA ^2 +  AK ^2 =  BE ^2</math> bağıntısı elde edilmiştir.</p> <p>Fakat MÖ 3. yy'a tarihlenen DMP 16. Problemden bu ispatın açık bir uygulamasını keşfettim (Bkz. "<b>DMP</b>", S. 28-29, 16 (PLATE 6: 19-25)). <b>Friberg</b> bu problemin çözümünü "<b>Eski Mısır ve Eski Babilonya Matematikleri Arasındaki Beklenmedik Bağlantılar</b>" kitabının 136-137. sayfalarında geçen 3.1'de verir ama bu tam da az önce sözüme ettiğim hipotenüs üzerindeki karenin A tepe noktasından indirilen dikmeyle 2 dikdörtgene bölünmesindeki gibidir. Çünkü 16. Problemden alanı <math>100 RC^2</math> olan bir dikdörtgene <math>40 RC^2</math>'lik bir dikdörtgen eklenirse bir kare elde edildiğine göre, ilk dikdörtgenin kenarlarının uzunluklarının RC cinsinden bulunması isteniyor ve <b>Friberg</b> bu 2 dikdörtgenden oluşan karenin bir kenarına ya da dikdörtgenlerin yüksekliklerine <math>h = c</math> ve ilk dikdörtgenin tabanına <math>w</math> der ama <math>a^2 = 100</math> ve <math>b^2 = 40</math> olmak üzere <math>w = \frac{a^2}{h}</math> ve <math>h - w = \frac{b^2}{h}</math> çözümleri söz konusu olmaktadır. Öyle görünüyor ki <b>Öklit</b>'in yandaki ispatı bu problemden sonra ortaya çıktı!</p>

Burada bir noktayı açıklamakta yarar var: Batı kaynaklarında Türk-İslâm bilginlerinin kendilerinden önceki oluşmuş eski Grek bilimini ve felsefesini körü körüne çevirdikleri ve hiçbir şey katmadan bu bilimsel düşüncenin devamcısı oldukları geçer. Örneğin *Huneyn bin İshak* (910'da öldü) *Öklit'in Elemanlar*'ını, dolayısıyla I. Kitap'taki *Önerme 47*'yi Grekçeden Arapçaya çevirir ama çevirideki şekil yukarıdaki ortadaki şekle göre sadece sağ taraftaki ACKH karesinin alanının yarısının KCB ve ACE üçgenleriyle BCED karesinin sağ tarafındaki dikdörtgenin içine taşınmasını gösterir. Sonra *Sabit bin Kurra* (826-901) bu ispatı gözden geçirir ve ispat bu şekilde silsile yoluyla *Nasirüddin Tûsi*'ye ulaşır. Bu yüzden Batılılar Türk-İslâm bilginlerine *James Bond*'un Albay *Tan-Sun Moon*'un etrafında aptal aptal dolaşırken, Albay *Tan-Sun Moon*'un *Gustav Greaves* kimliğinde *James Bond*'u seyretmesi gözüyle bakarlar (Bkz. "*Başka Gün Öl!*"). Fakat bu suçlama bilimsel olmayıp oldukça duygusal, şişirme ve bir yerde hususi kasıt taşıırken Türk-İslâm bilginlerine ait özgün eserleri çevirileriyle birlikte karşılaştırmalı olarak ortaya koyamadığımız, ki bunun nedenleri ortadadır, ve eski Grek bilginleri ile Türk-İslâm bilginleri arasındaki ilişkileri açıklayamadığımız için bu suçun birazı da bize ait görünür.

**Osmanlı Döneminde Pisagor Teoremi.** *Nasirüddin Tûsi*'nin "*Öklit Yazması (Manuscript of Tahrir Uglidis by Nasir al-Din Tusi)*" adlı el yazması 1710 tarihli Osmanlı dönemine ait olup şimdi Harvard Müzesi'ndedir. Bu el yazmasında *Öklit'in ispatı* da (ki orijinali 1258 tarihli) mevcuttur (Bkz. "*Nasirüddin Tûsi'nin Öklit'in Elemanlar'ı Üzerine Yazdığı Tahrir'in Türkçe Tercümesi*"). Buradan da anlaşılıyor ki, Osmanlı döneminde okullarda Pisagor Teoremi için *Öklit*'in ispatı okutulurken "*Eşek Davası*"na dönüşmüş ve bu ispatı anlamayanlara "eşek" deniliyormuş. Çünkü dik açısı tepe açısı olmak üzere dik kenarlar üzerine kurulu kareler eşeğin kulaklarını benziyormuş!

İlk geometrik teoremler şöyle ifade ediliyordu (ki parantez içindeki ifadeler *Atatürk*'e aittir):

**Teorem 1.** Müsellesin, zaviyetan-ı dahiletan mecmu'ü 180 derecedir (Üçgenin iç açıları toplamı 180 derecedir).

**Teorem 2.** Müselles-i mütesaviyü'l-adla, zaviyeleri birbirine müsavi müselles demektir (Eşkenar üçgen, açıları birbirine eşit üçgen demektir).

**Teorem 3.** Kaim zaviyeli bir müsellesin veteri kaimesi üzerine resm olunan murabbanın sahası, kaim dilalar üzerine resm olunan murabbanın sahasının mecnununa müsavidir (Bir dikey üçgenin dikeyin çapı üzerine çizilen kare, üçgenin diğer 2 kenarı üzerine çizilen karelerin toplamına eşittir).

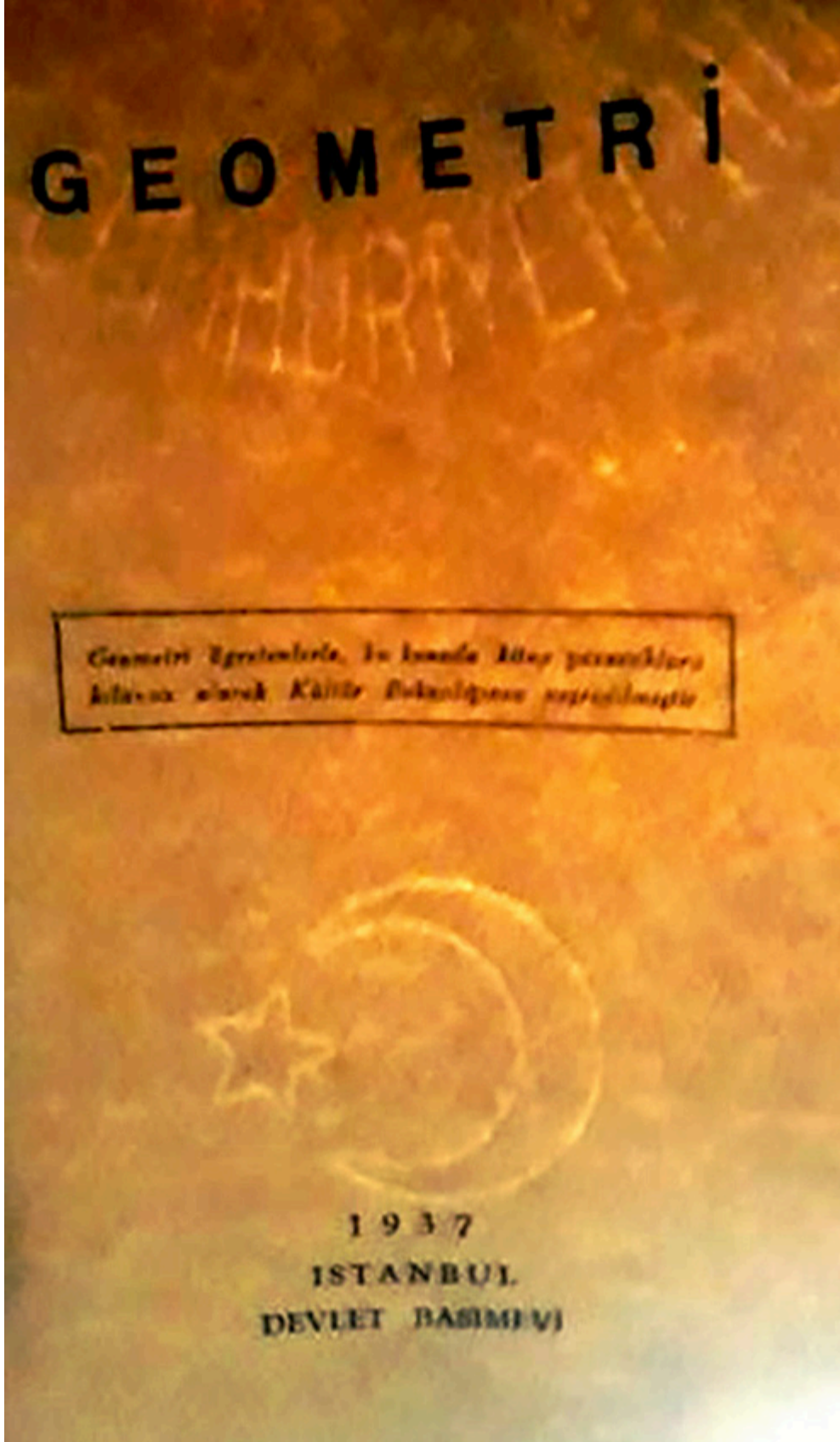
**Cumhuriyet Döneminde Pisagor Teoremi.** Harf Devrimi'nden sonra meslek alanlarındaki terimlerin de Arapça ve Farsçadan Türkçeye çevirme işlemine geçilmiş ve bunların başında "matematik terimleri" geliyordu. Çünkü Cumhuriyetten önce yazılmış matematik kitapları ve formüllerinin hepsi Arapçaydı. Bu nedenle *Atatürk*, öğrenciliğinden kalma matematik başarısıyla ve Yunanca ve Fransızca bilmenin verdiği avantajla (ki burada eğitimin hayat boyu devam ettiğini unutmayalım) bu işin üstesinden geleceğine inandı ve yukarıdaki Osmanlıca yazılmış teoremleri anlayabileceğimiz şekilde çevirdi yani Türkçeleştirdi. Daha Manastır İdadisi'ndeyken Fransızca gazeteleri okuyabildiğine göre, Arapça-Türkçe karışımından oluşan ve adeta tekerlemelere dönüşen bu teoremlerin ifadeleri saçma gelmiş olmalı. Çünkü bu teoremlerin Fransızca ifadelerini görüyor ve neden kendi dilinde aynı berraklıkta ifade edilemediğini düşünüyordu (Bkz. "*Atatürk ve Yabancı Dil*"). Bunun nasıl gerçekleştiğini bir yabancı dile haşır neşir olan herkes tahmin edebilir. Fakat bu, yeni bir şey değildi. Özellikle Tanzimat dönemindeki Osmanlı aydınları bu durumu görmelerine rağmen hiçbirisi başarılı olmadı. Örneğin *Enver Paşa* Arap alfabesini ıslah edip Türkçeye uyarlamayı çalışmıştı ama okuma-yazma kolaylığına kapıldığı için başarısız oldu (Bkz. "*İnönü ve Harf Devrimi*").



**Resim 10.** *Mustafa Kemal Atatürk*, Mekteb-i Harbiye-i Şahane'de 2.sınıf öğrencisiyken, 1901-1902, İstanbul.

#### **Atatürk'ün Fransızcadan Türkçeye Geçişi**

*Atatürk*'ün Fransızca ile ilk teması askeriyedeki Fransızca öğretmenini *Yüzbaşı Nakiyüddin Bey* sayesinde oldu. Henüz 15 yaşında iken şu notu düşmüş: "*Rüştiye 1. Sınıfında bir yüce kişiye rastladım. İlk ilham ana-baba kucağımdan sonra okuldaki eğitimcinin dilinden, vicdanından, terbiyesinden alınır*". Öğretmeninin "*Sen bu Fransızcanın peşini bırakma!*" öğüdünü tutar ve tatillerde Selanik'teki Fransız Frerler Okulunu ziyaret ederek Fransızcasını geliştirir. Bu konuda "*Türk devletinin şekli hükümeti cumhuriyettir*" örneğini verebiliriz. *Atatürk*, bunu Cumhuriyetin ilanından 1-2 gün önce hem Fransızca hem de Osmanlıca olarak yazmıştır (Bkz. "*Cumhuriyet ilanına karar verildiği gün*"). *Atatürk*'ün 19 Ağustos 1928'de Fransızca öğretmenini *Nakiyüddin Yücekök* ve *Tahsin Bey*'e yazdığı "*Daire-i intihabiyetiniz (seçim bölgeniz) hakkında verdiğiniz malumatı Türk harfleriyle yazdığınız için teşekkür ederim*" mektubundaki teşekkürü ise, Harf Devrimi'nden sonra bile eski harfleri kullananlar çoklukta olacak ki, yeni harflerle yazılmasına, yeni harflerin Türk'ün sesini yansıtmaya ve kendi düzenine uyması nedeniyle Latin harfleri yerine "Türk Harfleri" terimini kullanmasına bağlamıştır. Ama en çok da Fransızcadan Türkçeye geçişte rol oynadığı için teşekkür etmiş olmalı!



Resim 11. Atatürk'ün hazırladığı [Geometri](#) kitabı. Yayıncısının özgün karton kapağında. Filigranlı kâğıda basılan ön kapakta yukarıda "TÜRKİYE CUMHURİYETİ HÜKÜMETİ" ve aşağıda ay yıldız figürü vardır.

**Atatürk'ün Geometri Kitabı.** Bilindiği üzere **Atatürk**, ölümünden 1.5 yıl önce son bir kültür hamlesine girişmiş ve Türkçe "[Geometri](#)" kılavuzunu hazırlamıştı. O sırada **Atatürk**'ün yanında bulunan TDK Başuzmanı **Agop Dilaçar** bu kılavuzun nasıl hazırlandığını şöyle anlatır: "Geometri kitabını **Atatürk**, ölümünden bir buçuk yıl kadar önce Üçüncü Türk Dil Kurultayı'ndan hemen sonra 1936-1937 yılı kış aylarında Dolmabahçe Sarayı'nda kendi eliyle yazmıştır."

1936 sonbaharında bir gün **Atatürk** beni, Özel Kalem Müdürü **Süreyya Anderiman**'ın yanına katarak Beyoğlu'ndaki Haşet (Hachette) Kitabevi'ne gönderip uygun gördüğümüz Fransızca Geometri kitaplarından birer tane aldırttı. Bunlar **Atatürk** ile birlikte gözden geçirildikten sonra, yazılacak Geometri kitabının genel tasarısı çizildi. Bir süre sonra ben ayrıldım ve kış aylarında **Atatürk** bu eser üzerinde çalıştı. Geometri kitabı bu emeğin ürünüdür."

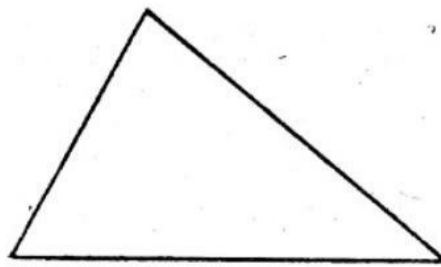
**Atatürk**, 44 sayfalık yapıtla ilk kez 1937'de solda orijinali üzerinde görülen "Geometri öğretenlerle, bu konuda kitap yazacaklara kılavuz olarak Kültür Bakanlığınca yayınlanmıştır" ibaresi altında "üçgen, dörtgen, beşgen, köşegen, eşkenar, ikizkenar, paralelkenar, yanal, yamuk, uzay, yüzey, düzey, çap, yarıçap, kesik, kesit, yay, çember, teğet, açı, açıortay, içters açı, dışters açı, taban, eğik, boyut, kırık, çekül, yatay, düşey, yöndeş, konum, artı, eksi, çarp, bölü, eşit, toplam, oran, orantı, türev, alan, varsayı, gerekçe" gibi yeni Türkçe terimlerle Türk halkının karşısına çıktı!

**Atatürk**'ün dil çalışmalarını da yakından izleme olanağı bulan **Agop Dilaçar**, **Atatürk**'ün yazdığı geometri kitabı üzerine şunları söyler:

"**Atatürk** hep matematikle uğraşmıştı (ki matematiğe olan tutkusunu ve sayısal dünyaya yatkınlığını O'nun yaşamı boyunca kazandığı zaferlerin mayasında görmek mümkündür). Eski geometri terimleri çok ağırdı idi. Ben bile uzun uzun bu terimleri okuduğum halde, şimdiki karşımda güçlüğünü daha iyi anlıyorum. Pedagojide bir gerçek var: Fikir yolunun açık olması, bir ipucunun bulunması lazımdır. Yoksa bir külçe gibi çöker. Müselles kelimesini ele alalım. Arapça okullarımızdan kaldırılmıştır. Sülüs'ten müstak (türetilmiş) bir kelime olduğunu öğrenci nasıl bilsin? Arapça yoğurucu bir dildir. Örneğin müsteşrik, şark kelimesinden gelen bir kelimedir. Önüne, ortasına, arkasına birtakım ekler gelir. Bunun aslını bulmak başlı başına bir Arapça gramer meselesidir. Okullarımızdan Arapça, Farsça kaldırılmış olduğundan, öğrenci 'Müselles'i kütle kelime olarak karşısında görecektir; 'Üç' aklına gelmeyecektir. Ama müselles yerine 'Üçgen' dersek, bir 'Üç' var. 'Gen', **Atatürk**'e göre 'Genişlik'ten alınmıştır; bir ipucu var. 'Dörtgen' dörtden gelmiştir; bir ipucu vardır. Eşit denk anlamına gelen 'Eş'ten gelmiştir. Ama müsavi Arapça bir kelimedir. Bu sebeple **Atatürk**'ün prensipleri burada da doğru idi. Onun için bu en ağırdaki bilim dalını ele aldı ve kitabı örnek olarak bıraktı."

**Atatürk** terim çalışmalarının ülkedeki etkilerini fiili olarak da inceledi. Ülkedeki pek çok okulu ziyaret ederek öncelikle matematik derslerine girdi ve öğrencilerin dersteki başarılarını gözlemledi. 13 Kasım 1937'de Kültür Bakanı **Saffet Arıkan**, İçişleri Bakanı **Şükrü Kaya**, **Sabiha Gökçen**, **İsmail Hakkı Tekçe** ve yaveri **Naşit Mengü** eşliğinde bir heyetle Sivas Lisesi'ne gitti. Lisenin 9-A sınıfında programdaki Geometri (o zamanki adıyla Hendese) dersine girdi ve bu derste bir kız öğrenciyi tahtaya kaldırdı. Öğrenci, tahtada çizdiği koşut (paralel) iki çizginin, başka iki koşut çizgiyle kesişmesinden oluşan açıların Arapça adlarını söylemekte zorluk çekip yanlışlıklar yapınca durumdan etkilenen **Atatürk** tepki gösterdi. "Bu anlaşılabilir Arapça terimlerle, öğrencilere bilgi verilemez. Dersler, Türkçe yeni terimlerle anlatılmalıdır" diyerek tebeşiri eline aldı, tahtada çizimlerle 'zaviye'nin karşılığı olarak 'açı', 'döl'nün karşılığı olarak 'kenar', 'müselles'in karşılığı olarak 'üçgen' gibi Türkçe yeni terimleri kullanarak, birtakım geometri konularını ve bu arada **Pisagor teoremini** anlattı!

**Dikeyin Çapı ve Dikeyin Çapının Karesi.** Fakat **Atatürk**'ün "Pisagor Teoremi" demesi mümkün değildi, çünkü [Geometri](#) kitabının 21. sayfasında dik üçgen için şunları yazmıştı: "55. Dikey (Dik) Üçgen: Bir açısı dikey olan üçgendir."



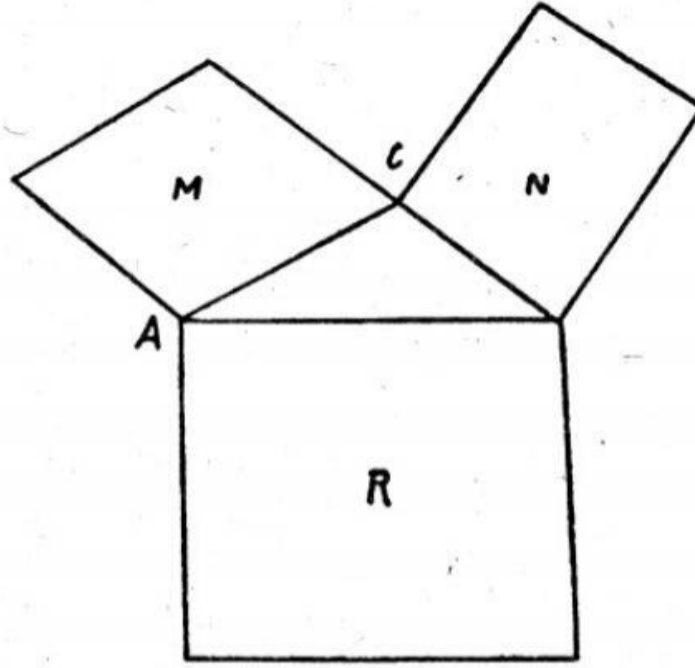
Şekil : 32

Bir dikey üçgende, dikey açı karşısında bulunan kenara **Dikeyin Çapı** denir."

