
Sherlock Holmes'e Karşı Cingöz Recai: Cingöz Recai Babil'de
D. PAMUKTULUM 2006

Önsöz

Bu makaleyi Mayıs-Ağustos 2006'da yazdım ama ağırlık 2006 yazındadır. Notere onaylattığım dosyamın özellikleri özetle şöyledir:

"*Sherlock Holmes*'e Karşı *Cingöz Recai*: *Cingöz Recai* Babil'de" Dosyasının Orijinali	
Özellik	**Değer**
Açıklama	
Başlık:	"Çatalhöyük Tableti" ve "Plimpton 322 No'lu Tablet" Adlı Antik Matematiksel Astronomi Tabletlerinde ***Mathquake***'in Dedektiflik Çalışması, ***Mathquake***-2006
Kaynak	
Yazarlar:	Mathquake (***Peyami Safa***'nın "Server Bedi" takma adındaki gibi takma adım)
Son Kaydeden:	Mathquake
Düzeltme Numarası:	43
Programın Adı:	Microsoft Office Word
Şirket:	Giza Piramitleri
İçerik Oluşturma:	14.07.2006, 03:57
Son Kaydetme:	17.07.2006, 10:34
Son Yazdırma Tarihi:	17.07.2006, 10:15
Toplam Düzenleme Süresi:	22:08:00
İçerik	
Sayfa:	86
Sözcük Sayımı:	24042
Karakter Sayısı:	137044
Satır Sayımı:	1142
Paragraf Sayımı:	
Dosya	
Ad:	AMAT-Noter.doc
Tür:	Microsoft Word 97-2003 Belgesi
Oluşturma Tarihi:	14.07.2006, 03:57
Değiştirme Tarihi:	17.07.2006, 10:34:35
Boyut:	7.93 MB
Format:	A4

Şimdi bu dosyada olup bitenleri anlayabilmeniz için başa dönmem gerekiyor. 2000'in başında internette bedava site veren http://members.lycos.co.uk'dan bedava bir hosting almıştım ve orada matematikle ilgili bilimsel araştırmalarımın sonuçlarını yayımlıyordum. 2006'da eski Babil tabletlerinde çalışırken bunlardan YBC 7289 no'lu tabletine ilişkin çalışmamı *"Hesabın Destanında İlk Gerçek Algoritma: YBC 7289 no'lu Tabletindeki Babil Algoritması, 1. Baskı: 20.04.2006, 17:00:00"*'da yayımladım (ki orijinal linki http://members.lycos.co.uk/gizapyramids/YBC7289/index.html idi). Daha sonra Plimpton 322 no'lu tablet hakkında araştırmalarıma başladım ve bu tabletin deşifresi zor olduğundan, çalışmalarıyla birlikte birçok eski Babil tabletini incelemek zorunda kaldım.

Siberalem'de Bilimsel Araştırma Yapmak!

O sırada www.siberalem.com sitesindeki "Mısır Piramitleri" adlı bir grup kurmuştum ve oradan da araştırma sonuçlarımı canlı yayımlıyordum (ki www.siberalem.com bir arkadaş bulma sitesiydi ama ne yaparsınız ki, o sıradaki imkânsızlıklar adama tavuğu çiğ çiğ yediriyordu). Bu grupta Plimpton 322 no'lu tablet için en son şu mesajlarımı yayımlamıştım:

804	Plimpton 322´de ŞOK!!! ŞOK!!! ŞOK!!! (1) Arkadaşlar Plimpton 322 no´lu ...	Mathquake	05/05/06 20:00
805	Plimpton 322´de ŞOK!!! ŞOK!!! ŞOK!!! (2) Kenarlarının uzunlukları birer...	Mathquake	05/05/06 20:01

İşte tam bu şokları arka arkaya yaşarken bulgularımla ilgili internette araştırma yapıyordum ve 07.05.2006'da son derece ilginç bir makaleye tesadüf ettim: "*Mathematics in Search of History*". Bu makalenin orijinali "*Mathematics in Search of History*"dedir ama şimdi kaldırılmıştır!