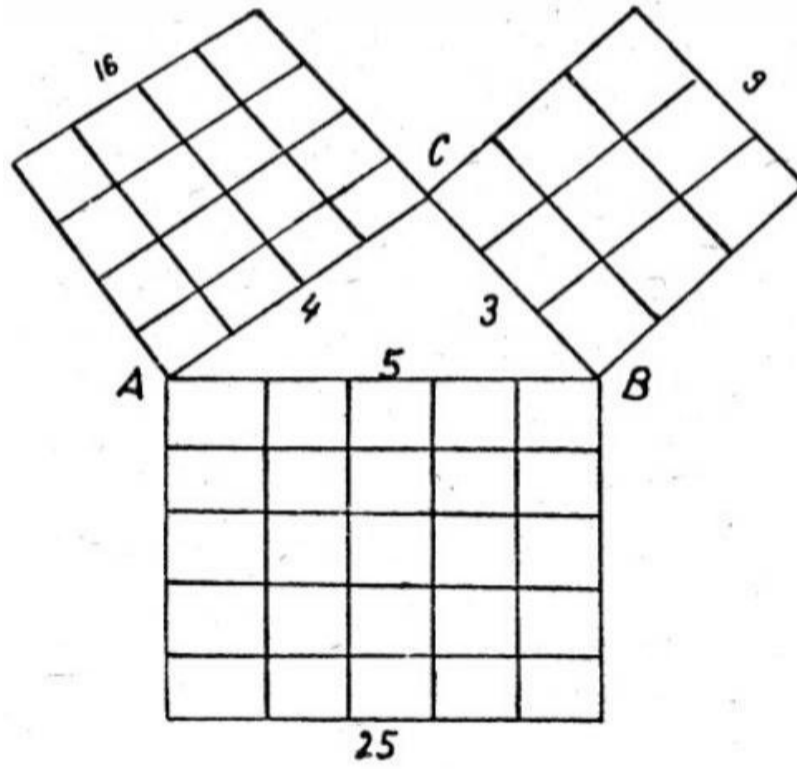
33-35. sayfalarda da **Dikeyin Çap Karesi** hakkında şunları yazar:

"95. Prensipte VII – Bir dikey üçgende dikeyin çapı üzerine çizilen kare, üçgenin diğer iki kenarı üzerine çizilen karelerin toplamına eşittir.

96. 5, 4 ve 3 sayılarını ele alalım. Bunların kareleri 25, 16 ve 9'dur.  $25 = 16 + 9$  olduğundan şu sonuca varırız ki, bundan önceki prensibe göre, kendi aralarındaki oran 5, 4 ve 3 sayıları gibi olan üç çizgi ile bir dikey üçgen çizilebilir.



Şekil : 61

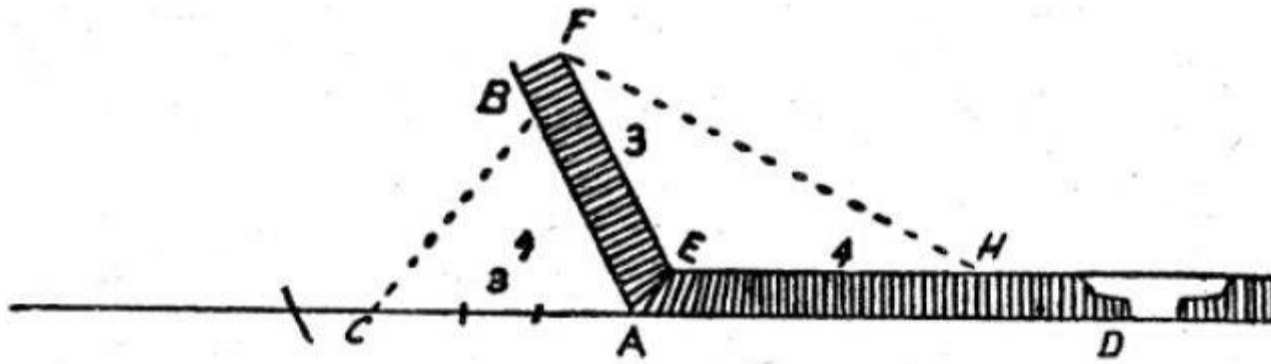


Şekil: 62

97. Bu 3, 4 ve 5 sayıları iki duvar arasındaki açının dikey olup olmadığını ortaya çıkarmaya da yarar.

Açının içinde olduğu gibi dışında da işlemek mümkündür.

Duvarın dışında, DA çizgisinin uzantısı üzerinde 3 metre ve AB çizgisi üzerinde 4 metre alırız. Eğer BC çizgisi 5 metreden daha az veya

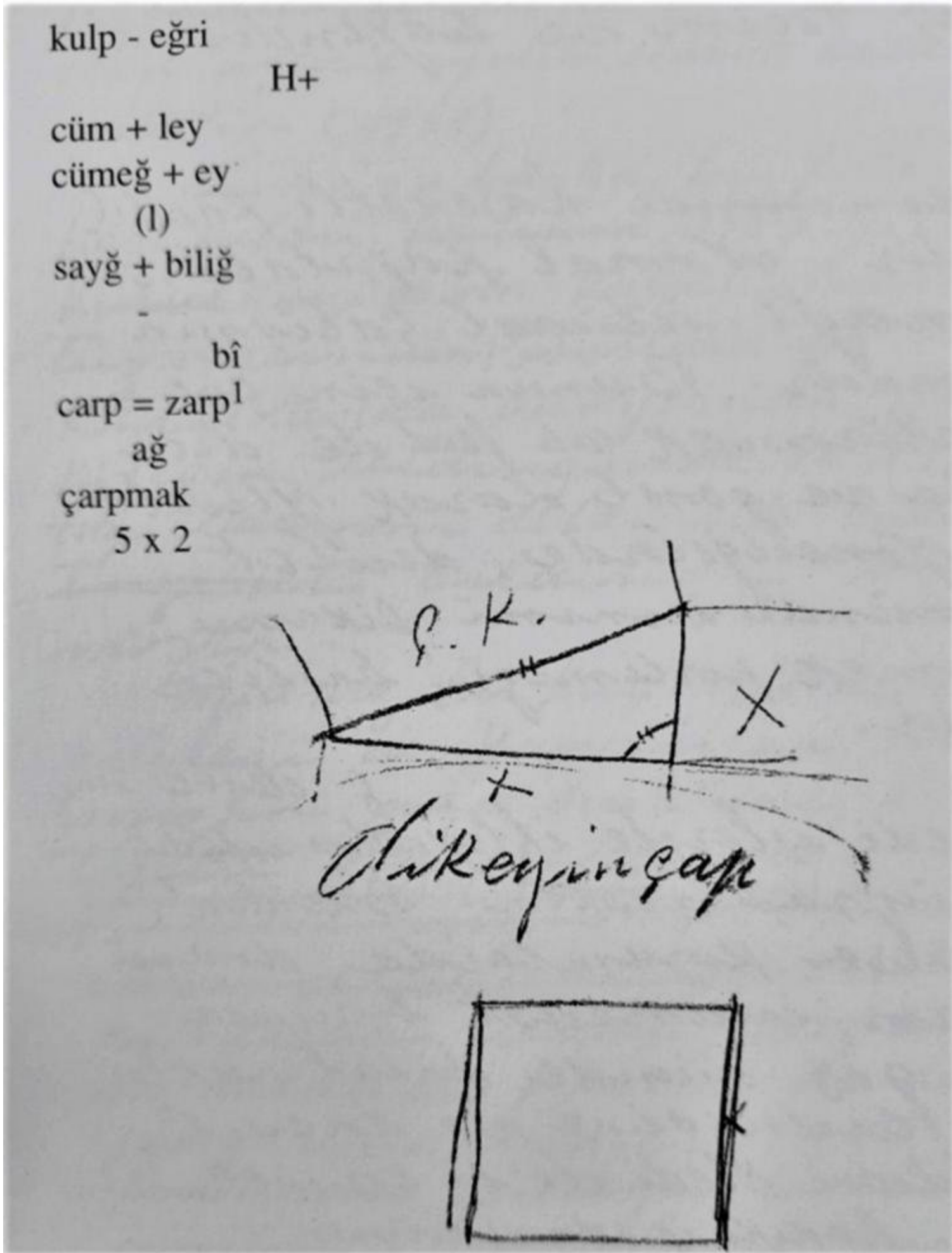


Şekil : 63

daha çok ise, iki duvarın açısı dikey değildir.

Açının içinde de aynı şekilde işlenebilir."

Burada *Atatürk*'ün 55 ve 95-97'deki tanımları yaparken kendi elleriyle şu çizimleri yapmıştır:



Şekil 13. *Atatürk*'ün Geometri kitabını hazırladığı günlerde aldığı notlardan bir bölüm. Bkz. "[Atatürk'ün Geometri kitabı: Bilim dili Türkçe](#)".

### Atatürk Öldükten Sonra Ne Oldu?

Yüce Önderimiz *Atatürk* 10 Kasım 1938'de öldükten sonra ne yazık ki Türk Milli Eğitim Sistemi de vefat etti. Çünkü 11 Kasım 1938'de toplanan TBMM'ne katılan 348 milletvekilinin oybirliğiyle *İsmet İnönü* Cumhurbaşkanı seçildikten sonra *Atatürk*'e ve demokrasinin kurulacağına inananları şok etmiş ve bir avuç muhterisin haricinde kimse tasvip etmemişti. 26 Aralık 1938'de toplanan CHP Olağanüstü Kurultayı'nda yapılan tüzük değişikliğiyle *Atatürk* "Ebedi Şef" ve *İnönü* de "Führer" ve "Duce"nin Türkçe karşılığı olarak "Milli Şef" olarak ilan edilmiş, *Atatürk* dönemindeki politikacılar tasfiye edilmiş ve *İnönü* ekibi kurulmuştu. Böylece *Atatürk* dönemindeki "Türk Devrimi"nden vazgeçilerek Yunan-Latin kökenli "Türk Hümanizmi" kültür politikalarına geçilmişti. Kültür politikalarında "Eski Yunan ve Roma Medeniyetine inmek" olarak tarif edilen bu hümanist anlayış *Atatürk*'ün ölümünden sonra resmi politika olarak görülmüştür. 2. Dünya Savaşının sıkıntılı günlerinde eğitim ve kültür hayatında "Hümanizma" temel ilke olarak kabul edilmiş ve geniş bir eğitim seferberliğine girilmiştir. Bu dönem aynı zamanda *Atatürk*'ün kültür politikalarının da tartışılmaya başlandığı süreç olmuştur (Bkz. "[İnönü Dönemi Kültür Politikalarında Hümanizm](#)"). İşte bu hengâme içinde ne olup bittiğini anlamaya çalışan *Oktay Sinanoğlu* (ki 1963'te Yale Üniversitesi'nde dünyanın en genç profesörü oldu ve ömrünü Türkçeye ve Türk eğitimine adanmıştı), 10 yaşındayken başından geçenleri 69 yıl sonra anlatırken *İnönü*'yü ve kültür politikalarını yerden yere vurur (Bkz. "[İkna Odası: Oktay Sinanoğlu ve Dilek Sinanoğlu-22 Mayıs 2014](#)").

Dönemin Milli Eğitim Bakanı *Hasan Ali Yücel*'e göre modernleşmenin sağlam temellere dayanması milletin ruhça buna alışması için dünyanın en meşhur edebi ve felsefi eserlerinin Türkçeye kazandırılması gerekiyordu. Bundan sonra yoğun bir şekilde dünya klasikleri Türkçeye çevrilmiştir. Örneğin arkeolojinin romanı

olarak bilinen dünyaca meşhur C. W. Ceram'ın "[Tanrılar, Mezarlar ve Bilginler](#)" adlı kitabının Türkçeye çevrilmesi bu dönemde oldu. **Hasan Ali Yücel**, dünya klasiklerinin çevrilmesinin Türk hümanizmasının doğmasına katkısı konusunda şöyle der: "Kültür anlayışımızda milliyetçiliğin tecellilerinden biri de Cumhuriyet'in daha ilk zamanlarında, Arapça ve Farsçayı kaldırmamız olmuştur. Bu boşluğu da o seneler ve bu yakınlarda Latince ve Yunanca ile doldurmaya başladık."

Bu konuda İstanbul Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Bilim Tarihi Dalı'nda yüksek lisans yapan **Burak Güngör**, 2013'teki "[Matematik Terimlerini Türkçeleştirme Hareketleri](#)" adlı yüksek lisans tezinin [102-103](#). sayfalarında Osmanlıca terimlerin Türkçeleştirilmesi hakkında şunları tespit eder:

"1938 yılında basılan ve okullarda okutulan **Geometri I** adlı kitaba bakıldığında **yüzey, doğru, silindir, paralel, dikey, kare, dikey dörtgen, küp, dikey dörtgenler prizması, açı, üçgen, bütüye aç, yüre (küre), simetri, ikizkenar üçgen, dikey üçgen** gibi 3. Kurultay sonrası yenilenmiş halleri ile yer aldığını görmekteyiz. Aynı değişim 1938 yılında Kültür Bakanlığınca kurul tarafından kılavuz kitap olarak basılan **Aritmetik** adlı matematik kitabında da görülmektedir. Eserde **ekzey (alıştırma), sayı, ertey (basamak), toplay (toplama), çıkay (çıkarma), çarpay (çarpma), böley (bölme)** gibi yeni terimlere rastlanmaktadır. Ayrıca daha sonradan terk edilecek olan olan **onometre (dekametre), yüzometre (hektometre), binometre (kilometre), ondometre (desimetre), yüzdemetre (santimetre), bindemetre (milimetre)** gibi oldukça başarılı Türkçeleştirilmiş olan terimleri 3. Kurultayda alınan "**Kökü Türkçeden gelen Kültür dünyasında müşterek olan (elektrik, dinamo, metre, gram vb.) terimleri olduğu gibi almak**" prensibinden dolayı terk edildiğini görmekteyiz.

1939 yılında yayımlanan bir Kılavuz'da 1938 baskısı Aritmetik ve Cebir kitaplarındaki terimlerden bazılarının düzeltilmesi istenmiştir. Kılavuz **bindemetre** yerine **milimetre**, **ekzey** yerine **egzersiz**, **çıkay** yerine **çıkarma**, **çarpay** yerine **çarpma**, **toğ** yerine **faiz fiatı**, **böley** yerine **bölme**, **işlev** yerine **işlem**, **denkley** yerine **denklem**, **dikey dörtgen** yerine **dikdörtgen**, **dikeyin çapı** yerine **hipotenüs** gibi terim değişiklikleri önermektedir.

1939 yılında basılan **İlk Aritmetik** ve **Geometri** kitaplarında bu yenilenen terimlerin kullanıldığını görmekteyiz. Böylece eski (Osmanlıca) matematik terimleri 1938 yılından itibaren yerini yeni terimlere bırakmıştır."

Demek ki 1939'daki Eğitim ve Öğretim için "**Dikeyin Çapı**" yerine Yunanca "**Hipotenüs**" önerilmekle kalmamış, değiştirilmiş ve bu değişiklikle birlikte **Atatürk**'ün bir diğer çıkarımı olan "**Dikeyin Çap Karesi**" terimi de "**Pisagor Teoremi**"ne dönüştürülmüş, dolayısıyla bu değişikliklere göre **İnönü** Milli Mücadele'deki tarihi şahsiyetinden sıyrılıp kişisel bir tasarrufta bulunmuş gözükür!



**Resim 12.** Başvekil **Menderes**, "**İnönü kenara çekilsin. Aksi halde tarihî şahsiyeti bırakılıp CHP lideri için muamele yapılacak**" dedi. Çünkü CHP liderinin yaşına uygun hareket etmediğini belirterek (ki **İnönü** 70 yaşında olmasına rağmen kendisine mukavemet gösteriyordu) "**Bize yumruk atan İsmet Paşa'yı alır layık olduğu muameleyi yaparız**" dedi (Bkz. [22 Eylül 1958](#). Gazetenin kendisi sarı saman kağıdına basılmış ve resimler siyah-beyazdır ama ben resimleri gerçeğe çok yakın şekilde renklendirdim. Şu **Kadeş** Hadisesi, dünyada var mı ki eşi benzeri? Çanakkale şehitlerini ziyarete gitmek üzere yola çıkacak olan Kadeş vapurunda yaşananlar yazarların dikkatinden kaçmamış ve Üstat **Necip Fazıl**, Kadeş olayları hakkında Son Posta gazetesinde "Zina Kooperatifi" başlıklı bir yazı kaleme almıştı. Bkz. "[Kadeş Rezaleti Hiç Unutulur Mu?](#)").

Burada söz konusu olan "Hipotenüs" teriminin Osmanlı ve Türkiye Cumhuriyeti dönemlerindeki kullanımları şöyle olmuştur.

"**Hipotenüs**" Teriminin Osmanlı ve Türkiye Cumhuriyeti Dönemlerindeki Kullanımları. Öncelikle "Hipotenüs" kelimesi **Apollodorus**'taki "**ἡ τῆν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτείνουσα (γραμμὴ veya πλευρά)**" dan türetilerek "**dik açığa karşı gelen kenar**" anlamına gelir. Yunanca "**ὑποτείνουσα (hypoteinousa)**" terimi **Gec Latinceye** "**hypotēnūsa**" olarak **ödünç** verilir ve oradan da "-e" sonekiyle "**Hypotenuse (Hipotenüs)**" yazımı Fransızcaya geçer (**Estienne de La Roche**-1520). Daha fazla bilgi için "**Hypotenuse**" sayfasındaki "**Etymology**" bölümüne bakınız.

Hipotenüs ile birlikte gelen Pisagor teoremi ise antik dönemde "**Hecatomb Teoremi**" ve Bizans döneminde, özellikle mimarlıkta "**Kareler (Skadras) Kuralları**" olarak anılıyordu. Bu son kural dik üçgenin kenarlarına çizilen kareler nedeniyle bu adı almıştır (Bkz. "[Visual Proof of The Pythagorean Theorem](#)").

Eğer "**Hipotenüs**" kelimesini TDK'da taratarsanız Türkçe Batı Kökenli Kelimeler Sözlüğü'nde şu sonuçların verildiğini görürsünüz:

### TÜRKÇEDE BATI KÖKENLİ KELİMELE R SÖZLÜĞÜ

#### Hipotenüs

Fransızca hypoténuse

Bir dik üçgende, dik açının karşısında bulunan kenar: § 1. Veteri kaime, 2. Kaim veter, 3. Dikayın çap, 4. Hipotenüs. Bkz. "Peyami Safa: Osmanlıca Türkçe Uydurmaca", S. 41.

### Osmanlıca-Türkçe Uydurmaca

Burada anılan kaynakta *Peyami Safa*, 12 Kasım 1939 tarihinde aldığı bir mektupta bazı matematik terimlerini, geçirmiş olduğu aşamalarla birlikte, aynen şöyle verir (Bkz. "*Osmanlıca-Türkçe-Uydurmaca*", Terim Rezaleti, S. 66):

I. 1. Veteri kaime, 2. [Kaim veter](#), 3. Dikeyin çapı, 4. Hipotenüs.

Bu kelimelerden ilk ikisi Osmanlı döneminde, üçüncüsü *Atatürk* döneminde kullanıldı ve dördüncüsü ve sonuncusu 1939'dan itibaren günümüze kadar kullanılmıştır. İşte *Atatürk* (ki Osmanlıca, Yunanca, Fransızca ve Türkçeye hakimdi) bu ilk 2 kelimeyi 1937'de Türkçeye çevirirken 3. kelime ortaya çıktı. Fakat 1939'da devam eden terimlerin Türkçeleştirme çalışmalarında kelime sadece Batı ile iyi ilişkilerinin kurulması adına Fransızca kullanımına terk edildi ama bu haliyle ne Osmanlıca'da ne de Türkçede hiçbir anlam ifade etmiyordu. Örneğin Covid-19 ile birlikte ortaya çıkan "[Pandemi](#), [Filyasyon](#), [Entübe](#)" gibi gündelik hayatımızda yer edinen tıbbi terimlerin karşılıklarının TDK tarafından 2022'deki Türkçe Sözlük'te yer alacağı belirtilmesiyle daha da açık hale gelmiştir.

II. 1. Yesari müstakimler, 2. Sapık doğrular, 3. Aykırı doğrular.

III. 1. İki meçhullü muadele heyeti, 2. Neğbileyli dengiley sistem, 3. İki bilinmeyenli dengilem sistemi.

IV. 1. Zaviye münferice, 2. Aput aç, 3. Geniş aç.

Bunlardan 2. kelime Geometri kitabının [37. maddesi](#)nde "Oput aç" olarak geçer ve *Atatürk* bunu doğrudan Fransızcadan almıştı. Çünkü kelimenin Türkçesi yoktu. 1939'da bu kelime "Geniş aç"ya dönüştürüldü.

V. 1. Mütemmim iki zaviye, 2. Ütey iki aç, 3. Bütünler iki aç.

Yine 2. kelime aynı kitabın [41. maddesi](#)nde "Bütey açlar"a ve 1939'da da "Bütünler açlar"a dönüştürüldü.

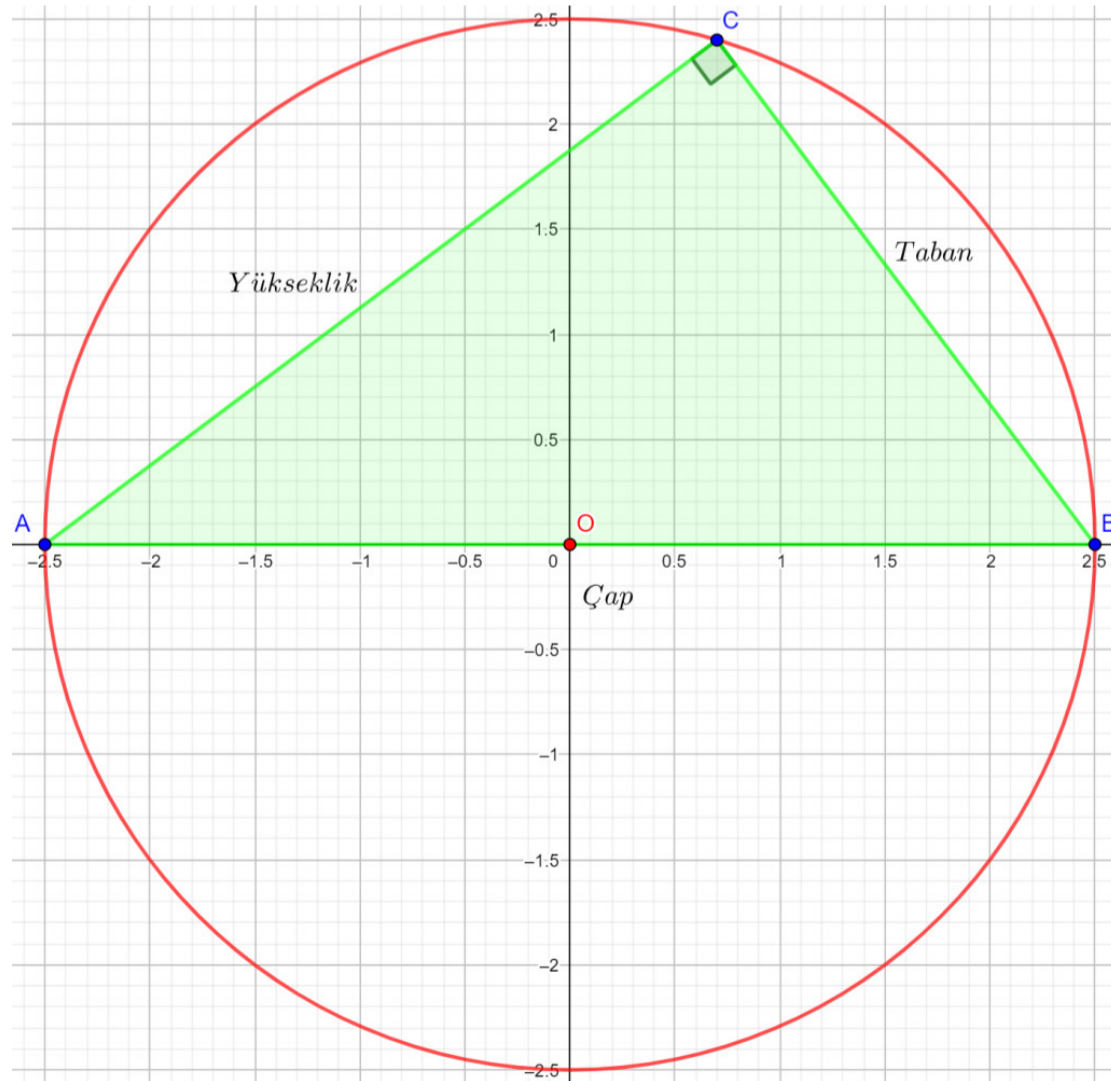
VI. 1. Temami iki zaviye, 2. Tümeş iki aç, 3. Tümşler iki aç.

Buradaki ilk kelimenin Türkçesi [40. maddesi](#)nde "Tümeş açlar"a ve 1939'da da "Tümşler açlar"a dönüştürüldü.

Özetle bu terimlerden görüldüğü üzere *Atatürk*'ün [Geometri](#) kitabıyla başlattığı Türkçe terimlerin günümüzdeki kullanımları 1939'da büyük bir ölçüde ortaya konulmuş ve ortaya konulamayanlar ise Evrensel Kültür Dünyası'ndan olduğu gibi alınmıştır!

### *Atatürk*'ün Metrik Bağınıdaki Terimleri Türkçeleştirmesi

Burada Pisagor Teoremi'ni *Atatürk*'e göre şöyle tanımlayabiliriz:



Şekil 14. ABC dik üçgeninin [AC] ya da [BC] dik kenarlarından birine "Taban (Base)" ve diğerine "Yükseklik (Height)" dersek [AB]'ye "Çap (Diameter)" deriz. Bu durumda ABC dik üçgeninde taban ve yüksekliğin ya da dik kenarların karelerinin toplamı bu kenarlar arasında kalan çapın karesine eşit olur. Şekle göre yarım çemberde ABC üçgenine eş olan bir çift üçgen (ki bunların tepe noktaları düşey çapa göre simetrikler) ve tam çemberde simetrik olarak 2 çift yani 4 tane eş üçgen mevcuttur.

Bu şekilde [AB] hipotenüsüne sadece “Çap” dememiz yeterlidir. Çünkü böyle dediğimizde TDK Başuzmanı **Agop Dilaçar**'ın belirttiği gibi hipotenüs için bir ipucu vardır: “Çapı gören (çevre) açı diktir!” (**Thales**, [Çember Teoremi](#), MS 6. yy. Bu bilgi Eski Babil'den geliyordu. Bkz. [BM 85194](#) no'lu tabletteki 21-22. problemlere. Benzer problemleri [MS 3049](#) no'lu tabletin 1-a ve 1-b'de görebilirsiniz). Yunancada bu dik açıya karşı gelen kenara “**Hipotenüs**” denir. **Atatürk** bu terimi Yunanca, Osmanlıca ve Fransızcadan “**Dikeyin Çapı**” olarak çevirdi ama buna gerek yoktu, çünkü sadece “Çap” demek yeterliydi ve siz bunu söylediğiniz zaman, **Thales**'e göre zaten bu çapa karşılık gelen dik üçgende açı dik oluyordu. **Atatürk** bu durumun gayet farkındaydı ve bu yüzden Şekil 13'teki notta çapın üzerine “**Ç. K. (Çapın Karesi)**” yazdı. Bunları yazdığına Pisagor teoremine ilişkin arkeolojik araştırmalardan, örneğin **Neugebauer**'de olduğu gibi arkeo-matematiksel çalışmalardan ve kitaplardan haberi yoktu (ki okuduğu antik döneme ait yabancı kitaplar arasında böyle bir kitap yoktur). **Atatürk** sadece Osmanlı dönemindeki matematik terimlerini bilimsel olarak Türkçeleştirmeye çalışıyordu. Yani **İnönü** ve uzmanları, 1938'den 1950'ye kadar Batıdaki kitapları Türkçeye çevirirken (ki bunun için bir tercüme bürosu kurmuşlardı) **Atatürk**, sadece bilimsel düşünceye dayanarak Batılı bilim adamlarının elde ettiği en son gelişmeleri çoktan Türkçeye çevirmişti bile (Bkz. “[Atatürk ve İnönü Arasındaki Fark](#)”).

**Not 8.** Yukarıda MÖ 2000'lere dayanan bir dik üçgende metrik bağıntının Osmanlı ve Cumhuriyet dönemlerindeki gelişmelerini kısaca aktarmaya çalıştım (Bkz. “[Atatürk'ün Ölümünün 84. Yıl Dönümü](#)”). Diğer gelişmeler için “[YBC 7289 No'lu Tablet'in 2. Çözümü](#)” adlı makaleme bakabilirsiniz). Bu konuda ne yazık ki bir makale, araştırma, tez ya da kitap bulabilmeniz mümkün olmamakla birlikte, ben sadece Albay **Tan-Sun Moon**'un “*Avın heyecanı takiptedir*” dediği gibi izleri takip ettim ve 61. sayfadan buraya kadar elde ettiğim sarsıcı bulgularımı sıraladım. Buna göre dik üçgende metrik bağıntıyı nasıl anarsanız anın ama Albay **Tan-Sun Moon**'un aşağıdaki uyarısına göre hareket etmeniz en doğrusu olacaktır.

### **Batının İkiyüzlülüğü!**

“[Başka Gün Öl!](#)” filminin girişinde şöyle bir diyalog mevcuttur:

**Albay Tan-Sun Moon:** “*Bay Van Bierk. Görüşmeyi dört gözle bekliyordum*”.

**James Bond:** “*Ben de. Afrika'daki asker dostlarım size teşekkür borçlu Albay Moon*”.

-*Ambargo yüzünden çok az insan savaş elmaslarını alıyor.*”

**Moon:** “*BM'i bilirim. Oxford ve Harvard'da okudum. Batılı ikiyüzlülüğünde mastır yaptım.*”

### **9. Bu Tablet, Bir Astronomi Tableti Mi İdi?**

Tabletin modern analizini yaparken Tablo 3'deki sonuçlar, bana tabletteki dik üçgenlerin (30°, 45°) aralığında 30' aralıklarla yazılmış olduğu izlenimini verdi. Hatta bu öyle bir izlenimdir ki, ardışık fark açıları 30' civarında olan tablete hâkim dik üçgenlerle birlikte ardışık fark açıları 1° ile 2° arasında olan dik üçgenlerin de interpolasyon yöntemine elverişli olduğunu görmüştük. Ayrıca 4. sütündeki sayılara göre –ki bu sayılar yardımıyla [98]'de tanımlı  $k_n$  katsayıları Resim 8'deki dik yamukların alanları arasındaki ilişkileri göstermektedir, [101]'deki  $k_n$  katsayıları ile ardışık dik üçgenlerin eğim açılarının oranları arasında ilişkiler açıktır– tabletin bu yönde değerlendirilmesine ait kapının açık bırakıldığı sonucu çıkmaktadır. Burada dikkatimi çeken bir diğer önemli nokta şudur: **Zecharia Sitchin**, “[12. Gezegen](#)”, R&M Yayınları, 2004, Birdenbire Uygarlık, S. 42'de “*Bu sistem bazı bakımlardan günümüzde kullandığımız 10 tabanlı sayma sisteminden de üstündür.*” demişti ve bunun doğru olduğunu aynı çalışmayı kendi sistemimizde yapamamakla görmekteyiz.

Bu arada Si. 427 no'lu tablet için 2019 Haziran'ında İstanbul Arkeoloji Müzesi'ne gelen Dr. **Mansfield**'in Plimpton 322 no'lu tablet hakkındaki bulguları aşağıdaki haberde verilir (Bkz. “[Genelleştirilmiş Piobert-Parmantier Metodu](#)”, S. 9-11, 23. Ayrıca Plimpton 322 no'lu tablet hakkında Dr. **Mansfield**'in **N. J. Wildberger** ile birlikte yazdıkları ve 24.08.2017 tarihli “[Plimpton 322 is Babylonian exact sexagesimal trigonometry](#)” makalesine bakabilirsiniz. Linki tıkladıktan sonra makaleye PDF formatında ulaşabilmek için sol üst köşedeki “View PDF”ye tıklamanız gerekir).

### **3.700 Yıllık Babil Kil Tableti Matematik Tarihini Sonsuza Dek Değiştiriyor!**

**Avustralyalı bir matematikçi, dünyanın en eski uygulamalı geometri örneğini ortaya çıkararak matematik tarihini sonsuza dek değiştirdi.**

Yaklaşık 3700 yıl öncesine ait bir tabletin, matematik tarihindeki en eski uygulamalı geometri örneği olduğu tespit edildi.



**Jak Connor**  
Tech and Science Editor

Published Aug 5, 2021 6:19 AM CDT  
Updated Sep 7, 2021 3:34 AM CDT

UNSW Bilim Matematik ve İstatistik Okulu'ndan Avustralyalı matematikçi Dr. **Daniel Mansfield**, MÖ 1900 ila 1600 yılları arasındaki Eski Babil dönemine tarihlenen Plimpton 322 adlı 3700 yıllık bir kil tablet üzerinde uygulamalı geometrinin bilinen en eski kökenlerini ortaya çıkardı. Foundations of Science dergisinde 4 Ağustos'ta yayımlanan yeni bir çalışmaya göre, kil tablet, araziye doğru dik açılar yapmak için kullanılan “Pisagor üçlüleri” ile ölçmek için kullanılıyordu.

Dr. **Mansfield** şöyle diyor: “*Tabletin keşfi ve analizi matematik tarihi açısından önemli sonuçlar doğuruyor. Örneğin bu, Pisagor'un doğumundan 1,000 yıldan fazla bir süre öncesine ait.*” Dr. **Mansfield** sözlerine şöyle devam etti: “*Matematiğin üçgenlerle ilgili dalı olan trigonometrinin MÖ 2. yüzyılda gece gökyüzünü inceleyen eski Yunanlılar tarafından geliştirildiği genel olarak kabul edilir. Ancak Babilliler gökyüzünü değil, yeri ölçmekle ilgili sorunları çözmek için kendi alternatif 'proto-trigonometrileri' geliştirdiler.*”

Bu hikâye hakkında daha fazla bilgi edinmek isterseniz “[Matematikçi dünyanın en eski uygulamalı geometri örneğini ortaya çıkardı](#)” adlı makalesine göz atabilirsiniz.

Aşağıdaki çalışmam, **Robson**'un Plimpton 322 no'lu tabletinde kayıp sandığı satırlardaki doğuranların bulunması ve bununla birlikte gelen yeni bir trigonometrik cetvelin nasıl bulunduğunu gösteren ek çalışmamdır.

*Derya PAMUKTULCAN*

**4.4. Robson'un Plimpton 322 No'lu Tabletindeki "Muhtemel Kayıp Satırlar"ı.** Dr. **Eleanor Robson** (şimdi Profesör), "[Ne Sherlock Holmes Ne Babil: Plimpton 322 No'lu Tabletten Yeniden Değerlendirilmesi \(Neither Sherlock Holmes nor Babylon: A Reassessment of Plimpton 322\), 2001](#)" makalesinin 197. sayfasındaki (PDF'de 31. sayfa) "[Plimpton 322'de Muhtemel Kayıp Satırlar \(Possible Missing Lines in Plimpton 322\)](#)" başlıklı [Tablo 8](#)'de Plimpton 322 no'lu tablette mevcut olmayan ama 15 dik üçgenin aralarında mevcut sandığı 6 tane Pisagor üçlüsü verir ve bunlardan bazılarını 198. sayfadaki "[Seçilmiş Ters Çiftler İçin Kriter \(Criteria for Choosing the Reciprocal Pairs\)](#)" başlıklı [Tablo 9](#)'da tekrar verir. Buna göre [Tablo 8](#)'deki ilk 3 Pisagor üçlüsü olan 4a, 8a ve 11a satırlarındaki  $x = \frac{p}{q}$  (ya da m) eğimlerini [Tablo 9](#)'da verir ve 6a, 9a ve 12a satırlarındaki x (ya da m) eğimlerinin de mevcut olması gerektiğini söyler.



**Resim 13.** İngiliz Asurolog ve akademisyen Prof. Dr. [Eleanor Robson](#).

**Robson**, bu yeni eğimler, dolayısıyla p ve q doğuranları için anılan makalesinin 193. sayfasındaki "[Ters Çiftler ve Kayıp Satırlar \(Reciprocal Pairs and Missing Rows\)](#)" başlığı altındaki 196. ve 199. sayfalarda şunları söyler: "Plimpton 322'ye geri dönersek, tüm ters sayıların 4 basamaklı veya daha kısa olduğunu ve her çiftteki toplam basamak sayısının her zaman 7'den az olduğunu görüyoruz. Bu seçim koşulları altında, [Tablo 8](#)'de 4a, 8a ve 11a satırlarında gösterildiği gibi, tablodan 3 ters çiftin eksik olduğu görülür. Plimpton 322'nin sütunlarındaki karşılık gelen 3 giriş de burada verilmiştir; ayrıca üçgenin uzun kenarı ve benzer p, q doğuranları da verilmiştir.

Bir an için, kâtibin bir 'doğuran fonksiyona' [bkz. [Friberg 1981a, 284–289](#)] erişimi olmadığını, ancak standart çarpım tablosu derleyicilerinin muhtemelen yaptığı gibi çeşitli kriterler kullanarak ters çiftleri derlediğini veya atladığını varsayalım. Neden tablonun türetildiği çiftleri seçmiş ve [Tablo 8](#)'deki 3'ünü atlamış olsun ki? Karşılıklı çiftler, referans kolaylığı için ondalık karşılıkları da verilmiş olarak [Tablo 9](#)'da tamsayılar olarak listelenmiştir. Kâtibin, güzel Pisagor üçlülere vereceğini bildiği (veya hesapladığı) tablonun üst ve altındaki 2 basamaklı karşılıklı çiftleri seçerek başladığını varsayalım. Şimdi aralarında bulabildiği kadar çok çift bulması gerekiyordu ve hesaplamayı kolaylaştırmak için kendini 4 basamaklı veya daha kısa sayılarla sınırlamayı tercih etti (bu, tablonun son sütunlarında da 4 basamaklı veya daha kısa sayılarla sonuçlanacaktı). Doğal olarak, aralığındaki çiftlerin sadece birkaçı standart ters sayılar listesinde yer alıyordu, ancak çok daha fazlası, standart ters sayı çiftleri art arda yarıya indirip 2'ye katlamak ya da 3'e katlayıp 3'e bölmek gibi basit (ve kanıtlanmış) bir yöntemle bu listeden türetililebilirdi. Bu şekilde, kâtibimizin aralığındaki 11 çift, standart ters sayı tablosundan basitçe türetilmiştir; diğerlerini ise standart çarpım tablolarından, katsayı listelerinden ya da sadece 60'lık sistem hakkındaki pratik bilgisinden seçmiş olabilir. Atladığı 3 çiftten sadece 4a ve 8a, kanıtlanmış yöntemler kullanılarak temel Eski Babilonya aritmetik ortamından kolayca türetilmemiş gibi görünmektedir. Seçme ve sıralama süreçlerinin eşzamanlı olması gerekmez; gördüğümüz gibi, sayısal verileri büyüklüğüne göre sıralamak normal bir yazman uygulamasıydı.

Ayrıca, II. ve III. sütunlardan geriye doğru da bir analiz yapabiliriz. Kısa kenarlara, köşegenlere ve dolaylı olarak uzun kenarlara baktığımızda ([Tablo 1](#)), hiçbir uzun kenarın uzunluğunun 60'lık sistemde 2 basamaktan fazla olmadığını ve hiçbir kısa kenar ya da köşegenin uzunluğunun 60'lık sistemde 2.5 basamaktan fazla olmadığını, yani 3 basamaktan en büyüğünde 10'luk basamak bulunmadığını fark ederiz. Eğer yer uzunluğunun bu parametrelerin istenen bir özelliği olduğunu ve sadece tesadüf olmadığını varsayarsak, o zaman ne 4a ne de 11a dahil edilmemeliydi: 4a'nın kısa kenarı ve köşegeni yarım bir basamak fazla uzunken, 11a'nın uzun kenarı tam 1 basamak fazla. Bu hipotez altında tabloda sadece 8a satırı yer almalıydı — ve bu, Eski Babilonya yöntemleriyle kolayca bulunmadığını az önce gördüğümüz 2 karşılıklı çiftten biriydi. Bu açıklama, şok edici derecede geçici niteliğine rağmen, yazıcının seçimlerine ilişkin önceki akademisyenlerin açıklamalarından [örn. [Friberg 1981a 285–288](#)] tarihsel olarak daha az makul mu? Unutmamalıyız ki (bkz. [Kriter 1–2](#)), yaklaşık 4000 yıl önce gerçek bir insanın Plimpton 322'deki rakamları üretmek için ne düşünmüş ve ne yapmış olabileceğini (yeniden) inşa etmeye çalışıyoruz; örtük olarak modern kurallara göre çalışan idealize edilmiş bir matematiksel otomatı değil. Tarihsel makuliyetin matematiksel estetikten tamamen farklı bir konu olduğunu bir kez daha hatırlatarak, kararı okuyucuya bırakıyorum.

(Returning to Plimpton 322, we note that all the reciprocals are four-place or less, with the total number of places in each pair always less than seven. Under these selection conditions, it happens that three reciprocal pairs are missing from the table, as shown in [Table 8](#), lines 4a, 8a, 11a. The three corresponding entries in the columns of Plimpton 322 are also given there, as well as the long side of the triangle and the analogous p, q generators.

Let us for a minute suppose that the scribe did not have access to a 'generating function' [cf. [Friberg 1981a, 284–289](#)], but collected or omitted his reciprocal pairs using a variety of criteria just as the compiler(s) of the standard set of multiplication tables presumably had. Why would he have chosen the ones from which the table is derived, and omitted the three in [Table 8](#)? The reciprocal pairs are listed as integers in [Table 9](#), with their decimal equivalents given for ease of reference. Let us assume that the scribe started off by choosing the two-place reciprocal pairs at the top and bottom of the table, which he knew (or had calculated) would yield nice Pythagorean triples. He now had to find as many pairs as he could between them, and chose, for ease of calculation, to restrict himself to four-place or shorter numbers (which would also result in four-place or shorter numbers in the final columns of the table). Naturally, only a few pairs in his range occur in the standard reciprocal list, but many more are derivable from it through the simple (and well-attested) expedient of successively halving and doubling standard reciprocal pairs, or tripling and dividing by 3. In this way, 11 pairs in our scribe's range are simply derived from the standard reciprocal table; others he may have picked from the standard multiplication tables, coefficient lists, or simply his working knowledge of the sexagesimal system. Only 4a and 8a, two of the three pairs he omitted, do not seem to have been easily derivable, using attested methods, from the basic OB arithmetical environment. The selecting and sorting processes need not have been concurrent; as we have seen, it was normal scribal practice to sort numerical data by size.

And we can also argue backwards, from Columns II and III. Looking at the short sides and diagonals and the implicit long sides ([Table 1](#)), we notice that no long side is more than two sexagesimal places long, and no short side or diagonal is more than two and a half sexagesimal places long—that is, with no tens in the largest of the three places. If we suppose that place-length was a desired attribute of these parameters and not simply coincidental, then neither 4a nor 11a should have been included: the short side and diagonal of 4a are half a place too long, while the long side of 11a has a whole place too many. Only line 8a ought to have been in the table under this hypothesis—and this was one of the two reciprocal pairs which we have just seen was not easily found using OB methods. Is this explanation for the scribe's choices any less historically plausible than previous scholars' [e.g., [Friberg 1981a 285–288](#)], despite its shockingly ad hoc nature? We have to remember (cf. [Criteria 1–2](#)) that we are trying to (re)construct what a real human being, nearly 4000 years ago, might have thought and done to produce the figures on Plimpton 322, not an idealised mathematical automaton operating according to implicitly modern rules. I leave it for the reader to decide, with another reminder that historical plausibility is a completely different issue from mathematical aesthetics.)"