Bu makaledeki tablete keşfedildiği yer nedeniyle "Çatalhöyük Tableti" adını verdim ve makalemin 3. Bölümü'nde inceledim. Tabii ki böyle bir şey ilk kez başıma geldiğinden bir şok daha geçirdim ve bu şaşkınlık içinde ilkin grubumuzda tabletimiz hakkındaki bilgilendirici

806	Yine Bir Mathquake Şoku: Pisagor Teoremi için Yeni Bir Tablet (Bu tablet yurdumuzda keşfedildi!)-1 Türkiye´nin güneyindeki Neolit...	Mathquake	07/05/06 04:21
807	Yine Bir Mathquake Şoku: Pisagor Teoremi için Yeni Bir Tablet-2 Uyarı: 1) Herhalde yurdumuz...	Mathquake	07/05/06 04:38

mesajımlarımı yayımladıktan sonra gün boyu internetten araştırma yaptım. Sonuç, nafile. Ben de zorunlu olarak "*Mathematics in Search of History*" makalesindeki bilgilerden hareketle, ki *"Plimpton 322 no'lu tablet" örnek verilerek tabletimizdeki dik üçgenler için "Ne yazık ki Pisagor üçlülerinin bir sıralı koleksiyonu ya da bir rastgele koleksiyonu olup olmadığını anlamak için tablete çalışamadık. Tabletin 3'te 1'lik kayıp kısmı olan alt tarafındaki girişleri tanımlayamadık!"* bilgileri harekete geçmem için yeter nedenlerdi, tabletimizle ilgilenmeye başladım ve Plimpton 322 no'lu tableti için oluşturduğum MATHSCAN analizini (bir analiz yöntemi) tabletimize de uyguladığımda derhal çözüme eriştim, çünkü çözüm yüzeydeydi!

Bu müjdeli haberi derhal

810	ŞOK´un Babası: Alt tarafı kayıp tablet deşifre edildi! (0 Cevap) Evet, arkadaşlar. Son mesajlar...	Mathquake	07/05/06 17:49

mesajıyla grubumuza ilettikten sonra daha rahat bir ortamda okuyabilmeleri için şu son mesajımı yayınladım:

811	Yine Bir Mathquake Şoku: Pisagor Teoremi için Yeni Bir Tablet (Bu tablet yurdumuzda keşfedildi!) Pisagor Teoremi İçin Yurdumuzda Keşfedilen Yeni Bir Tablet'in Deşifresi…	Mathquake	07/05/06 19:00

Bu mesajdan sonra kendi web sitemde "***Yurdumuzda Keşfedilen 'Pisagor Teoremi'ne Ait Matematiksel Bir Tablet, Mathquake, 08.05.2006, 20:45:00***" başlığıyla bir duyuru yaptım ve sonra "*Plimpton 322 no'lu Tableti İçin Mathquake Deşifrasyonları-1, Mathquake, 27.05.2006, 22:00*" (ki orijinal linki http://members.lycos.co.uk/gizapyramids/Plimpton322/1/index.htm idi) ve "*Plimpton 322 no'lu Tableti İçin Mathquake'in İnanılmaz Tahmini, Mathquake, 08.06.2006, 23:00*" (ki orijinal linki http://members.lycos.co.uk/gizapyramids/Plimpton322/2/index.htm idi) çalışmalarımı yayımladım. Şimdi bu çalışmalar aşağıdaki makalemin Bölüm 1'inde mevcuttur.

Donald T. Barry ile Yazışmalarım!