Aslında **Robson**'un sözüne ettiği 6 satır (4a, 8a, 11a, 6a, 9a, 12a) Plimpton 322 no'lu tablette kayıp değildi, çünkü Babilli kâtip Plimpton 322 no'lu tablette 15 dik üçgene ait sıralı üçlülere yazarken ne yaptığını çok iyi biliyordu ve aradan 4000 yıl geçtiğinden Babilli kâtipi anlamaktan uzaklaştık. Öyle ki, Grekler Babil problemleri anlamaktansa yeni çözüm yolları aradılar!

Şimdi **Robson**'un sözüne ettiği kayıp satırları içinde barındıran yeni bir trigonometrik cetveli "Babilonya Seçme Metodu"na göre aşağıda verebilirim.

**4.4.1. Robson'a Göre Trigonometrik Cetvel.** Eğim açıları  $(0^\circ, 45^\circ)$  aralığında olan  $(a_n, h_n, r_n)$  dik üçgenlerini doğuran  $(p_n, q_n)$  çiftindeki her

$$[201] \quad 1 < q_n < 300 = 5,0$$

düzgün sayısına göre

$$[202] \quad 1 = m_{77} < \dots < m_2 < m_1 < \overline{m}_0 = 1 + \sqrt{2}$$

sıralamasındaki  $m_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}, m_n = \frac{p_n}{q_n}$  nin **E.B.A.S.**'idir (**E.B.A.S. (EBAS): En Büyük Alt Sınır.** En Büyük Alt Sınır. EBAS dizilerdeki "**ASEB**" gibi de yazılabilir). Fakat buradaki EBAS'ın kullanımı dizilerdeki gibi değildir, çünkü burada sadece iyi bir sıralama yapılmaktadır!

Bu durumda [201]'e göre  $q_n$  düzgün sayıları

$$[203] \quad q_n = \{2,3,4,5,6,8,9,10,12,15,16,18,20,24,25,27,30,32,36,40,45,48,50,54,60,64,72,75,80,81,90,96,100,108,120,125,128,135,144,150,160,162,180,192,200,216,225,240,243,250,256,270,288\}$$

şeklinde toplam 53 tanedir. Burada 1 düzgün bir sayıdır ve tersi yine kendisidir. Ama 1 triviyal (açık) olduğundan alınmaz!

Buna göre  $m_1 = \frac{p_1}{q_1}$  eğiminde  $\sqrt{2}$  için  $1; 25 = 1 + \frac{25}{60} = \frac{17}{12}$  üst sınırını alırsak (bkz. "**YBC 7289 No'lu Tablet**", YBC 7243 (Tablo 1.3.2, S. 21), AO 6484 (Tablo 1.4.1, S. 29))

$$[204] \quad \frac{p_1}{q_1} = m_1 < \overline{m}_0 = 1 + \sqrt{2} < 1 + 1; 25 = 2; 25 = 2 + \frac{25}{60} = \frac{29}{12} =: m_0 = \frac{p_0}{q_0} \Rightarrow p_1 < 2; 25q_1 = \frac{29}{12}q_1$$

eşitsizlikleri geçerli olduğundan  $q_1 = q_n$  düzgün sayılarına göre

$$[205] \quad \begin{cases} \text{Min}(p_1) < \frac{29}{12} \text{Min}(q_1) = \frac{29}{12} \times 2 = 4 \frac{5}{6}, \\ \text{Max}(p_1) < \frac{29}{12} \text{Max}(q_1) = \frac{29}{12} \times 288 = 696 \end{cases}$$

eşitsizliklerinden  $p_1$  düzgün sayıları

$$[206] \quad p_1 = \{4,6,9,12,12,18,20,24,27,36,36,40,48,54,60,64,72,75,81,96,108,108,120,128,144,150,162,180,192,192,216,225,240,256,288,300,300,324,324,360,384,384,432,450,480,512,540,576,576,600,600,648,675\}$$

şeklinde toplam yine 53 tanedir.

O halde [203] ve [206]'daki  $(p_1, q_1)$  çiftlerini sıralı olarak  $m_1 = \frac{p_1}{q_1}$  eğiminde oranlar ve bu oranları küçükten büyüğe doğru sıralarsak şu şekilde olur:

$$[207] \quad m_1 = \frac{p_1}{q_1} = \begin{cases} 2 = 2 = 2 < \frac{20}{9} = \frac{20}{9} < \frac{9}{4} = \frac{9}{4} = \frac{9}{4} = \frac{9}{4} = \frac{9}{4} = \frac{9}{4} = \frac{9}{4} = \frac{9}{4} = \frac{9}{4} = \frac{9}{4} < \frac{75}{32} = \frac{75}{32} = \frac{75}{32} = \frac{75}{32} = \frac{75}{32} = \frac{75}{32} = \frac{75}{32} = \frac{75}{32} < \frac{64}{27} = \frac{64}{27} = \frac{64}{27} = \frac{64}{27} \\ = \frac{64}{27} = \frac{64}{27} = \frac{64}{27} < \frac{12}{5} = \frac{12}{5} = \frac{12}{5} = \frac{12}{5} = \frac{12}{5} = \frac{12}{5} = \frac{12}{5} = \frac{12}{5} = \frac{12}{5} = \frac{12}{5} = \frac{12}{5} = \frac{12}{5} = \frac{12}{5} = \frac{12}{5} = \frac{12}{5} = \frac{12}{5} = \frac{12}{5} = \frac{12}{5} = \frac{12}{5} = \frac{12}{5} \\ = \frac{12}{5} \end{cases}$$

Bu sıralamada [204]'e göre  $m_1, \overline{m}_0$ 'ın, dolayısıyla  $m_0$ 'ın alt sınırların en büyüğü olduğundan şöyle bulunmuş olur:

$$[208] \quad m_1 = \frac{p_1}{q_1} = \frac{12}{5}$$

Burada Babilli kâtip  $q_1 = 5$ 'i bildiğinden  $p_1 = 12$ 'yi de bilmiş olmaktadır!

#### 4.4.1.1. $m_1, \overline{m}_0$ ve $m_0$ 'ın Geometriden Bulunması

Şimdi  $m_1$ 'i  $\overline{m}_0$ , dolayısıyla  $m_0$ 'ın alt sınırı olarak [208]'de cebrik olarak nasıl bulunduğunu gösterdiğime göre, [204]'e göre  $m_1 < \overline{m}_0 = 1 + \sqrt{2} < 1 + 1; 25 = 2; 25 = m_0$  eşitsizliklerindeki eğimleri de geometrik olarak gösterebilirim.

Aşağıdaki şekilde bir kenar uzunluğu 1 birim olan ABCD karesindeki bir köşegen uzunluğu  $|DB| = \sqrt{2}$  birim'dir ve D merkezli  $[DB]$  yarıçapında bir çember çizerseniz, bu çember  $[DA]$  kenarının uzantısını E noktasında ve A merkezli  $[AE]$  yarıçapında bir ikinci çember daha çizerseniz, bu çember de  $[AB]$  kenarını F noktasında keser. F noktası ADB açısının açıortayının  $[AB]$  kenarını kestiği noktadır ve  $|AF| = \sqrt{2} - 1$  birim'dir ve ADB açısının açıortayı  $[BC]$  kenarının uzantısını H noktasında kestiğinden  $|DG| = |DA| + |AE| + |EG| = 1 + \sqrt{2} - 1 + 1 = \sqrt{2} + 1$  birim olur. Buna göre  $\overline{m}_0 = \frac{|GD|}{|GH|} = \frac{\sqrt{2}+1}{1} = \sqrt{2} + 1$  ve  $\overline{m}_0^{-1} = \frac{|AF|}{|AD|} = \frac{\sqrt{2}-1}{1} = \sqrt{2} - 1$  oranları elde edilir. Burada eğer Eski Babillilerin  $\sqrt{2} < 1; 25$  yaklaşık değerine başvurursak  $\overline{m}_0 = \sqrt{2} + 1 < 1; 25 + 1 = 2; 25 = 2 + \frac{25}{60} = 2 \frac{5}{12} = m_0$  ve  $\overline{m}_0^{-1} = \sqrt{2} - 1 < 1; 25 - 1 = 0; 25 = \frac{25}{60} = \frac{5}{12} = m_1^{-1}$ 'den  $m_1 = \frac{12}{5}$  elde edilir (Bkz. "**YBC 7289 No'lu Tablet**", YBC 7243 (Tablo 1.3.2, S. 21), AO 6484 (Tablo 1.4.1, S. 29)).



25	15	8	161	240	289	33°51'18"
26	50	27	1771	2700	3229	33°15'43"
27	9	5	56	90	106	31°53'27"
28	16	9	175	288	337	31°17'04"
29	225	128	34241	57600	67009	30°43'47"
30	125	72	10441	18000	20809	30°06'58"
31	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	30°00'00"
32	216	125	31031	54000	62281	29°53'01"
33	128	75	10759	19200	22009	29°15'53"
34	27	16	473	864	985	28°41'55"
35	5	3	16	30	34	28°04'21"
36	400	243	100951	194400	219049	27°26'33"
37	81	50	4061	8100	9061	26°37'38"
38	8	5	39	80	89	25°59'21"
39	405	256	98489	207360	229561	25°24'22"
40	128	81	9823	20736	22945	25°20'51"
41	25	16	369	800	881	24°45'41"
42	125	81	9064	20250	22186	24°06'48"
43	192	125	21239	48000	52489	23°52'06"
44	243	160	33449	77760	84649	23°16'31"
45	3	2	5	12	13	22°37'12"
46	40	27	871	2160	2329	21°57'41"
47	375	256	75089	192000	206161	21°21'35"
48	36	25	671	1800	1921	20°26'40"
49	64	45	2071	5760	6121	19°46'34"
50	45	32	1001	2880	3049	19°09'57"
51	25	18	301	900	949	18°29'32"
52	27	20	329	1080	1129	16°56'32"
53	4	3	7	24	25	16°15'37"
54	320	243	43351	155520	161449	15°34'32"
55	125	96	6409	24000	24841	14°57'05"
56	162	125	10619	40500	41869	14°41'31"
57	32	25	399	1600	1649	14°00'09"
58	81	64	2465	10368	10657	13°22'25"
59	5	4	9	40	41	12°40'49"
60	100	81	3439	16200	16561	11°59'06"
61	243	200	19049	97200	99049	11°05'17"
62	6	5	11	60	61	10°23'20"
63	32	27	295	1728	1753	09°41'17"
64	75	64	1529	9600	9721	09°02'58"
65	125	108	3961	27000	27289	08°20'45"
66	144	125	5111	36000	36361	08°04'49"
67	256	225	14911	115200	116161	07°22'30"
68	9	8	17	144	145	06°43'59"
69	10	9	19	180	181	06°01'32"
70	27	25	104	1350	1354	04°24'19"
71	16	15	31	480	481	03°41'43"
72	135	128	1841	34560	34609	03°02'57"
73	256	243	6487	124416	124585	02°59'04"
74	25	24	49	1200	1201	02°20'18"
75	250	243	3451	121500	121549	01°37'37"
76	128	125	759	32000	32009	01°21'31"
77	81	80	161	12960	12961	00°42'42"
78	1	1	0	2	2	00°00'00"

**Tablo 19.** Bu tablonun Mathematica'daki doğrulanması şu dosyadadır: [Tablo 19](#), Oluşturma Tarihi: 14.03.2026, 21:21:23-Son Kaydetme Tarihi: 21.03.2026, 14:10:38.

Bu tabloda gördüğümüz gibi **Robson**'un muhtemel kayıp dik üçgenleri mevcuttur. Çünkü **Robson**'un [Tablo 8](#)'deki dik üçgenleri bu tablodaki dik üçgenler satır olarak şöyle eşleşirler: 4a-5, 8a-12, 11a-20, 6a-9, 9a-16 ve 12a-24.

**Robson**'un dik üçgenlerini ortaya çıkarabilmek için Tablo 17'deki dik üçgenlerin sayısını 2'ye katladım (ki Tablo 17'de toplam 41 satır var ve bunlardan 0, 17 ve 40. satırlardaki triviyal dik üçgenleri çıkarırsak  $41 - 3 = 38$  ve buradaki tabloda triviyal olmayan dik üçgenlerin sayısı  $79 - 3 = 76$  tanedir). **Robson**'un hatası 4a, 8a, 11a, 6a, 9a ve 12a'daki dik üçgenlerin doğuranları 60'a bölmesi ve böylece onları Tablo 17'deki satırların arasına yerleştirmesidir. Fakat bunlardan sadece 4a, 8a ve 11a'nın [Tablo 9](#)'a yerleşmiş olması bile **Robson**'u uyandırmadı. Çünkü Tablo 17'de görüldüğü üzere doğuranların hepsi birer tam sayı idi ve **Robson** bu 6 dik üçgenin birer tam sayı olan doğuranlarını 60'a bölerek kesirli olarak yerleştirmişti!

**4.4.2. Sonuç.** Genel olarak  $(\alpha, \beta)$  eğim açıları aralığındaki (ki  $\alpha < \beta$  açıları birbirine ne kadar yakın olursa olsun)  $(a_n, h_n, r_n)$  dik üçgenlerini doğuran  $q_n \rightarrow \infty$  iken

$$[210] \quad \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) < \dots < m_2 < m_1 < \overline{m}_0 = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right)$$

sıralamasındaki  $m_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ ,  $m_n = \frac{p_n}{q_n}$  nin E.B.A.S.'i olmak üzere sonsuz tane  $(p_n, q_n)$  düzgün sayı çifti vardır. Çünkü  $p_n \rightarrow \infty$  olduğundan  $(\alpha, \beta)$  aralığında  $m_n \rightarrow \infty$  tane doğuran eğimi vardır. Örneğin  $(30^\circ, 45^\circ)$  aralığında Tablo 17'de 16 tane dik üçgen varken (ki ilk 15'i Plimpton 322 no'lu tablette mevcuttur) yukarıdaki Tablo 19'da 32 tane dik üçgen vardır.

Şimdi Plimpton 322 no'lu tabletin astronomik olarak kullanılmasına ilişkin ilkin şu bilgilendirmeyi yapmam gerekiyor.

**4.4.3. Larsa'nın Fethi ve Sonuçları. I. Rim-Sin,** MÖ 1822-1763 arasında yaklaşık 60 yıl tahtta kalarak en uzun hüküm süren İlk Çağ krallarından biri oldu. Kardeşi **Warad-Sin**'in halefidir. Larsa ve Isin'in Mezopotamya'da hakimiyet kurmak için mücadele ettiği bir dönemde tahta çıktı.

Hükümdarlık döneminin 13. senesinde Uruk kenti önderliğindeki bir birleşik orduyu yendi. MÖ 1794'te Isin'i ele geçirmesi en parlak başarısı oldu. Böylece Babil'in güneyinde kalan bölgenin kontrolünü ele geçirdi.



Resim 14. **Hammurabi** Larsa'nın fethindeyken!

Elam'a karşı kurulan ittifaka girmekte tereddüt edince **Hammurabi**'nin öfkesini çekti ve MÖ 1763'teki kuşatmasına 6 ay dayanabildi (**Hammurabi**'yi duyuyor musun **Trump**? Burası beni bayağı güldürdü). Oğulları ile birlikte Babil'e götürüldü ve muhtemelen orada öldü. Bu zafer, **Hammurabi**'nin Mezopotamya'nın güneyini birleştirerek Babil'i bölgesel bir imparatorluğa dönüştürmesini sağladı.

Larsa'nın fetihi, Mezopotamya toplumunda önemli değişimlere yol açtı. **Hammurabi**, fethedilen şehirlerde tapınakları ve rahipleri Babil'in Marduk kültürüne entegre ederek dini birliği güçlendirdi. Bu, Mezopotamya'da dini merkezleşmenin erken bir örneğidir. Toplumsal hiyerarşi, artı ürünün kontrolüyle daha karmaşık hale geldi; yazmanlar, rahipler ve askeri liderler gibi elit sınıflar güç kazandı. Örneğin [Plimpton 322 no'lu tablet](#) **Edgar J. Banks**'in bildirdiğine göre Larsa'da keşfedildi ve MÖ 1800 civarında yazıldığına inanılmaktadır. Spesifik olarak, üzerinde açıkça tarih yazılı olan Larsa'da bulunan diğer tabletlerdeki biçimlendirme özelliklerine dayanarak, MÖ 1822-1784 dönemine ait olması muhtemeldir. **Robson**, Plimpton 322 no'lu tabletin dönemin matematiksel olarak

değil, idari belgeleriyle aynı biçimde yazıldığını belirtir. Larsa'nın fethinden sonra Plimpton 322 no'lu tablet de diğer tabletlerle birlikte Babil'in malı oldu ve Babilli kâtipler tarafından incelenerek Eski Babilonya Matematikçi geliştirildi. Bunun gibi Larsa'daki seramik ve heykel buluntuları, fetih sonrası sanatsal üretimin devam ettiğini, ancak Babil etkisinin baskın hale geldiğini gösterir. Ayrıca, fetih, köle emeğinin tarım ve inşaat projelerinde yaygınlaşmasını hızlandırdı.

#### 4.4.4. Thuban'ın MÖ 1820'lerdeki Larsa'daki Yüksekliği

Öncelikle Larsa'nın MÖ 1822'deki enlemi için şimdiki enlemini bilmemiz gerekiyor. Eğer Google Earth'te "Ara" çubuğunda "Larsa, Ancient City" yazarsanız size kırmızı renkli iğneyle yerini gösterecektir ve yer gösterici kırmızı iğnenin üzerine sarı renkli bir iğne koyarsanız Larsa'nın bugünkü enlem ve boylamının ( $30^{\circ}55'58.97''K, 46^{\circ}7'57.63''D$ ) olduğunu görürsünüz (Bkz. [2026-03-22\\_045417.png](#)). Diğer taraftan Dünya'nın MÖ 1822'deki ve şimdiki eksen eğiklikleri için "Obliquity Applet" programına bakarsanız (ki linke tıkladığınızda "Güvenilir olmayan bir web sitesinin ziyaret edilmesi engellendi" uyarısı çıkar ama siz "Ayrıntıları göster"den "Riskleri anlıyorum ve devam etmek istiyorum" diyerek devam edin, çünkü sitede güncel olmayan SSL sertifika sorunu var. Fakat uygulamayı çalıştırabilmeniz için bilgisayarınızda Java'nın kurulu olması gerekiyor. Eğer sisteminizde yüklü değilse bunu [Java](#) sitesine girdinizde "Masaüstü Bilgisayarlar için Java İndir"den hallederseniz artık karşınıza "Obliquity Applet (Eğiklik Uygulaması)" çıkacaktır. Burada "Start Year (Yıl Başlangıcı)" için -2000, "Stop Year (Yıl Sonu)" için -1500 ve "Intervall (Aralık)" için de 1'i seçiniz ve -1822 satırını bulunuz. Bu satırda [Tablo 5.6.6](#)'da gördüğünüz gibi "True" yazan 5. sütundaki değer  $23^{\circ}54'15.88''$  olduğunu göreceksiniz. Bu, MÖ 1822'deki Dünya'nın eksen eğikliğinin gösterir. Aynı şekilde Dünya'nın 2026'daki eksen eğikliği  $23^{\circ}26'17.32''$  olduğundan aradaki fark  $23^{\circ}54'15.88'' - 23^{\circ}26'17.32'' = 27'58.56''$  olur. Şimdi Larsa'nın MÖ 1822'deki enlemini bulabilmek için [Resim 5.6.18](#)'deki Stonehenge'deki gibi Larsa'nın şimdiki enlemine bu farkı eklersek  $30^{\circ}55'58.97'' + 27'58.56'' = 31^{\circ}23'57.53''$  olur.