Söz konusu "*Mathematics in Search of History*" makalesinde Çatalhöyük tableti için verilen adresin sırıtması nedeniyle bu makalenin bir senaryo olduğu açıktı ve bu yüzden makalenin sahibi ***Donald T. Barry***'e 15.07.2006, 00:48:56 günü 2 soruluk bir mesaj göndermiştim. Ama Çatalhöyük tabletini bu tarihten, dolayısıyla ***Donald T. Barry***'nin bana gönderdiği mesajdan çok daha önce çözdüğümden 3. bölümde yer alan Çatalhöyük tableti hakkındaki değerlendirmemi değiştiremedim ve öylece kaldı. O mesajda ***Donald T. Barry***'den tabletin keşfedildiği yer hakkında bilgi istemiştim (ki adres her ne kadar absürt de olsa Türkiye'deki resmi makamlardan izin alınması gerekiyordu, çünkü yanlış anlaşılmalara neden olabilir. Ama Amerikalılar 28.09.2006, 17:23 tarihli "*NATO'da 'bölünmüş Türkiye' haritası*"ndan gördüğünüz gibi böyle şeylere pek takmıyorlardı) ve "*Mathematics in Search of History, Donald T. Barry, Vol. 93, No. 8, P. 647-650, November 2000*" makalesinden gördüğünüz üzere Amerikan Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi tarafından hazırlanan bir yarışma için bir grup öğrencisi tarafından yürütülen çalışmada Amerikan Bölgeler Matematik Ligi'nde Problem Yazma Kürsüsü'nde başkanlık yaptığı ve Phillips Akademisi'nde matematik öğretmenliğinden (Andover, MA 01810, dbarry@andover.edu) önce 7 yıl Tarsus'taki Amerikan Koleji'nde ve Robert Kolej'de matematik öğretmenliği yaptığı için böyle bir egzersiz verdiğini söyledi. Yarışma için hazırlanan egzersiz şu idi: 3'te 2'si mevcut olan aşağıdaki Resim 1'deki tabletin kayıp olan 3'te 1'inde neler yazıyordu? Hatırladığım kadarıyla o mesajımda ***Donald T. Barry***'e tableti tamamen çözdüğümü söyleyince yanıt mesajında çok şaşırdığını söylemişti!

TÖRE Dergisinin Eylül 2006 Sayısı Toplatıldı!

Bu bölümdeki değerlendirmelerim, ***Donald T. Barry***'nin makaledeki beyanlarını esas alarak tamamen iyi niyetle değerlendirmemden gelir. Bu nedenle makaledeki tablet her ne kadar bir senaryo gereğince oluşturulmuş olsa da Ön-Türkçe uzmanı olan ***Kâzım MİRŞAN***'dan yardım istedim. Bu, o kadar iyi bir senaryoydu ki, tabletteki sembolleri Köktürkçe uzmanlarına (ki o sırada ***Kazım Mirşan*** ile yazışmalarım olmuştu) gösterdiğimde onlar bile bu tabletin gerçek olduğunu sandılar. Çünkü tabletlerdeki yazıt, kayıp bir uygarlığın yazısıydı ve Amerikalıların yaptıkları araştırmaya göre "*O, belki tüm Hint-Avrupa dillerinin anası idi*" sonucu çıkmış. Fakat ***Atatürk***'e göre bu tabletin bulunduğu yer, Anadolu en aşağı 7000 yıllık Türk yurdu olduğuna göre, tabletteki yazıt bir Ön-Türk uygarlığına işaret ediyor gibiydi. ***Kazım Mirşan***, tabletteki yazıtın Runik Türk alfabesi olduğunu tespit etti.

TÖRE (Türkçe Düşünenlerin Dergisi) dergisi yetkilileri, Bölüm 3'teki çalışmayı ***Kazım Mirşan***'ın aracılığıyla benden istedi ve Eylül-2006 sayısında yayınladı. Fakat bu çalışma dergide yayınlandıktan sonra toplatıldı (ki daha sonra dergi yetkileriyle görüştüğümde, Eylül-2006 sayısına ve ilgili tüm materyallere el konulduğunu söylemişlerdi) ve bu arada bana da bir operasyon çekildi. Ortada bir casus vardı ama o biz değildik!

Bu çalışma hakkında şu linklere bakabilirsiniz:

1. https://www.turk.org.au/catalhoyuk-tabletindeki-yazi-turkcedir/
2. https://ekitap.link/details?no=42725&c=50513
3. https://fr.scribd.com/document/263415542/catalhoyuk-tableti