İkinci olarak Larsa'nın MÖ 1822'deki ( $31^{\circ}23'57.53''K, 46^{\circ}7'57.63''D$ ) koordinatlarını Starry Night Pro Plus programında girmeniz gerekiyor (ki programın 8.1.1.2094 sürümünü bilgisayara nasıl yükleyeceğinizi [Tablo 5.6.7](#)'de açıkladım). Bu programı bilgisayarınıza yükledikten sonra "Options (Seçenekler)" menüsündeki "View Location (Konumu Görüntüle)"yi seçin ve orada "Latitude/Longitude (Enlem/Boylam)"da Larsa'nın enlemi  $31^{\circ}23'57.53''K = 31^{\circ}23.9588333...K$  ve boylamı  $46^{\circ}7'57.63''D = 46^{\circ}7.9605'D$  olduğundan ( $31^{\circ}23.96'K, 46^{\circ}7.96'D$ ) koordinatlarını girmeniz yeterlidir (ki aslında Larsa'nın MÖ 1822'deki enlemi değişirken boylamı da değişmektedir ama bunun için çok güçlü bir simülasyon gerekir ve bunu belirleyemediğimiz için boylamı olduğu gibi bıraktım. Fakat Larsa'nın MÖ 1822'deki boylamını tam olarak bilmemize gerek yoktur, çünkü şimdiki ( $30^{\circ}55'58.97''K, 46^{\circ}7'57.63''D$ ) noktasının kuzeydoğusunda ama yakında olacak ve saat dilimi değişmeyecektir. Bu nedenle burada esas ilgilendiğimiz koordinat Larsa'nın enlemidir ve bunu da en hassas bir şekilde belirlemiş bulunuyorum). Eğer bu koordinatları ve "Time zone (Saat Dilimi)"ne 3.0'ı girdikten sonra "Save As New Observing Site (Yeni Gözlem Sitesi Olarak Kaydet)"i seçer ve "Site Name (Site Ad)"nda "Larsa" olarak yazarsanız "My Sites (Sitelirim)"de "Larsa" kaydedilmiş olacaktır. Eğer programdan çıkar ve yeniden Larsa'ya ihtiyacınız olursa "My Sites (Sitelirim)"deki "Larsa"ya tıklamanız yeterlidir, çünkü aksi takdirde yeniden koordinatları girmeniz gerekir. Şimdi "My Sites (Sitelirim)"de Larsa'yı seçerseniz sol üstte saatin sağında "Larsa" yazısı görünecektir ve sol üstte gün olarak "Mart 21", yıl olarak "1822 BCE" ve saati "01:34:47" yaparsanız Thuban'ın yüksekliğinin (Altitude)  $36^{\circ}54.926'$  olduğunu görürsünüz (Bkz. [2026-03-22\\_043920.png](#)). Bu ekran görüntüsündeki Thuban kutup yıldızı sağ üstteki arama çubuğunda "Thuban" yazarak ve düşeydeki kuzey meridyeni "View" menüsündeki "Alt/Az Guides"da "Meridian" seçilerek elde edilmektedir). Bu, MÖ 21 Mart 1822'deki kutup yıldızı Thuban'ın Larsa'daki yüksekliğini gösterir. Dikkat ederseniz bu ekran görüntüsünde Thuban'ın azimutu (Azimuth)  $359^{\circ}59.996'$  olduğunda (ki bu Thuban'ın düşeydeki kuzey meridyeninden  $0.004' = 0.24''$  eksik olduğunu yani solunda (Batı tarafında) olduğunu gösterir ve kuzey meridyenine bundan daha iyi yaklaşamazsınız) yüksekliği  $36^{\circ}54.926'$  olmaktadır (ki bu yükseklik kuzey meridyeninde bir çember çizen Thuban'ın maksimum noktasıdır). Diğer taraftan [Tablo 17](#)'deki 11. satırdaki ya da yukarıdaki [Tablo 19](#)'daki 18. satırdaki (3,4,5) dik üçgeninin eğim açısı  $36^{\circ}52'12''$  olduğundan demek ki birçok Eski Babil tabletinde gördüğümüz (3,4,5) dik üçgeninin esrarı buymuş. Çünkü aradaki fark  $36^{\circ}54.926' - 36^{\circ}52'12'' = 2'43.56''$  dir.

Şüphesiz bu fark sıfırlanabilir ama "Obliquity Applet"teki MÖ 1800'lerdeki Dünya'nın eksen eksen eğikliği dengesizdir. Örneğin [2026-03-20\\_074127.png](#) ekran görüntüsünde MÖ 20 Mart 1830'da Larsa'da Thuban'ın yüksekliğini  $36^{\circ}52.319' = 36^{\circ}52'19.14''$  görmüştüm ve bu bende şok etkisi yapmıştı ama üstünkörü bir bakış attığım için ayarlar doğru değildi. Çünkü bu sırada Larsa'nın MÖ 1831'deki enlemini almıştım (ki aynı uygulamaya göre Dünya'nın eksen eğikliği  $23^{\circ}54'26.3''$  idi) ve Starry Night Pro Plus 8.1.1.2094'te MÖ 20 Mart 1830, 01:39:43'e ayarlamıştım. Eğer yukarıdaki ayarlamalara göre yani Larsa'nın MÖ 1822'deki enlemine göre yılı MÖ 1830 yaptığınızda  $36^{\circ}52.321' = 36^{\circ}52'19.26''$  sonucu buna yakın olur ki buradan Larsa'da MÖ 1820'lerde Thuban'ın yüksekliğinin (3,4,5) dik üçgeninin  $36^{\circ}52'12''$  eğim açısındaki gibi olduğu sonucu çıkar. Burada anlaşılması gereken sonuç budur (ki bu sonucu anlamın en iyi yolu, Larsa'nın enleminin MÖ 1810-1840'a kadar belirlenmesi ve Starry Night Pro Plus'ta Thuban'ın yüksekliğini gözlemlemek olacaktır. 31 yıllık bu simülasyonda Thuban'ın yüksekliğinin (3,4,5) dik üçgeninin  $36^{\circ}52'12''$  eğim açısındaki gibi en iyi gözlemlendiği aralığın MÖ 1820'lerde ve en iyi gözlemlendiği yılın MÖ 1822'de olduğu görülecektir).

#### 4.4.4.1. Thuban'ın Hüküm Sürdüğü Dönem

[Thuban](#)'ın kuzey meridyeninde bir kutup yıldızı olarak hüküm sürdüğü dönem MÖ 3900-1800'dedir. MÖ 1800'lerden sonra Thuban'ın yerini [Kochab](#) aldı ve o da MÖ 1800-300'e kadar hüküm sürdü. Mısır Piramitleri yapımı sırasında Thuban'ın konumu fena değildi. Örneğin Büyük Piramit'teki Kral Odası'nın kuzey şaftı Thuban'a yönlendirilmişti ve piramit yapımcıları  $+47'23.66''$  hata yapmışlardı. Bu sırada Büyük Piramit'in enlemi ( $5.6.273$ )'e göre  $30^{\circ}31'20.18''$  iken Thuban'ın yüksekliği  $31^{\circ}40'52.34''$  idi (Bkz. [Testo 5.6](#), Kral Odası'ndaki Kuzey Şaftı: Kutup Yıldızlarının Kralı Thuban, S. 64-65). Fakat MÖ 1820'lere geldiğimizde Thuban kuzey meridyeninden ayrılmak üzereydi ve yerine Kochab geliyordu. Örneğin MÖ 1822'de (ki bu sırada Larsa'nın kralı [I. Rim-Sin](#) idi) Larsa'nın enlemi  $31^{\circ}23'57.53''$  iken Thuban'ın yüksekliğinin  $36^{\circ}54.926' = 36^{\circ}54'55.56''$  olması bu bozulmayı açıklar. Çünkü aradaki fark  $31^{\circ}23'57.53'' - 36^{\circ}54'55.56'' = -5^{\circ}54'32.56''$  olduğundan Thuban kuzey meridyeninden oldukça uzaklaşmış ve büyük bir çember çiziyordu (ki bu çemberin kuzey meridyenin kestiği 2 nokta vardır. Alttaki nokta Thuban'ın minimum yüksekliğini ve üstteki nokta maksimum yüksekliğini gösterir. Örneğin Thuban'ın MÖ 1822'de Larsa'daki  $36^{\circ}54.926'$  yüksekliği maksimum noktadaki yüksekliğidir). Bu sırada Thuban'a bakan Larsa'daki Rahipler (ki o günün astronomları onlardı), Thuban'ın gökteki yüksekliğinin (3,4,5) dik üçgeninin  $36^{\circ}52'12''$  eğim açısındaki gibi olduğunu gördüler ve (3,4,5) dik üçgeni hem Eski Babilonya'daki tabletlerde hem de Eski Mısır'daki piramitlerde demirbaş oldu. Fakat (3,4,5) dik üçgeninin ilk kullanıldığı yer Khafre'nin Piramiti'nde oldu (Bkz. [Testo 5.6](#), Khafre Piramiti  $k(3,4,5)$  Dik Üçgenine Göre İnşa Edildi, S. 57-58).

D. PAMUKTULUM, 22.03.2026, 07:35.

*Derya PAMUKTULUM*

#### 4.5. YBC 7289 ve Plimpton 322 No'lu Tabletler Göre Trigonometrik Cetvel

Bu trigonometrik cetvel için ilkin şu konuyu ele almam gerekiyor.

**4.5.1.  $\sqrt{2}$ 'nin Alt ve Üst Sınırları.** Babilliler pratik hesaplarda  $\sqrt{2}$  için şu alt ve üst sınırları kullanmışlardır:

$$[211] \quad 1;24 < \sqrt{2} < 1;25.$$

Bunlardan üst sınır YBC 7243 ve AO 6484 no'lu tabletlerde 1;25 olarak verilir (Bkz. "[YBC 7289 No'lu Tablet](#)", S. 21, Tablo 1.3.2 ve "[YBC 7289 No'lu Tableti'nin 2. Çözümü](#)", S. 3, Tablo 1.1.1).

Bu değer iç içe geçmiş ve bir geometrik dizi oluşturan karelerin köşegenlerinden derhal elde edilmektedir. [BM 15285](#) no'lu tablete göre (ki. [3. parçada](#) iç içe geçmiş 2 ve 3 kare mevcuttur) en içteki (ilk) karenin bir kenar uzunluğunu  $a_1 = 1$  birim alırsak köşegen uzunluğu  $k_1 = a_1\sqrt{2} = \sqrt{2}$  birim olur ve bu karenin köşeleri dıştaki karenin orta noktaları olacak şekilde bir geometrik dizi üretirsek n-inci karenin köşegen uzunluğu  $k_n = \sqrt{2^n}$  birim ve bir kenar uzunluğu  $a_n\sqrt{2} = \sqrt{2^n}$  birim eşitliğinden  $a_n = \sqrt{2^{n-1}}$  birim elde edilir.

#### Kenar-Köşegen Sayıları

Örneğin iç içe geçmiş bu şekilde 3 kare göz önüne alır ve en dıştaki 3. karenin köşegen uzunluğunu Babil algoritmasına göre hesaplırsak

$$[212] \quad k_3 = \sqrt{2^3} = \sqrt{8} = \sqrt{3^2 - 1} < 3 - \frac{1}{2 \times 3} = 3 - \frac{1}{6} = 2 + \frac{5}{6} = 2;50$$

değeri elde edilirken bir kenar uzunluğu

$$[213] \quad a_3 = \sqrt{2^{3-1}} = \sqrt{2^2} = \sqrt{4} = 2$$

olur.

Şimdi Greklerin bahsettiği kenar-köşegen sayılarına göre bu karenin köşegen uzunluğunu kenar uzunluğuna bölersek  $\sqrt{2}$  için şu yaklaşık değer elde edilir:

$$[214] \quad \sqrt{2} < \frac{k_3}{a_3} = \frac{2;50}{2} = 2;50 \times 0;30 = 1;25 = 1 + \frac{25}{60} = 1 \frac{5}{12} = \frac{17}{12}.$$

Bu sonuç 5. ve 7. karelerin köşegenlerin kenarlarına oranlarından da elde edilmektedir (Bkz. [\(1.1.27\)](#)). Orada  $\sqrt{2}$  için  $k_5 = \sqrt{2^5} = \sqrt{32}$  ve  $k_7 = \sqrt{2^7} = \sqrt{128}$ 'e Babil algoritmasının uygulanmasıyla 1;25'in nasıl elde edildiği gösterilmiştir).

Bu sonuç köşegenden doğrudan şu şekilde de bulunabilir:

$$[215] \quad 2\sqrt{2} = k_3 = \sqrt{2^3} = \sqrt{8} = \sqrt{3^2 - 1} < 3 - \frac{1}{2 \times 3} = 3 - \frac{1}{6} = \frac{17}{6} \Rightarrow \sqrt{2} < \frac{17}{6} = \frac{17}{2} = 1 \frac{5}{12} = 1;25.$$

*Neugebauer*'e göre ise bu sonuç AHM'e göre elde edilmiştir. Bunun için ilkin  $\sqrt{2}$ 'ye yapılan

$$[216] \quad \alpha_0 = 1 < \sqrt{2} < 2 = \beta_0$$

ilk tam sayı yaklaşıklıkları seçilir ve Aritmetik-Harmonik Metodu'na (AHM) göre

$$[217] \quad \alpha_1 = \frac{\alpha_0 + \beta_0}{2} = \frac{1 + 2}{2} = \frac{3}{2} = 1 \frac{1}{2} = 1;30, \beta_1 = \frac{2\alpha_0\beta_0}{\alpha_0 + \beta_0} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 2}{1 + 2} = \frac{4}{3} = 1 \frac{1}{3} = 1;20$$

ilk gerçek yaklaşıklıkları elde edilir.

Sonra bunların aritmetik ortalamasını alırsak YBC 7243 ve AO 6484 no'lu tabletlerdeki değeri elde etmiş oluruz:

$$[218] \quad \alpha_2 = \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} = \frac{1;30 + 1;20}{2} = \frac{2;50}{2} = 1;25.$$

Fakat *Neugebauer* aynı yaklaşıklıklara harmonik ortalamayı uyguladığında işlemi şöyle bırakır (Bkz. S. [40](#)):

$$[219] \quad \beta_2 = \frac{2\alpha_1\beta_1}{\alpha_1 + \beta_1} = \frac{2 \times 1;30 \times 1;20}{1;30 + 1;20} = \frac{4}{2;50} = \frac{2}{1;25} = 1;24,42,21, \dots$$

Çünkü *Neugebauer*'e göre  $1;25 = \frac{17}{12}$  bir düzgün sayı olmadığından tersi alınamazdı (ki 12 bir düzgün sayı olsa bile 17 bir asal sayı olduğundan bir düzgün sayı değildir, dolayısıyla 17'nin tersi sonlu olamaz. Bu konuda [YBC 10529](#) no'lu tablette 0;56'dan 1;20'ye kadar ardışık 25 sayının (ki 5 tanesi düzgün sayı, diğerleri düzgün olmayan sayılardır) tersi verilmiştir ve YBC 7289 no'lu tabletin ilk çözümünü 5.7.2007'de verirken Bulgu 3'te bu tablettten habersiz şekilde (ki bu sırada *Neugebauer*'in "[Matematiksel Çivi Yazıtları \(Mathematical Cuneiform Texts\)](#)" kitabının tamamına sahip değildim. Bkz. S. [29](#)) düzgün olmayan sayıların terslerini almıştım. Bkz. S. [30-33](#). *Neugebauer* [YBC 10529](#) no'lu tabletindeki tabloyu anılan kitabının [16](#). sayfasında verir ama doğrusu [Tablo 1.4.2](#)'deki gibi olacaktır. Ben bu tabloyu 03.02.2023'te verdikten sonra Dr. *Daniel Mansfield* de, 02.09.2023'te "[Mesopotamian square root approximation by a sequence of rectangles](#)" makalesinin 181. sayfasındaki Tablo 3'te aynı şekilde verdi. Demek ki Dr. *Mansfield* pişti olmuş. Bkz. "[Cingöz Recai Babil'de](#)", S. 51). Fakat 1;25'in tersi alınamaz

diye bir şey söz konusu değil ve nitekim Babilli kâtip, YBC 10529 no'lu tablette 1;20'den sonra diğer sayıların terslerini vermeye devam etseydi (ki bunun için tabletin altında yeterince boşluk vardı) 1;25'in tersini de verecekti!

Diğer taraftan Plimpton 322 no'lu tablette  $m_1 = 2$ ;  $24 = 2 + \frac{24}{60} = 2 + \frac{2}{5} = \frac{12}{5}$  in kullanıldığını biliyoruz ve bu sayede Tablo 17 ve 19'daki ilk satırdan hareketle 2. satırdaki  $p_1 = 12$  ve  $q_1 = 5$  doğuranları bulunuyordu (Bkz. S. 35-36). O halde  $m_1$  oranının 1 eksiği yani 1;24 değeri olur ki, bu da  $\sqrt{2}$ 'nin alt sınırıdır.

Burada 2. satırdaki dik üçgenin hipotenüsünün yüksekliğine oranının  $m_1$  eğimine göre bulunmasında

$$[220] \quad \frac{r_1}{a_1} = \frac{m_1 + m_1^{-1}}{2} = \frac{\frac{12}{5} + \frac{5}{12}}{2} = \frac{169}{120} = 1; 24; 30 < \sqrt{2}$$

sonucu her şey netleştirir. Burada şu sonuca dikkat edilmelidir: Tablo 17 ve 19'daki m eğimi  $1 + \sqrt{2}$ 'den uzaklaştıkça  $\frac{m_1 + m_1^{-1}}{2}$  oranı da  $\sqrt{2}$ 'den uzaklaşacaktır ve anılan bu yakınsamaların en iyi olduğu eğim  $m_1$ 'dir ve  $m_1 = 2$ ; 24 düzgün bir sayı olduğundan tersi de sonludur, yani  $m_1^{-1} = \frac{5}{12} = 0; 25$ 'tir.

Şüphesiz katipler 1;24'ün farkındaydı ve bu son sonuca göre 1;24,30 ile  $\sqrt{2}$ 'ye biraz daha yaklaşıyorlardı. Ama  $\sqrt{2}$ 'ye ne kadar yaklaşabildiler?



**Resim 15.** YBC 7289 no'lu tablet (MÖ 1822, Larsa). Tablet üzerindeki karenin bir kenarının uzunluğu  $0; 30 = \frac{1}{2}$  Birim = 3 Parmak, bir köşegeni üzerinde  $\sqrt{2}$  için 3 altmışlığı doğru olan  $1; 24, 51, 10 = \frac{30547}{21600}$  ve bu köşegenin altında uzunluğunu gösteren  $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  için  $\frac{1; 24, 51, 10}{2} = 0; 42, 25, 35$  Birim = 4; 14, 33, 30 Parmak değerleri verilmiştir (Bkz. "YBC 7289 No'lu Tablet", S. 21, Tablo 1.3.2 ve S. 37, Resim 1.4.4).

Yukarıdaki resimdeki YBC 7289 no'lu tabletin bir köşegeni üzerinde  $\sqrt{2}$ 'nin alt sınırı 1;24,51,10 verildiğinden [211]'e göre alt ve üst sınırlarını şöyle alabiliriz:

$$[221] \quad 1; 24; 51, 10 < \sqrt{2} < 1; 24; 51, 11.$$

Buna göre eğim açıları  $(0^\circ, 45^\circ)$  aralığında olan  $(a_n, h_n, r_n)$  dik üçgenlerini  $(p_n, q_n)$  doğuran çiftinde  $\forall q_n \in D$  için

$$[222] \quad 1 < q_n < 1,0,0,0 = 60^3 = 216000$$

düzgün sayısına karşılık

$$[223] \quad 1 = m_{337} < \dots < m_2 < m_1 < \overline{m_0} = 1 + \sqrt{2} < 1 + 1; 24,51,11 = 2; 24,51,11 = m_0$$

sıralamasında  $m_n = \frac{p_n}{q_n}$ ,  $m_{n-1} = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ 'nin EBAS'ı olacak şekilde  $\exists p_n \in D$  düzgün sayısı gelir.

Burada [221]'e göre  $q_n \in D$  düzgün sayıları 368 tanedir:

$$[224] \quad q_n = \{2,3,4,5,6,8,9,10,12,15,16,18,20,24,25,27,30,32,36,40,45,48,50,54,60,64,72,75,80,81,90,96,100,108,120,125,128,135,144,150,160,162,180,192,200,216,225,240,243,250,256,270,288,300,320,324,360,375,384,400,405,432,450,480,486,500,512,540,576,600,625,640,648,675,720,729,750,768,800,810,864,900,960,972,1000,1024,1080,1125,1152,1200,1215,1250,1280,1296,1350,1440,1458,1500,1536,1600,1620,1728,1800,1875,1920,1944,2000,2025,2048,2160,2187,2250,2304,2400,2430,2500,2560,2592,2700,2880,2916,3000,3072,3125,3200,3240,3375,3456,3600,3645,3750,3840,3888,4000,4050,4096,4320,4374,4500,4608,4800,4860,5000,5120,5184,5400,5625,5760,5832,6000,6075,6144,6250,6400,6480,6561,6750,6912,7200,7290,7500,7680,7776,8000,8100,8192,8640,8748,9000,9216,9375,9600,9720,10000,10125,10240,10368,10800,10935,11250,11520,11664,12000,12150,12288,12960,13122,13500,13824,14400,14580,15000,15360,15552,15625,16000,16200,16384,16875,17280,17496,18000,18225,18432,18750,19200,19440,19683,20000,20250,20480,20736,21600,21870,22500,23040,23328,24000,24300,24576,25000,25600,25920,26244,27000,27648,28125,28800,29160,30000,30375,30720,31104,31250,32000,32400,32768,32805,33750,34560,34992,36000,36450,36864,37500,38400,38880,39366,40000,40500,40960,41472,43200,43740,45000,46080,46656,46875,48000,48600,49152,50000,50625,51200,51840,52488,54000,54675,55296,76800,77760,78125,78732,80000,81000,81920,82944,84375,86400,87480,90000,91125,92160,93312,93750,96000,97200,98304,98415,100000,101250,102400,103680,104976,108000,109350,110592,112500,115200,116640,118098,120000,121500,122880,124416,125000,128000,129600,131072,131220,135000,138240,139968,140625,144000,145800,147456,150000,151875,153600,155520,156250,157464,160000,162000,163840,164025,165888,168750,172800,174960,177147,180000,182250,184320,186624,187500,192000,194400,196608,196830,200000,202500,204800,207360,209952\}.$$

Burada kafayı sıyırdığımı iddia edenler, *Neugebauer*'in 1940 civarında yazdığı "[Rechentabellen zur sumerisch-akkadischen Mathematik](#)" kitabının "[Reziprozentafel](#)" bölümünde 1'den  $2^5 \cdot 2^{20} \cdot 5^2 = 59,47,13,36,18,0,0 = 2789427520800$ 'a kadar düzgün sayıları yazdığına ve bunların tersini aldığına dikkat etsinler. *Neugebauer*,  $q_n$ 'nin son değeri olan  $209952 = 2^5 \cdot 2^8 \cdot 5^0$  düzgün sayısını II. mertebeden düzgün sayılar bölümünün sonunda, 15. sayfanın sonunda verir. *Denis Roegel*, 21.11.2011 tarihli "[A reconstruction of Gingerich's table of regular sexagesimals and a cuneiform version of the table \(1965\)](#)" adlı makalesinde *Neugebauer*'in ve *Gillings* ve *Hamblin*'in tablolarından bahsettikten sonra *Gingerich*'in 1965'teki tablosunu LOCOMAT projenin parçası olarak tamamlayarak şu sonucu verdi (ki kendisi 21-22 Eylül 2011'de *Owen Gingerich* ile kişisel iletişimde bulundu): "*Gingerich bu nedenle Gillings ve Hamblin'den yaklaşık 2 kat daha ileri gitti. Hesaplamaları muhtemelen Fortran II ve belki de makine dilinde bazı rutinler kullanılarak bir IBM 7094 üzerinde yapıldı. Orijinal program maalesef artık mevcut değil.*"

Şu hâlde [223]'e göre

$$[225] \quad \frac{p_1}{q_1} = m_1 < \overline{m_0} = 1 + \sqrt{2} < m_0 = 2; 24,51,11 \Rightarrow p_1 < 2; 24,51,11q_1 = \frac{521471}{216000}q_1$$

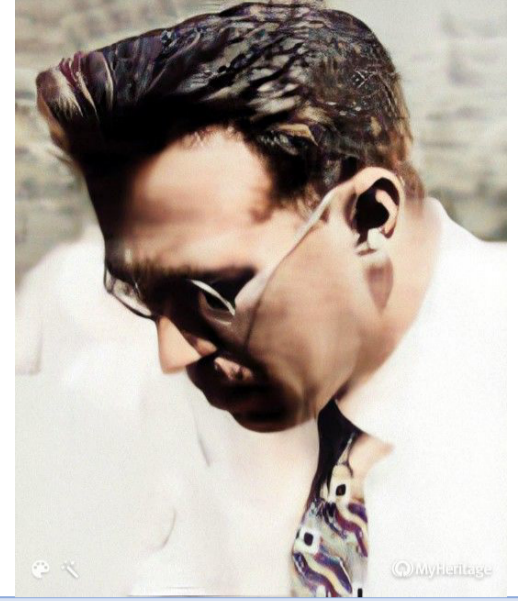
eşitsizliğinde  $q_1 = q_n$  düzgün sayılarına göre  $p_1 \in D$  için minimum ve maksimum değerler

$$[226] \quad \begin{cases} \text{Min}(p_1) < \frac{521471}{216000} \text{Min}(q_1) = \frac{521471}{216000} \times 2 = 4 \frac{89471}{108000} \Rightarrow \text{Min}(p_1) = 4 \in D, \\ \text{Max}(p_1) < \frac{521471}{216000} \text{Max}(q_1) = \frac{521471}{216000} \times 209952 = 506869 \frac{203}{250} \Rightarrow \text{Max}(p_1) = 506250 \in D \end{cases}$$

olmak üzere toplam 368 tane düzgün sayı vardır. Bu düzgün sayıların en küçüğü (min) 4 iken en büyüğü (max) 506250 olup diğerleri bunların arasında sıralanır ve hepsini burada [224]'teki gibi vermeye gerek görmüyorum. Çünkü bunlar nasıl olsa [Tablo 20](#)'de mevcuttur ve orada bu sayılarla ilgili her türlü kontrolü yapabilirsiniz.

Şimdi Tablo 20 için ilkin  $q_1 = q$  için [224]'teki gibi ilk 368 değil 442 düzgün sayıyı (ki bu düzgün sayılar 2'den başlar ve 506250'de biter. Bunu programda "q" olarak adlandırdım) alırken  $p_1$  için Mathematica'da şu işlemi yapıyoruz:

$$[227] \quad p1 := \text{Table} \left[ \text{Max} \left[ \text{TakeWhile} \left[ q, \# < \left( \frac{521471}{216000} q \right) \llbracket n \rrbracket \& \right] \right], \{n, 1, m\} \right].$$



**Resim 16. Otto Neugebauer**, 1920'lerin sonlarında Eski Babil Matematiği üzerine yazmaya başladığında, bu alanın öncülerinin kahramanca çabalarına ve bir miktar ön hazırlığa rağmen, hâlâ yeterince araştırılmamış ve tam olarak anlaşılammış bir alandı. Bu konuyla ilgilenmeye başladığında, bir dizi makale yayınladı ve bu çalışmalar, 1935 ve 1937 yıllarında 3 cilt halinde yayınlanan devasa "*Mathematische Keilschrift-Texte (MKT)*" adlı eserin ortaya çıkmasına yol açtı. 1945'te yayınlanan "*Mathematical Cuneiform Texts (MCT)*", esasen daha önce Avrupa'da kendisine ulaşlamayan Yale'deki tabletlerin yanı sıra meşhur Plimpton 322'yi yayınlamaya odaklanıyordu ve bu eser, projesini büyük ölçüde tamamladı. *Neugebauer*, Eski Babil problem metinlerinden oluşan bilinen külliyatı okumuş, çevirmiş, anlamış ve matematiksel ayrıntılarla kesin bir şekilde tanımlamış, ayrıca çeşitli tablet metin türlerini sınıflandırmıştı. *Neugebauer* başka alanlara yöneldi ve hayatının geri kalanında astronomi üzerine çalışmalarına devam etse de, matematik üzerine nadiren yayın yaptı. Yapılacak başka ne kalmıştı ki? Bir bilim dalı, yeni keşiflerin ortaya çıkmasıyla gelişir, ancak aynı zamanda yeni sorulara yanıt olarak da şekillenir. Her nesil akademisyenin görevinin bir parçası, öncülerinin gizli varsayımlarını ortaya çıkarmak ve bunları sorgulamaktır. Hem yeni keşifler hem de yeni sorular, 1945'ten bu yana Mezopotamya matematiğine bakışımızı derinden değiştirmiştir. 1996 yılında *Jens Höyrup*, 1930'lardan (kendisinin "*Kahramanlık Çağı*" olarak adlandırdığı dönem) günümüze kadar uzanan Mezopotamya matematiğindeki tarihsel gelişmeler üzerine ustaca kaleme alınmış bir makale yayınladı (*Höyrup*, 1996). *Höyrup*'un belirlediği "değişen eğilimlerden" bazıları son 20 yıl boyunca devam etti ve bunlara yenileri eklendi; hepsi bir araya geldiğinde Mezopotamya matematiğine dair yeni bir vizyon ortaya çıkarıyorlar. *Höyrup* içeriden bir bakış açısı sunarken, dışarıdan bakış açısına ise belki de en iyi şekilde ikincil kaynaklar, yani Babillilere de yer ayıran matematik tarih ders kitapları aracılığıyla ulaşılabilir. Bu kaynaklardan genellikle Babillilerin bize 3 şey bıraktığını öğreniriz: 60'lık sayı sistemi, çarpım tabloları ve sözlü problemler. Elbette bu şeyler *Neugebauer* tarafından biliniyordu ve modern ders kitaplarında yer alanlardan çok daha ayrıntılı bir şekilde. Ancak artık bunları farklı bir şekilde biliyoruz ve ben bu konuların her birini sırayla ele almak ve bazı diğer konuları da ele alarak farklılıkları incelemek istiyorum. (Bkz. "[Bir Matematikçinin Yolculukları: Otto Neugebauer ve Eski Bilimin Modern Dönüşümleri](#)", S. 237-238).

Burada en iç parantezdeki değer [223]'teki üst sınır  $m_0 = 2; 24,51,11 = \frac{521471}{216000}$  ve  $m = 368$ 'dir ve fare imlecini en sondaki köşeli parantezin sağ tarafındayken "Shift+Enter" a bastığımızda (ya da bu satırı farelinizin sol tuşuyla seçip sağ tuşuna tıkladığımızda "Evaluate Cell" komutunu verdiğimizde)  $n = 1$ 'den  $n = 368$ 'e kadar düzgün  $p_1$  sayıları araştırılır. Eğer  $p_1$  düzgün sayılarını görmek isterseniz "p1"i yazıp "Shift+Enter" a basmanız yeterlidir.

Bu işlemle  $p_1$  düzgün sayılarını belirlediğimize göre,  $q_1$ 'i şu şekilde giriyoruz:

$$[228] \quad q1 := \text{GenerateRegularNumbers}[m].$$

Burada  $q_1$  [224]'teki gibi 368 düzgün sayıdır ve bunları görmek isterseniz "q1"i yazıp "Shift+Enter" a basmanız yeterlidir (ki eşitliğin solundaki ":" işareti q1'in görüntülemesini kapatır).

O halde 368 tane  $p_1$  ve  $q_1$  düzgün sayılarını 1-1 eşleştiren  $(p_1, q_1)$  sıralı ikilileri için

$$[229] \quad \text{Max} \left[ \text{Sort} \left[ \frac{p1}{q1} \right] \right]$$

komutu bize  $m_1 = \frac{p_1}{q_1}$  eğimlerini ya da oranlarını küçükten büyüğe doğru sıralayıp (Sort) en büyüğünü (Max) verir.

İşte bu sonuçlara göre Mathematica q'da 13.4531 sn ve bu son işlemde 14.6406 sn olmak üzere toplamda 28.0937 sn sonra şu sonucu verir (ki bu sonucun elde edilmesinde geçen süre [227] ve [228]'deki işlemlerle birlikte yarım dakikayı geçer):

$$[230] \quad m_1 = \frac{p1}{q1} = \frac{3125}{1296}$$

Bu oran **Jens Kleb** tarafından "[Plimpton 322'nin 1-15. Satırlarının Altında, Arasında ve Üstünde Bulunan 270 Geçerli Üçlüler, 2023](#)" makalesindeki tabloda verilmiştir. Bu makalenin "Özet (Abstract)"inde şu bilgiler verilir: "Aşağıda sunulan veri tablosu, ünlü Plimpton 322 tabletinde yer alan üçlü gruplara karşılık gelen, ancak eğim oranları açısından 1-15. satırlardaki değerlerin üzerinde, arasında veya altında bulunan 270 geçerli üçlü grubu içermektedir. Biçim, üçgen/dikdörtgen kenarlarının seçimi ve elde edilen sütunların sırası korunmuştur. Yazar tarafından hesaplanan olası üçlülerden, yalnızca orijinal tabloda da altmışlık sayı basamaklarıyla verilebilecek olanlar dahil edilmiştir." Buna göre **Kleb**,  $(0^\circ, 90^\circ)$  aralığında 270 satır verir ve tabloda üzerin bantlı ya da koyu bölgedeki satırda Resim 15'teki YBC 7289 no'lu tabletin köşegeni üzerindeki  $\sqrt{2}$  için 1;24,51,10 değerini kullanarak alttaki satırda dik üçgenin kısa kenarını (yükseklik)  $a = p^2 - q^2 = 3125^2 - 1296^2 = 8086009 = 37,26,6,49$  ve hipotenüsünü (köşegen)  $r = p^2 + q^2 = 3125^2 + 1296^2 = 11445241 = 52,59,14,1$  şeklinde vermiştir. Fakat bunun altındaki satırda aşağıdaki Tablo 20'deki  $n = 3$ . satır verildiği için (ki  $n = 2$ . satır atlanılmıştır) buradaki metottan uzaktır!

İkinci olarak [230]'a göre

$$[231] \quad \frac{p_2}{q_2} = m_2 < m_1 = \frac{3125}{1296} = 2; 24,40,33,20 \Rightarrow p_2 < 2; 24,40,33,20 q_2 = \frac{3125}{1296} q_2$$

eşitsizliğinde  $q_2 = q_n$  düzgün sayılarına göre  $p_2 \in D$  için minimum ve maksimum değerler

$$[232] \quad \begin{cases} \text{Min}(p_2) < \frac{3125}{1296} \text{Min}(q_2) = \frac{3125}{1296} \times 2 = 4 \frac{533}{648} \Rightarrow \text{Min}(p_2) = 4 \in D, \\ \text{Max}(p_2) < \frac{3125}{1296} \text{Max}(q_2) = \frac{3125}{1296} \times 209952 = 506250 \Rightarrow \text{Max}(p_1) = 500000 \in D \end{cases}$$

olmak üzere toplam 368 tane düzgün sayı vardır.

Burada  $q_2 = q$  için bu sefer 441 düzgün sayıyı alırken Mathematica'da  $p_2$  için

$$[233] \quad p2 := \text{Table} \left[ \text{Max} \left[ \text{TakeWhile} \left[ q, \# < \left( \frac{3125}{1296} q \right) \llbracket n \rrbracket \& \right] \right], \{n, 1, m\} \right]$$

ve  $q_2$  için

$$[234] \quad q2 := \text{GenerateRegularNumbers}[m].$$

değerlerini girdikten sonra  $(p_1, q_1)$  sıralı ikililerine ait oranların en büyüğünü

$$[235] \quad \text{Max} \left[ \text{Sort} \left[ \frac{p2}{q2} \right] \right]$$

ile belirleyip şu çıktıyı alırız:

$$[236] \quad m_2 = \frac{p2}{q2} = \frac{19683}{8192}$$

Özetle bu sonuçlara göre  $q_1 = q_2$  iken  $\text{Max}(p_2) < \text{Max}(p_1)$  olmakta ve  $n$  değeri büyüdükçe  $q_1 = q_2 = \dots = q_{338}$  olurken  $\text{Max}(p_{338}) < \dots < \text{Max}(p_2) < \text{Max}(p_1)$  eşitsizlikleri geçerli olacak ve sonunda  $n = 338$  için  $p_{338} = q_1$  olacağından  $m_{338} = \frac{p_{377}}{q_{377}} = 1$  elde edilecektir. Sizin Mathematica'da  $m_1, m_2, \dots, m_{338}$

eğimlerini hesaplamamız  $338 \times \frac{1}{2} = 169' = 2^h 49'$  (2 Saat + 49 Dakika) sürenizi alır görünür ama bu süre rahatlıkla 3 saati aşar. Ben bu hesabı (Tablo 20.nb dosyasının oluşturma tarihine göre) 28.03.2026, 11:39:44'te başlattım ve tüm hafta sonumu aşağıdaki Tablo 20'ye ayırmak zorunda kaldım.



**Resim 17.** Sağdaki YBC 7289 no'lu tablet ve soldaki Plimpton 322 no'lu tablettir (ki bu resmi tam boyutta görebilmek için [suraya](#) tıklayınız). Her ikisi de aynı döneme ve yere aittir (MÖ 1822 ya da **Hammurabi**'den 30 yıl önce, Larsa) ama sağdaki soldakinden önce üretilmiş gözükür. **Hammurabi** MÖ 1763'te Larsa'yı fethedince bu tabletler Babil'e devredildi (Bkz. "[Krallar: Babil'den Bağdat'a](#)"). **Hammurabi** belgeselin [11:42](#)'sinden itibaren başlar). Bu arada Play-off finalinde Bolivya'yı [2-1](#) yenerek 40 yıl sonra 2026 Dünya Kupası'na katılan Irak'ı canı gönülden tebrik ederim (Bkz. "[Irak, Dünya Kupası'na katılma hakkını kutluyor](#)"). Ben buna "Kelebek Etkisi" diyorum!

Şu hâlde sağdaki tabletin bir köşegeni üzerinde  $\sqrt{2}$ 'nin alt sınırı olarak verilen 1;24,51,10 değerine göre soldaki tabletteki gibi yeni trigonometrik cetveli şöyle verebilirim:

$n$	$p_n$	$q_n$	$a_n$	$h_n$	$r_n$	$\theta_n = \text{Sec}^{-1}\left(\frac{r_n}{h_n}\right)$
0	$\frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{2}$	$\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	45°00'00"
1	3125	1296	8086009	8100000	11445241	44°57'01"
2	19683	8192	320311625	322486272	454529353	44°48'22"
3	12	5	119	120	169	44°45'36"
4	131072	54675	14190513559	14332723200	20169224809	44°42'51"
5	186624	78125	28725001751	29160000000	40932033001	44°34'09"
6	78125	32768	5029773801	5120000000	7177257449	44°29'26"
7	15625	6561	201093904	205031250	287187346	44°26'40"
8	1215	512	1214081	1244160	1738369	44°17'56"
9	64	27	3367	3456	4825	44°15'09"
10	59049	25000	2861784401	2952450000	4111784401	44°06'23"
11	36864	15625	1114813871	1152000000	1603095121	44°03'36"
12	390625	165888	125069062081	129600000000	180106719169	43°58'50"
13	75	32	4601	4800	6649	43°47'14"
14	5120	2187	21431431	22394880	30997369	43°44'26"
15	1458	625	1735139	1822500	2516389	43°35'36"
16	65536	28125	3503951671	3686400000	5085982921	43°32'47"
17	151875	65536	18771048329	19906560000	27360982921	43°19'06"
18	125	54	12709	13500	18541	43°16'16"
19	409600	177147	136391100391	145118822400	199153219609	43°13'27"
20	59049	25600	2831424401	3023308800	4142144401	43°07'22"
21	288	125	67319	72000	98569	43°04'32"
22	9375	4096	71113409	76800000	104667841	42°47'53"
23	5000	2187	20217031	21870000	29782969	42°45'03"
24	729	320	429041	466560	633841	42°36'04"
25	512	225	211519	230400	312769	42°33'12"
26	177147	78125	25277543984	27679218750	37484575234	42°24'11"
27	15625	6912	196364881	216000000	291916369	42°16'25"

*Sherlock Holmes'a Karşı Cingöz Recai: Cingöz Recai Babil'de, 2006*

28	400000	177147	128618940391	141717600000	191381059609	42° 13' 33"
29	295245	131072	69989740841	77396705280	104349479209	42° 07' 22"
30	9	4	65	72	97	42° 04' 30"
31	8192	3645	53822839	59719680	80394889	42° 01' 37"
32	34992	15625	980299439	1093500000	1468580689	41° 52' 31"
33	78125	34992	4879075561	5467500000	7327955689	41° 44' 42"
34	18225	8192	265041761	298598400	399259489	41° 35' 34"
35	20	9	319	360	481	41° 32' 40"
36	131072	59049	13693084783	15479341056	20666653585	41° 29' 45"
37	177147	80000	24981059609	28343520000	37781059609	41° 23' 30"
38	6912	3125	38010119	43200000	57541369	41° 20' 36"
39	390625	177147	121206831016	138396093750	183968950234	41° 12' 42"
40	1125	512	1003481	1152000	1527769	41° 03' 30"
41	1600	729	2028559	2332800	3091441	41° 00' 34"
42	2187	1000	3782969	4374000	5782969	40° 51' 20"
43	4096	1875	13261591	15360000	20292841	40° 48' 24"
44	625	288	307681	360000	473569	40° 31' 10"
45	128000	59049	12897215599	15116544000	19870784401	40° 28' 13"
46	177147	81920	24670173209	29023764480	38091946009	40° 21' 52"
47	54	25	2291	2700	3541	40° 18' 54"
48	65536	30375	3372326671	3981312000	5217607921	40° 15' 57"
49	140625	65536	15480423329	18432000000	24070357921	40° 01' 32"
50	3125	1458	7639861	9112500	11891389	39° 58' 34"
51	2187	1024	3734393	4478976	5831545	39° 49' 12"
52	32	15	799	960	1249	39° 46' 13"
53	165888	78125	21415312919	25920000000	33622344169	39° 33' 49"
54	78125	36864	4744561129	5760000000	7462470121	39° 28' 42"
55	125000	59049	12138215599	14762250000	19111784401	39° 25' 43"
56	135	64	14129	17280	22321	39° 16' 16"
57	512	243	203095	248832	321193	39° 13' 15"
58	6561	3125	33281096	41006250	52812346	39° 03' 47"
59	32768	15625	829601199	1024000000	1317882449	39° 00' 46"
60	390625	186624	117759373249	145800000000	187416408001	38° 55' 37"
61	273375	131072	57554021441	71663616000	91913759809	38° 46' 06"
62	25	12	481	600	769	38° 43' 04"
63	40960	19683	1290301111	1612431360	2065142089	38° 40' 03"
64	1296	625	1288991	1620000	2070241	38° 30' 30"
65	16875	8192	217656761	276480000	351874489	38° 12' 40"
66	500	243	190951	243000	309049	38° 09' 37"
67	6561	3200	32806721	41990400	53286721	38° 00' 00"
68	256	125	49911	64000	81161	37° 56' 57"
69	3125	1536	7406329	9600000	12124921	37° 38' 59"
70	40000	19683	1212579511	1574640000	1987420489	37° 35' 55"
71	81	40	4961	6480	8161	37° 26' 13"
72	4096	2025	12676591	16588800	20877841	37° 23' 08"
73	157464	78125	18691395671	24603750000	30898426921	37° 13' 25"
74	15625	7776	183674449	243000000	304606801	37° 05' 03"
75	32805	16384	807732569	1074954240	1344603481	36° 55' 17"
76	2	1	3	4	5	36° 52' 11"
77	65536	32805	3218799271	4299816960	5371135321	36° 49' 05"
78	31104	15625	723318191	972000000	1211599441	36° 39' 17"
79	390625	196608	113933184961	153600000000	191242596289	36° 33' 58"
80	78125	39366	4553833669	6150937500	7653197581	36° 30' 51"
81	2025	1024	3052049	4147200	5149201	36° 21' 01"
82	160	81	19039	25920	32161	36° 17' 54"

*Sherlock Holmes'a Karşı Cingöz Recai: Cingöz Recai Babil'de, 2006*

83	19683	10000	287420489	393660000	487420489	36°08'02"
84	6144	3125	27983111	38400000	47514361	36°04'54"
85	125	64	11529	16000	19721	35°46'30"
86	12800	6561	120793279	167961600	206886721	35°43'21"
87	243	125	43424	60750	74674	35°33'25"
88	32768	16875	788976199	1105920000	1358507449	35°30'16"
89	253125	131072	46892396441	66355200000	81252134809	35°14'54"
90	625	324	285649	405000	495601	35°11'43"
91	19683	10240	282562889	403107840	492278089	35°01'44"
92	48	25	1679	2400	2929	34°58'33"
93	15625	8192	177031761	256000000	311249489	34°39'54"
94	12500	6561	113203279	164025000	199296721	34°36'42"
95	243	128	42665	62208	75433	34°26'38"
96	256	135	47311	69120	83761	34°23'26"
97	59049	31250	2510221901	3690562500	4463346901	34°13'20"
98	147456	78125	15639756311	23040000000	27846787561	34°10'08"
99	78125	41472	4383588841	6480000000	7823442409	34°04'39"
100	15	8	161	240	289	33°51'18"
101	4096	2187	11994247	17915904	21560185	33°48'04"
102	5832	3125	24246599	36450000	43777849	33°37'54"
103	262144	140625	48944086111	73728000000	88494867361	33°34'41"
104	390625	209952	108508048321	164025000000	196667732929	33°29'09"
105	30375	16384	654205169	995328000	1191076081	33°18'57"
106	50	27	1771	2700	3229	33°15'42"
107	327680	177147	75993122791	116095057920	138755242009	33°12'28"
108	59049	32000	2462784401	3779136000	4510784401	33°05'29"
109	1152	625	936479	1440000	1717729	33°02'14"
110	1875	1024	2467049	3840000	4564201	32°43'08"
111	4000	2187	11217031	17496000	20782969	32°39'53"
112	729	400	371441	583200	691441	32°29'35"
113	2048	1125	2928679	4608000	5459929	32°26'18"
114	3125	1728	6779641	10800000	12751609	32°07'05"
115	320000	177147	71018940391	113374080000	133781059609	32°03'48"
116	59049	32768	2413042577	3869835264	4560526225	31°56'44"
117	9	5	56	90	106	31°53'26"
118	32768	18225	741591199	1194393600	1405892449	31°50'09"
119	139968	78125	13487525399	21870000000	25694556649	31°39'45"
120	234375	131072	37751771441	61440000000	72111509809	31°34'07"
121	15625	8748	167613121	273375000	320668129	31°30'48"
122	3645	2048	9091721	14929920	17480329	31°20'23"
123	16	9	175	288	337	31°17'04"
124	177147	100000	21381059609	35429400000	41381059609	31°06'37"
125	27648	15625	520271279	864000000	1008552529	31°03'17"
126	312500	177147	66275190391	110716875000	129037309609	30°54'17"
127	225	128	34241	57600	67009	30°43'47"
128	1280	729	1106959	1866240	2169841	30°40'27"
129	2187	1250	3220469	5467500	6345469	30°29'56"
130	16384	9375	180544831	307200000	356326081	30°26'35"
131	125	72	10441	18000	20809	30°06'58"
132	102400	59049	6998975599	12093235200	13972544401	30°03'36"
133	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	30°00'00"
134	177147	102400	20895299609	36279705600	41866819609	29°56'23"
135	216	125	31031	54000	62281	29°53'01"
136	262144	151875	45653461111	79626240000	91785492361	29°49'39"
137	28125	16384	522580169	921600000	1059451081	29°33'17"

*Sherlock Holmes'a Karşı Cingöz Recai: Cingöz Recai Babil'de, 2006*

138	1250	729	1031059	1822500	2093941	29°29'54''
139	2187	1280	3144569	5598720	6421369	29°19'16''
140	128	75	10759	19200	22009	29°15'53''
141	15625	9216	159205969	288000000	329075281	28°56'01''
142	100000	59049	6513215599	11809800000	13486784401	28°52'37''
143	27	16	473	864	985	28°41'55''
144	2048	1215	2718079	4976640	5670529	28°38'30''
145	26244	15625	444606911	820125000	932888161	28°27'46''
146	131072	78125	11076353559	20480000000	23283384809	28°24'22''
147	78125	46656	3926733289	7290000000	8280297961	28°18'32''
148	54675	32768	1915613801	3583180800	4063097449	28°07'46''
149	5	3	16	30	34	28°04'20''
150	32768	19683	686321335	1289945088	1461162313	28°00'55''
151	5184	3125	17108231	32400000	36639481	27°50'07''
152	3375	2048	7196321	13824000	15584929	27°30'00''
153	400	243	100951	194400	219049	27°26'33''
154	6561	4000	27046721	52488000	59046721	27°15'42''
155	1024	625	657951	1280000	1439201	27°12'15''
156	625	384	243169	480000	538081	26°52'00''
157	32000	19683	636579511	1259712000	1411420489	26°48'33''
158	81	50	4061	8100	9061	26°37'38''
159	16384	10125	165919831	331776000	370951081	26°34'10''
160	3125	1944	5986489	12150000	13544761	26°13'48''
161	6561	4096	26269505	53747712	59823937	26°02'50''
162	8	5	39	80	89	25°59'21''
163	262144	164025	41815276111	85996339200	95623677361	25°55'51''
164	124416	78125	9375825431	19440000000	21582856681	25°44'52''
165	78125	49152	3687596521	7680000000	8519434729	25°38'53''
166	31250	19683	589142011	1230187500	1363982989	25°35'23''
167	405	256	98489	207360	229561	25°24'22''
168	128	81	9823	20736	22945	25°20'51''
169	19683	12500	231170489	492075000	543670489	25°09'48''
170	24576	15625	359839151	768000000	848120401	25°06'17''
171	25	16	369	800	881	24°45'41''
172	10240	6561	61810879	134369280	147904321	24°42'10''
173	972	625	554159	1215000	1335409	24°31'03''
174	131072	84375	10060728559	22118400000	24299009809	24°27'31''
175	50625	32768	1489148801	3317760000	3636632449	24°10'21''
176	125	81	9064	20250	22186	24°06'48''
177	19683	12800	223580489	503884800	551260489	23°55'39''
178	192	125	21239	48000	52489	23°52'06''
179	3125	2048	5571321	12800000	13959929	23°31'17''
180	10000	6561	56953279	131220000	143046721	23°27'44''
181	243	160	33449	77760	84649	23°16'31''
182	1024	675	592951	1382400	1504201	23°12'57''
183	118098	78125	7843621979	18452812500	20050653229	23°01'42''
184	15625	10368	136645201	324000000	351636049	22°52'02''
185	98415	65536	5390544929	12899450880	13980479521	22°40'46''
186	3	2	5	12	13	22°37'11''
187	16384	10935	148861231	358318080	388009681	22°33'36''
188	23328	15625	300054959	729000000	788336209	22°22'19''
189	78125	52488	3348525481	8201250000	8858505769	22°12'35''
190	6075	4096	20128409	49766400	53682841	22°01'16''
191	40	27	871	2160	2329	21°57'40''
192	262144	177147	37338417127	92876046336	100100536345	21°54'04''

*Sherlock Holmes'a Karşı Cingöz Recai: Cingöz Recai Babil'de, 2006*

193	59049	40000	1886784401	4723920000	5086784401	21°46'20"
194	4608	3125	11468039	28800000	30999289	21°42'44"
195	375	256	75089	192000	206161	21°21'35"
196	3200	2187	5457031	13996800	15022969	21°17'58"
197	729	500	281441	729000	781441	21°06'35"
198	8192	5625	35468239	92160000	98749489	21°02'58"
199	625	432	204001	540000	577249	20°41'43"
200	256000	177147	34154940391	90699264000	96917059609	20°38'06"
201	59049	40960	1809062801	4837294080	5164506001	20°30'17"
202	36	25	671	1800	1921	20°26'39"
203	131072	91125	8876103559	23887872000	25483634809	20°23'01"
204	46875	32768	1123523801	3072000000	3271007449	20°05'20"
205	3125	2187	4982656	13668750	14548594	20°01'41"
206	729	512	269297	746496	793585	19°50'12"
207	64	45	2071	5760	6121	19°46'33"
208	177147	125000	15756059609	44286750000	47006059609	19°35'03"
209	110592	78125	6127074839	17280000000	18334106089	19°31'23"
210	78125	55296	3045868009	8640000000	9161163241	19°25'08"
211	250000	177147	31118940391	88573500000	93881059609	19°21'29"
212	45	32	1001	2880	3049	19°09'57"
213	1024	729	517135	1492992	1580017	19°06'17"
214	4374	3125	9366251	27337500	28897501	18°54'44"
215	65536	46875	2097701671	6144000000	6492232921	18°51'03"
216	91125	65536	4008798329	11943936000	12598732921	18°33'12"
217	25	18	301	900	949	18°29'32"
218	81920	59049	3224101999	9674588160	10197670801	18°25'51"
219	177147	128000	14997059609	45349632000	47765059609	18°17'56"
220	864	625	355871	1080000	1137121	18°14'15"
221	5625	4096	14863409	46080000	48417841	17°52'38"
222	1000	729	468559	1458000	1531441	17°48'57"
223	2187	1600	2222969	6998400	7342969	17°37'18"
224	512	375	121519	384000	402769	17°33'36"
225	3125	2304	4457209	14400000	15074041	17°11'55"
226	80000	59049	2913215599	9447840000	9886784401	17°08'13"
227	177147	131072	14201190425	46438023168	48560928793	17°00'14"
228	27	20	329	1080	1129	16°56'32"
229	8192	6075	30203239	99532800	104014489	16°52'49"
230	104976	78125	4916444951	16402500000	17123476201	16°41'07"
231	15625	11664	108091729	364500000	380189521	16°31'03"
232	10935	8192	52465361	179159040	186683089	16°19'20"
233	4	3	7	24	25	16°15'36"
234	131072	98415	7494356959	25798901760	26865381409	16°11'53"
235	20736	15625	185841071	648000000	674122321	16°00'08"
236	78125	59049	2616731224	9226406250	9590300026	15°50'02"
237	675	512	193481	691200	717769	15°38'16"
238	320	243	43351	155520	161449	15°34'32"
239	6561	5000	18046721	65610000	68046721	15°22'46"
240	4096	3125	7011591	25600000	26542841	15°19'01"
241	125	96	6409	24000	24841	14°57'05"
242	25600	19683	267939511	1007769600	1042780489	14°53'20"
243	162	125	10619	40500	41869	14°41'31"
244	65536	50625	1732076671	6635520000	6857857921	14°37'46"
245	84375	65536	2824173329	11059200000	11414107921	14°19'31"
246	625	486	154429	607500	626821	14°15'45"
247	6561	5120	16832321	67184640	69261121	14°03'54"

*Sherlock Holmes'a Karşı Cingöz Recai: Cingöz Recai Babil'de, 2006*

248	32	25	399	1600	1649	14°00'09"
249	15625	12288	93145681	384000000	395135569	13°38'04"
250	25000	19683	237579511	984150000	1012420489	13°34'18"
251	81	64	2465	10368	10657	13°22'25"
252	512	405	98119	414720	426169	13°18'39"
253	19683	15625	143279864	615093750	631561114	13°06'45"
254	98304	78125	3560160791	15360000000	15767192041	13°02'58"
255	78125	62208	2233680361	9720000000	9973350889	12°56'31"
256	164025	131072	9724331441	42998169600	44084069809	12°44'36"
257	5	4	9	40	41	12°40'49"
258	8192	6561	24062143	107495424	110155585	12°37'02"
259	3888	3125	5350919	24300000	24882169	12°25'06"
260	10125	8192	35406761	165888000	169624489	12°02'53"
261	100	81	3439	16200	16561	11°59'06"
262	19683	16000	131420489	629856000	643420489	11°47'08"
263	768	625	199199	960000	980449	11°43'20"
264	625	512	128481	640000	652769	11°21'04"
265	8000	6561	20953279	104976000	107046721	11°17'16"
266	243	200	19049	97200	99049	11°05'17"
267	4096	3375	5386591	27648000	28167841	11°01'28"
268	3125	2592	3047161	16200000	16484089	10°39'09"
269	19683	16384	118985033	644972544	655855945	10°27'08"
270	6	5	11	60	61	10°23'19"
271	65536	54675	1305611671	7166361600	7284322921	10°19'30"
272	93312	78125	2603613719	14580000000	14810644969	10°07'29"
273	78125	65536	1808548329	10240000000	10398482921	10°00'57"
274	15625	13122	71953741	410062500	416327509	09°57'08"
275	1215	1024	427649	2488320	2524801	09°45'06"
276	32	27	295	1728	1753	09°41'16"
277	59049	50000	986784401	5904900000	5986784401	09°29'13"
278	18432	15625	95597999	576000000	583879249	09°25'24"
279	75	64	1529	9600	9721	09°02'58"
280	2560	2187	1770631	11197440	11336569	08°59'08"
281	729	625	140816	911250	922066	08°47'04"
282	32768	28125	282726199	1843200000	1864757449	08°43'14"
283	151875	131072	5886146441	39813120000	40245884809	08°24'35"
284	125	108	3961	27000	27289	08°20'45"
285	204800	177147	10561980391	72559411200	73324099609	08°16'55"
286	59049	51200	865344401	6046617600	6108224401	08°08'39"
287	144	125	5111	36000	36361	08°04'49"
288	9375	8192	20781761	153600000	154999489	07°42'18"
289	2500	2187	1467031	10935000	11032969	07°38'28"
290	729	640	121841	933120	941041	07°26'21"
291	256	225	14911	115200	116161	07°22'30"
292	177147	156250	6966997109	55358437500	55795122109	07°10'23"
293	15625	13824	53037649	432000000	435243601	06°59'57"
294	200000	177147	8618940391	70858800000	71381059609	06°56'06"
295	9	8	17	144	145	06°43'58"
296	4096	3645	3491191	29859840	30063241	06°40'07"
297	17496	15625	61969391	546750000	550250641	06°27'58"
298	78125	69984	1205755369	10935000000	11001275881	06°17'32"
299	18225	16384	63715169	597196800	600586081	06°05'23"
300	10	9	19	180	181	06°01'32"
301	65536	59049	808182895	7739670528	7781751697	05°57'40"
302	177147	160000	5781059609	56687040000	56981059609	05°49'22"

303	3456	3125	2178311	21600000	21709561	05°45'31''
304	1125	1024	217049	2304000	2314201	05°22'54''
305	800	729	108559	1166400	1171441	05°19'02''
306	2187	2000	782969	8748000	8782969	05°06'52''
307	2048	1875	678679	7680000	7709929	05°03'00''
308	625	576	58849	720000	722401	04°40'21''
309	64000	59049	609215599	7558272000	7582784401	04°36'29''
310	177147	163840	4537514009	58047528960	58224605209	04°28'10''
311	27	25	104	1350	1354	04°24'18''
312	32768	30375	151101199	1990656000	1996382449	04°20'26''
313	140625	131072	2595521441	36864000000	36955259809	04°01'38''
314	3125	2916	1262569	18225000	18268681	03°57'46''
315	2187	2048	588665	8957952	8977273	03°45'35''
316	16	15	31	480	481	03°41'42''
317	82944	78125	776191511	12960000000	12983222761	03°25'38''
318	78125	73728	667697641	11520000000	11539333609	03°19'01''
319	62500	59049	419465599	7381125000	7393034401	03°15'09''
320	135	128	1841	34560	34609	03°02'57''
321	256	243	6487	124416	124585	02°59'04''
322	6561	6250	3984221	82012500	82109221	02°46'52''
323	16384	15625	24294831	512000000	512576081	02°43'00''
324	25	24	49	1200	1201	02°20'17''
325	20480	19683	32009911	806215680	806850889	02°16'25''
326	648	625	29279	810000	810529	02°04'12''
327	16875	16384	16330169	552960000	553201081	01°41'29''
328	250	243	3451	121500	121549	01°37'37''
329	6561	6400	2086721	83980800	84006721	01°25'24''
330	128	125	759	32000	32009	01°21'31''
331	3125	3072	328441	19200000	19202809	00°58'48''
332	20000	19683	12579511	787320000	787420489	00°54'55''
333	81	80	161	12960	12961	00°42'42''
334	2048	2025	93679	8294400	8294929	00°38'49''
335	78732	78125	95212199	12301875000	12302243449	00°26'36''
336	15625	15552	2275921	486000000	486005329	00°16'05''
337	32805	32768	2426201	2149908480	2149909849	00°03'52''
338	1	1	0	2	2	00°00'00''

**Tablo 20.** Bu tablonun Mathematica'daki doğrulanmasını [Tablo 20](#)'de bulabilirsiniz.

Bu tabloda 3 satırda ( $n = 0,133,338$ ) dik üçgen triviyal (açık) metcutken diğer satırlardaki dik üçgenler Resim 17'deki soldaki Plimpton 322 no'lu tabletteki gibi triviyal olmayan toplamda 339 dik üçgen vardır. Metoda göre  $n = 0,1,2, \dots, 338$  için  $1 = m_{338} < \dots < m_2 < m_1 < \overline{m}_0 = 1 + \sqrt{2} < 2$ ;  $24,51,11 = m_0$  eşitsizlikleri sağlayan  $m_n = \frac{p_n}{q_n}$  oranlarına göre  $1 < q_n < 60^3$  düzgün sayılarına karşılık  $p_n$  düzgün sayıları vardır ki, bir tane bile olsun  $m_n$  kaçamaz. Örneğin *Jens Kleb*'in hazırladığı 270 satırlık tabloda  $n = 1$ . satır varken  $n = 2$ . satır yoktur ve bu tabloda mevcut daha birçok satır atlanmıştır (Bkz. "[Plimpton 322'nin 1-15. Satırlarının Altında, Arasında ve Üstünde Bulunan 270 Geçerli Üçlüler, 2023](#)").

#### Larsa ve Babil'e Bir Gönderme!

Bu tablo MÖ 1822'de Larsa'da ya da Babil'de yapılamazdı, çünkü bu tabloyu günümüzde bilgisayarla bile hazırlamak oldukça güçtür. Eğer Larsalılar ve Babilliler bu tablonun nasıl bir şey olduğunu merak ettiyseler sonuç yukarıdaki Tablo 20'de görüldüğü üzere tabletlere, hatta papirüslere ve parşömenlere sığmayacak kadar hesaplar gerektirmektedir.

**4.6. Dik Üçgenlerin Doğuranlarının Aritmetik Ortalamaya Göre Bulunması (31.03.2026, 01:36:54-02:33:40).** Öncelikle  $x_1, x_2, \dots, x_n$ 'nin genelleştirilmiş ortalaması,  $p$  sıfırdan farklı bir reel sayı olmak üzere

$$[237] \quad O_p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt[p]{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^p}{n}}$$

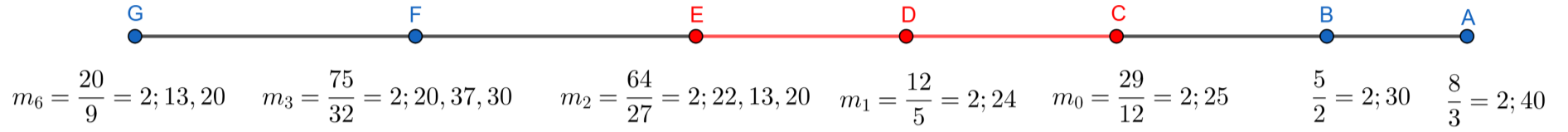
şeklinde (Bkz. Türkçe için "[Genelleştirilmiş Ortalama](#)" ve İngilizce için "[Generalized Mean](#)"). Bu formülden özel hallerde yani  $p = -1$  için harmonik ortalama,  $p = 1$  için aritmetik ortalama,  $p = 2$  için kareli ortalama elde edilir.

Dikkat edilirse formül  $p = 0$  için tanımsızdır ama limit alınırsa

$$[238] \quad \lim_{p \rightarrow 0} O_p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$$

şeklinde geometrik ortalama elde edilir. Bu formül [237]'de  $p \rightarrow 0$  için L'Hospital kuralından bulunur. Bu ispat için "[Generalized Mean](#)" sayfasında [237]'nin ağırlıklı ortalamasına göre geometrik ortalamanın nasıl elde edildiğine bakabilirsiniz.

Bu ortalamalardan tabletlerdeki örneklere göre harmonik ortalama, aritmetik ortalama, geometrik ortalama ve kareli ortalama bilinmektedir. Eğer bu ortalamalardan aritmetik ortalamayı Tablo 17'de kullanırsak sağdaki C uç noktasında  $m_0 = \frac{29}{12} = 2; 25$  ve D orta noktasında  $m_1 = \frac{12}{5} = 2; 24$  oranları bilindiğine göre, soldaki E uç noktasındaki oran kaç olur?



**Şekil 16.** [CE]'nin orta noktası D olmak üzere  $m_2$  için elde edilen sonuçlar. Burada  $m_0$  ve  $m_1$ 'in bilindiğini Şekil 15'te gösterdim ve  $m_1$ 'in alt sınırlarından G noktasındaki hariç diğerleri [121]'de mevcuttur.

Şekilde D noktası [CE]'nin orta noktası olduğundan  $m_2$  için

$$[239] \quad m_1 = \frac{m_0 + m_2}{2} \Rightarrow m_2 = 2m_1 - m_0 = 2 \cdot \frac{12}{5} - \frac{29}{12} = 2 \frac{23}{60} = 2; 23$$

sonucu çıkar ama bu bir düzgün sayı değildir. Bu nedenle  $m_2 = \frac{p_2}{q_2}$  oranındaki  $1 < q_2 < 60$  için

$$[240] \quad q_2 = \{2,3,4,5,6,8,9,10,12,15,16,18,20,24,25,27,30,32,36,40,45,48,50,54\}$$

düzgün sayısına karşılık  $p_2$  düzgün sayısını bulmamız gerekiyor.

Larsalı kâtip  $p_2$  için ilkin şu değerleri buluyor:

$$[241] \quad p_2 = 2 \frac{23}{60} q_2$$

$$= \left\{ 4 \frac{23}{30}, 7 \frac{3}{20}, 9 \frac{8}{15}, 11 \frac{11}{12}, 14 \frac{3}{10}, 19 \frac{1}{15}, 21 \frac{9}{20}, 23 \frac{5}{6}, 28 \frac{3}{5}, 35 \frac{3}{4}, 38 \frac{2}{15}, 42 \frac{9}{10}, 47 \frac{2}{3}, 57 \frac{1}{5}, 59 \frac{7}{12}, 64 \frac{7}{20}, 71 \frac{1}{2}, 76 \frac{4}{15}, 85 \frac{4}{5}, 95 \frac{1}{3}, 107 \frac{1}{4}, 114 \frac{2}{5}, 119 \frac{1}{6}, 128 \frac{7}{10} \right\}$$

$$= \{4; 46,7; 9,9; 32,11; 55,14; 18,19; 4,21; 27,23; 50,28; 36,35; 45,38; 8,42; 54,47; 40,57; 12,59; 35,64; 21,71; 30,76; 16; 85; 48,95; 20,107; 15,114; 24,119; 10, 128; 42\}.$$

Sonra bu değerlere en yakın düzgün sayıları arıyor ve şunları buluyor:

$$[242] \quad p_2 = \{5,8,10,12,15,20,20,24,30,36,40,45,48,60,60,64,72,75,90,96,108,120,120,128\}.$$

Şu hâlde  $m_2$  için  $(p_2, q_2)$  çiftlerini oranlarsak şu sonuçlar elde edilir:

$$[243] \quad m_2 = \left\{ \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \frac{10}{4}, \frac{12}{5}, \frac{15}{6}, \frac{20}{8}, \frac{20}{9}, \frac{24}{10}, \frac{30}{12}, \frac{36}{15}, \frac{40}{16}, \frac{45}{18}, \frac{48}{20}, \frac{60}{24}, \frac{60}{25}, \frac{64}{27}, \frac{72}{30}, \frac{75}{32}, \frac{90}{36}, \frac{96}{40}, \frac{108}{45}, \frac{120}{48}, \frac{120}{50}, \frac{128}{54} \right\}$$

$$= \{2; 30,2; 40,2; 30,2; 24,2; 30,2; 30,2; 30,2; 13,20,2; 24,2; 30,2; 24,2; 30,2; 30,2; 24,2; 30,2; 24,2; 22,13,20, 2; 24,2; 20,37,30,2; 30,2; 24,2; 24,2; 30,2; 24,2; 22,13,20\}.$$

Eğer bu sonuçları küçükten büyüğe doğru sıralarsak şöyle olur:

$$[244] \quad \begin{aligned} & 2; 13,20 < 2; 20,37,30 < 2; 22,13,20 = 2; 22,13,20 < 2; 24 = 2; 24 = 2; 24 = 2; 24 = 2; 24 = 2; 24 = 2; 24 = 2; 24 = 2; 24 = 2; 24 = 2; 24 = 2; 24 \\ & < 2; 25 < 2; 30 = 2; 30 = 2; 30 = 2; 30 = 2; 30 = 2; 30 = 2; 30 = 2; 30 = 2; 30 = 2; 30 = 2; 30 < 2; 40 \\ & \frac{20}{9} < \frac{75}{32} < \frac{64}{27} = \frac{64}{27} < \frac{12}{5} = \frac{12}{5} = \frac{12}{5} = \frac{12}{5} = \frac{12}{5} = \frac{12}{5} = \frac{12}{5} = \frac{12}{5} = \frac{12}{5} = \frac{12}{5} = \frac{12}{5} = \frac{12}{5} < \frac{29}{12} < \frac{5}{2} = \frac{5}{2} = \frac{5}{2} = \frac{5}{2} = \frac{5}{2} = \frac{5}{2} = \frac{5}{2} = \frac{5}{2} = \frac{5}{2} = \frac{5}{2} = \frac{5}{2} < \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Kâtip Şekil 16'ya göre bu oranlardan E noktasındaki şu oranı alır:

$$[245] \quad m_2 = 2; 22,13,20 = \frac{64}{27}$$

**Not 9 (m'ye Ortalamalarla Yaklaşma).** Genelde harmonik ortalama (HO), geometrik ortalama (GO), aritmetik ortalama (AO) ve kareli ortalama (KO) arasında

$$[246] \quad HO < GO < AO < KO$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

Bu eşitsizliklerin doğru olduğunu örneğin  $b < a$  sayıları için şöyle gösterebiliriz: HO GO'dan küçük olduğundan

$$[247] \frac{2ab}{a+b} = HO < GO = \sqrt{ab} \Rightarrow 2\sqrt{ab} < a+b \Rightarrow 4ab < (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \Rightarrow 0 < a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \Rightarrow b < a,$$

GO AO'dan küçük olduğundan

$$[248] \sqrt{ab} = GO < AO = \frac{a+b}{2} \Rightarrow 2\sqrt{ab} < a+b \Rightarrow 4ab < (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \Rightarrow 0 < a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \Rightarrow b < a,$$

ve AO KO'dan küçük olduğundan

$$[249] \frac{a+b}{2} = AO < KO = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Rightarrow \frac{a^2+2ab+b^2}{2} = \frac{(a+b)^2}{2} < a^2+b^2 \Rightarrow a^2+2ab+b^2 < 2a^2+2b^2 \Rightarrow 0 < a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2 \Rightarrow b < a$$

sonucu gerçekleştiğinden [246]'daki sıralama doğrudur.

Fakat Şekil 16'daki E noktasındaki  $m_2$ 'nin üst sınırını AO ile [239]'a göre 2;23 ile sınırlıyorsanız [245]'teki diğer ortalamalarla alttan sınırlanamazsınız. Çünkü  $m_0$  ve  $m_2$ 'nin harmonik ortalamasından [239]'dakinden biraz daha büyük bir sonuç elde edilir:

$$[250] m_1 = \frac{2m_0m_2}{m_0+m_2} \Rightarrow m_2 = \frac{m_0m_1}{2m_0-m_1} = \frac{\frac{29}{12} \cdot \frac{12}{5}}{2 \cdot \frac{29}{12} - \frac{12}{5}} = 2 \frac{28}{73} = 2; 23,00,49, \dots$$

Aynı şekilde  $m_0$  ve  $m_2$ 'nin geometrik ortalamasından yine [239]'dakinden biraz daha büyük ama [250]'dekenden biraz daha küçük bir sonuç elde edilir:

$$[251] m_1 = \sqrt{m_0m_2} \Rightarrow m_2 = \frac{m_1^2}{m_0} = \frac{\left(\frac{12}{5}\right)^2}{\frac{29}{12}} = 2 \frac{278}{725} = 2; 23,00,24, \dots$$

Üçüncü olarak  $m_0$  ve  $m_2$ 'nin kareli ortalamasından  $m_2$ 'den biraz büyük sonuç elde edilir:

$$[252] m_1 = \sqrt{\frac{m_0^2+m_2^2}{2}} \Rightarrow m_2 = \sqrt{2m_1^2 - m_0^2} = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{12}{5}\right)^2 - \left(\frac{29}{12}\right)^2} = \frac{\sqrt{20447}}{60} < \frac{143}{60} = 2; 22,59,34, \dots$$

Burada eğer aşağıdaki yaklaşıklığı göz önüne alırsanız yine [239]'daki sonucu elde ederseniz:

$$[253] \frac{\sqrt{20447}}{60} < \frac{143}{60} = 2; 23.$$

Şu hâlde bu ortalamalara göre  $m_2$ 'yi alttan ve üstten birlikte sıkıştıramadığımız ve Babillilerin de bu ortalamalardan başka ortalama kullanmadığına göre,  $m_2$  yukarıda Şekil 16'ya göre [239]-[245]'te anlattığım şekilde aritmetik ortalamadan bulunur. Çünkü Tablo 17'ye göre  $m_{n+2} = \frac{p_{n+2}}{q_{n+2}}$ 'yi üstten sıkıştırsanız bile alttan sıkıştıramayabilirsiniz ya da tam tersi olabilir ve  $[m_n, m_{n+2}]$  aralığının orta noktasını  $m_{n+1}$  aldığınız zaman  $p_{n+1}$  ve  $q_{n+1}$  düzgün sayılarına göre  $m_{n+2}$ 'nin alttan ya da üstten (civarında) bir yaklaşıklığı söz konusu olur. Bu nedenle  $m_{n+2}$ 'yi sandviç teoremindeki gibi sıkıştırmaya gerek yoktur. Aşağıdaki tablo bunu gösterir.

$n$	$2m_{n+1} - m_n$	$m_{n+2}$	$n$	$2m_{n+1} - m_n$	$m_{n+2}$	$n$	$2m_{n+1} - m_n$	$m_{n+2}$	$n$	$2m_{n+1} - m_n$	$m_{n+2}$
0	$\frac{143}{60} = 2.38333$	$\frac{64}{27} = 2.37037$	10	$\frac{79}{40} = 1.975$	$\frac{48}{25} = 1.92$	20	$\frac{61}{40} = 1.525$	$\frac{3}{2} = 1.5$	30	$\frac{61}{50} = 1.22$	$\frac{6}{5} = 1.2$
1	$\frac{316}{135} = 2.34074$	$\frac{75}{32} = 2.34375$	11	$\frac{46}{25} = 1.84$	$\frac{15}{8} = 1.875$	21	$\frac{23}{16} = 1.4375$	$\frac{40}{27} = 1.48148$	31	$\frac{23}{20} = 1.15$	$\frac{32}{27} = 1.18519$
2	$\frac{1001}{432} = 2.31713$	$\frac{125}{54} = 2.31481$	12	$\frac{183}{100} = 1.83$	$\frac{50}{27} = 1.85185$	22	$\frac{79}{54} = 1.46296$	$\frac{36}{25} = 1.44$	32	$\frac{158}{135} = 1.17037$	$\frac{9}{8} = 1.125$
3	$\frac{1975}{864} = 2.28588$	$\frac{9}{4} = 2.25$	13	$\frac{395}{216} = 1.8287$	$\frac{9}{5} = 1.8$	23	$\frac{944}{675} = 1.39852$	$\frac{64}{45} = 1.42222$	33	$\frac{115}{108} = 1.06481$	$\frac{10}{9} = 1.11111$
4	$\frac{59}{27} = 2.18519$	$\frac{20}{9} = 2.22222$	14	$\frac{236}{135} = 1.74815$	$\frac{16}{9} = 1.77778$	24	$\frac{316}{225} = 1.40444$	$\frac{45}{32} = 1.40625$	34	$\frac{79}{72} = 1.09722$	$\frac{27}{25} = 1.08$
5	$\frac{79}{36} = 2.19444$	$\frac{54}{25} = 2.16$	15	$\frac{79}{45} = 1.75556$	$\frac{27}{16} = 1.6875$	25	$\frac{1001}{720} = 1.39028$	$\frac{25}{18} = 1.38889$	35	$\frac{236}{225} = 1.04889$	$\frac{16}{15} = 1.06667$
6	$\frac{472}{225} = 2.09778$	$\frac{32}{15} = 2.13333$	16	$\frac{115}{72} = 1.59722$	$\frac{5}{3} = 1.66666$	26	$\frac{395}{288} = 1.37153$	$\frac{27}{20} = 1.35$	36	$\frac{79}{75} = 1.05333$	$\frac{25}{24} = 1.04167$
7	$\frac{158}{75} = 2.10667$	$\frac{25}{12} = 2.08333$	17	$\frac{79}{48} = 1.64583$	$\frac{81}{50} = 1.62$	27	$\frac{59}{45} = 1.31111$	$\frac{4}{3} = 1.33333$	37	$\frac{61}{60} = 1.01667$	1
8	$\frac{61}{30} = 2.03333$	$\frac{81}{40} = 2.025$	18	$\frac{118}{75} = 1.57333$	$\frac{8}{5} = 1.6$	28	$\frac{79}{60} = 1.31667$	$\frac{32}{25} = 1.28$			
9	$\frac{59}{30} = 1.96667$	2	19	$\frac{79}{50} = 1.58$	$\frac{25}{16} = 1.5625$	29	$\frac{92}{75} = 1.22667$	$\frac{5}{4} = 1.25$			

**Tablo 21.** Tablo 17'ye göre  $m_n$  ve  $m_{n+2}$ 'nin aritmetik ortalaması  $m_{n+1}$  için elde edilen  $2m_{n+1} - m_n$  ile  $m_{n+2}$  oranlarının karşılaştırılması. Kesirlerin 5 ondalığı alınmıştır.

Bu tablodaki sonuçlardan görüldüğü üzere  $[m_n, m_{n+2}]$  aralığının orta noktasını  $m_{n+1}$  aldığınız zaman, yani  $m_n$  ve  $m_{n+2}$ 'nin aritmetik ortalaması  $m_{n+1}$  olduğunda  $2m_{n+1} - m_n$ 'nin  $m_{n+2}$ 'den küçük ya da büyük olduğu görülmektedir ve Larsali kâtip bu yaklaşım içinde  $m_{n+2} = \frac{p_{n+2}}{q_{n+2}}$  oranındaki  $1 < q_{n+2} < 60$  düzgün sayılarına göre  $p_{n+2}$  düzgün sayılarını araştırıyor. Fakat kâtip aritmetik ortalamayı bu şekilde kullanmakla 15 adımda ( $n = 14$ ) ulaştığı sonuç gerçekte 40 adım sürer. Çünkü ilkin  $2m_1 - m_0 = 2.38333$ 'e aritmetik ortalamayı uygularsak 2. adımda  $2(2m_1 - m_0) - m_1 = 2.36667$  ve bu  $n = 1$ 'e karşılık gelirken

3. adımda  $2(2(2m_1 - m_0) - m_1) - (2m_1 - m_0) = 2.35$  ve bu da bu  $n = 2$ 'ye karşılık gelmesi gerekirken  $n = 1$ 'e karşılık gelir. O halde bu işlemi bu şekilde devam ettirsek şu sonuçlar elde edilir: 2.38333, 2.36667, 2.35, 2.33333, 2.31667, 2.3, 2.28333, 2.26667, 2.25, 2.23333, 2.21667, 2.2, 2.18333, 2.16667, 2.15, 2.13333, 2.11667, 2.16667, 2.08333, 2.1, 2.08333, 2.03333, 2.01667, 2, 1.98333, 1.96667, 1.95, 1.93333, 1.91667, 1.9, 1.88333, 1.86667, 1.85, 1.83333, 1.81667, 1.8, 1.78333, 1.76667, 1.75, ... (ki bu sonuçları Mathematica'da elde ederken iç içe geçmiş iterasyonlar olduğundan sistemin canını okudu ve epey zamanımı aldı. Bu nedenle [250]-[253]'teki ve bu sonuçları "Aritmetik Ortalamalar.nb" dosyasına kaydettiğimde 4.6'daki parantez içindeki tarih ve saatler yazıyordu). Bu sonuçlardan 40. adımdaki 1.75 tablodaki  $n = 14$ 'e karşılık gelir.

Şimdi tablodaki  $n = 21$ 'de  $2m_{23} - m_{22} = 2 \cdot \frac{3}{2} - \frac{25}{16} = \frac{23}{16} = 1.4375$ 'in  $m_{23} = \frac{40}{27} = 1.48148$ 'ten küçük olması nedeniyle Tablo 17'deki  $m_{24}$ 'ün aritmetik ortalamaya göre nasıl bulunduğunu inceleyelim.

Öncelikle  $m_{22}$  ve  $m_{24}$ 'ün aritmetik ortalaması

$$[254] \quad m_{23} = \frac{m_{22} + m_{24}}{2} = \frac{\frac{25}{16} + \frac{40}{27}}{2} = 1 \frac{451}{864} = 1; 31,19,10$$

dir ama kâtibin seçtiği değer şudur:

$$[255] \quad m_{23} = \frac{3}{2} = 1 \frac{1}{2} = 1; 30.$$

Çünkü

$$[256] \quad m_{23} = \frac{m_{22} + m_{24}}{2} \Rightarrow m_{24} = 2m_{23} - m_{22} = 2 \cdot \frac{3}{2} - \frac{25}{16} = 1 \frac{7}{16} = 1; 26,15$$

değeri bir düzgün sayı olmadığından  $m_{24} = \frac{p_{24}}{q_{24}}$  oranındaki  $1 < q_{24} < 60$  için

$$[257] \quad q_{24} = \{2,3,4,5,6,8,9,10,12,15,16,18,20,24,25,27,30,32,36,40,45,48,50,54\}$$

düzgün sayısına karşılık  $p_{24}$  düzgün sayısını bulmamız gerekiyor.

Buna göre  $p_{24}$  için ilkin

$$[258] \quad p_{24} = 1 \frac{7}{16} q_{24} = \left\{ 2 \frac{7}{8}, 4 \frac{5}{16}, 5 \frac{3}{4}, 7 \frac{3}{16}, 8 \frac{5}{8}, 11 \frac{1}{2}, 12 \frac{15}{16}, 14 \frac{3}{8}, 17 \frac{1}{4}, 21 \frac{9}{16}, 23, 25 \frac{7}{8}, 28 \frac{3}{4}, 34 \frac{1}{2}, 35 \frac{15}{16}, 38 \frac{13}{16}, 43 \frac{1}{8}, 46, 51 \frac{3}{4}, 57 \frac{1}{2}, 64 \frac{11}{16}, 69, 71 \frac{7}{8}, 77 \frac{5}{8} \right\} \\ = \{2; 52,30,4; 18,45,5; 45,7; 11,15,8; 37,30,11; 30,12; 56,15,14; 22,30,17; 17,21; 33,45,23,25; 52,30,28; 48,34; 30,35; 56,15,38; 48,45,43; 7,30,46,51; 45,54; 30,1,4; 41,15,1,9,1,11; 52,30,1,17; 37,30\}.$$

sonuçları bulunur ve bu değerlere en yakın

$$[259] \quad p_{24} = \{3,4,6,8,9,12,12,15,18,20,24,25,30,36,36,40,45,45,50,54,64,72,72,75\}.$$

düzgün sayılar belirlendikten sonra  $m_{24}$  için  $(p_{24}, q_{24})$  çiftlerinin oranlarından şu sonuçlar elde edilir:

$$[260] \quad m_{24} = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{6}{4}, \frac{8}{5}, \frac{9}{6}, \frac{12}{8}, \frac{12}{9}, \frac{15}{10}, \frac{18}{12}, \frac{20}{15}, \frac{24}{18}, \frac{25}{20}, \frac{30}{24}, \frac{36}{30}, \frac{36}{25}, \frac{40}{30}, \frac{45}{32}, \frac{45}{36}, \frac{50}{40}, \frac{54}{45}, \frac{64}{50}, \frac{72}{54}, \frac{72}{48}, \frac{75}{54} \right\} \\ = \{1; 30,1; 20,1; 30,1; 36,1; 30,1; 30,1; 20,1; 30,1; 30,1; 20,1; 30,1; 30,1; 20,1; 30,1; 23,20,1; 30,1; 30,1; 26,24,1; 28,53,20,1; 30,1; 24,22,30,1; 23,20,1; 21,1; 25,20,1; 30,1; 26,24,1; 23,20\}.$$

Şimdi bu sonuçları küçükten büyüğe doğru sıralarsak

$$[261] \quad 1; 20 = 1; 20 = 1; 20 < 1; 21 < 1; 23,20 = 1; 23,20 = 1; 23,20 < 1; 25,30 < 1; 26,24 = 1; 26,24 < 1; 28,53,20 < 1; 30 \\ = 1; 30 = 1; 30 = 1; 30 = 1; 30 = 1; 30 = 1; 30 = 1; 30 = 1; 30 = 1; 30 < 1; 33,45 < 1; 36 \\ \frac{4}{3} = \frac{4}{3} = \frac{4}{3} < \frac{27}{20} < \frac{25}{18} = \frac{25}{18} = \frac{25}{18} < \frac{45}{32} < \frac{64}{45} < \frac{36}{25} = \frac{36}{25} < \frac{40}{27} < \frac{3}{2} = \frac{3}{2} = \frac{3}{2} = \frac{3}{2} = \frac{3}{2} = \frac{3}{2} = \frac{3}{2} = \frac{3}{2} = \frac{3}{2} = \frac{3}{2} < \frac{25}{16} < \frac{8}{5}.$$

sıralamasında orta noktanın sol tarafında kalan oranın şu olduğu sonucu çıkar:

$$[262] \quad m_{24} = 1; 28,53,20 = \frac{40}{27}.$$

**4.6.1. Sonuç.** MÖ 1822'de kâtip Larsa'da Plimpton 322 no'lu tabletindeki ya da Tablo 17'deki dik üçgenlerin  $n = 0,1,2, \dots, 15$  için  $m_n = \frac{p_n}{q_n}$  oranındaki  $1 < q_n < 60$  düzgün sayılarına göre  $p_n$  düzgün sayılarını bulurken  $m_0, m_1, m_2, \dots, m_{15}$  oranlarında yukarıda anlattığım şekilde aritmetik ortalamayı kullanmış gözükür ama "4.2.2. Babilonya Seçme Metodu" iskemleden kalkıp konforlu koltuğa oturmaya benzer. Çünkü Larsalı kâtibin aritmetik ortalamaya göre  $p_n$  ve  $q_n$  doğuranlarını hesaplarken çektiği eziyet metodumda açık bir şekilde görülmektedir. **Hammurabi** görseydi bana kesin altından yapılmış bir madalya takardı. **Hammurabi** gerçek gücün kılıçtan değil adaletten geldiğine inanıyordu ve bunun için 282 maddelik [bir dikilitaş](#) yaptırtıp Babil'in dört bir yanına koydurttu. Girişte bu kanunları kendisine güneş tanrısı **Şamaş**'ın yazdırttığını söyledi!