20. Yıl Dönümüne Hazırlık!

Yukarıdaki ilk tablodaki dosya orijinalde A4 formatında, 86 sayfa ve boyutu 7.93 MB olan bir Microsoft Word 97-2003 belgesidir (ki bunu noterde onaylatmıştım) ve 17.06.2025, 00:11:07'de Microsoft Office Professional Plus 2024 belgesi olarak A3'te yeniden düzenlediğimde sayfa sayısı 47'ye ve boyutu 3.02 MB'a düştü. Bu dosyayı 17 Haziran 2025 Salı, 00:11:07-26.07.2025, 03:51:43 tarihleri arasında yeniden düzenlemem nedeniyle (ki bunun için web sitemde 23.06.2025 tarihinde "*Plimpton 322 No'lu Tabletin Çözümünün Tanıtımı*"nı yapmış ve 31.07.2025, 01:06-29.08.2025, 21:18 tarihleri arasında *Testo 5.6* ve *Tavole 5.6* (bkz. "*Khafre Piramiti'nin Yeni Planı*") ile Bonus (bkz. "*Bonus*") adlı çalışmalarımı yapmıştım) ***Donald T. Barry***'ye 18.06.2025, 17:22'de "*About An Old Message!*" başlıklı

"Good afternoon Donald T. Barry. I sent you the following e-mail in 2006, but I have difficulty remembering the message you sent me. If you can remember, how did you answer the 2 questions in my message below? As a colleague, the answers to these questions are very important to me.

*To **Mr.Donald T.Barry**,*

I have read and evaluated your article which is about "Mathematics Teacher, Mathematics in Search of History, November 2000, Volume 93, Issue 8, Page 647". But I have some questions about your article. I hope you will reply my questions as your colleague.

1) You pointed out that old clay tablet was found in Neolithic village of Çatalhöyük. But when we searched, we have found out that the places like "Olmazköy" and "İmkansızdere" are not existent. Consequently, this address which is given to you is not correct. Would you give information about tablet? For example, discovery date of tablet, the date of the address that was sent to you, who discovered and gave this address, information about your study group.

2) You also mentioned about mathematical tablet. According to this in your article, one of the characters in tablets that have been shown in figure 1 equal to twelve, could be found from logical derivation and also can be exist in other tablets. In addition, when we take into consideration not to be existent of one third of tablet that you had just estimated the place of loss fragment in somewhere in the cavern, Is it possible for you to send facsimile and the pictures of inscription in other tablets. Because It is likely that the inscription to be used in tablet must have been used in other tablets.

20. YIL DÖNÜMÜNE ÖZEL

Önsöz

I thank you for giving information honestly and telling the truth about the discovery place (Çatalhöyük but the address is not correct). I'm waiting your reply as soon as possible. I wish you success in your studies.

Sincerely, ***Derya PAMUKTULUM***"

e-postasını gönderdiğimde 17:23'te

"Delivery has failed to these recipients or groups:

dbarry@andover.edu

The email address you entered couldn't be found. Please check the recipient's email address and try to resend the message. If the problem continues, please contact your email admin."

şeklinde geri döndü ve bunun nedenini araştırdığımda ***Donald T. Barry***'nin 2017'de öldüğünü öğrendim (Bkz. "*Donald Thomas "Don" Barry Obituary*").

Özetle burada söz konusu olan Çatalhöyük tableti Plimpton 322 no'lu tableti için sadece bir alıştırmaydı. Buna göre Bölüm Bölüm 2'yi tetikledi ve Bölüm 3 bunlardan ayrı olarak Bölüm 4 için sadece bir egzersiz olarak kaldı. Bölüm 1 ve 2'deki hiçbir modern metotların hiçbirisi Bölüm 4'teki Plimpton 322 no'lu tabletin çözümüne neden olmadı. Aranılan çözüm 06.08.2006, 01:00'da *"Babillilerin Seçme Metodu"* ile ortaya çıktı ve bu metoda göre 2 bölümde tabletteki 15 dik üçgen, hatta 46. sayfadaki Tablo 17'deki 38 dik üçgen sıralı bir şekilde elde edildi!

Muhtemel Kayıp Dik Üçgenler (!)

Dr. ***Eleanor Robson***, Tablo 17'de mevcut olmayan dik üçgenleri *"Muhtemel Kayıp Dik Üçgenler (Possible Missing Lines in Plimpton 322)"* olarak ilân eder ama bu dik üçgenleri veren sıralı üçlüler *"Babilonya Seçme Metodu"*na göre q'nun $1 < q < 60 = 1{,}0$ aralığında değil minimum $1 < q < 300 = 5{,}0$ aralığında ortaya çıkarlar!

Buna göre ***Eleanor Robson*** tarafından verilen

$$(1)\quad p_{8,9} = 135, q_{8,9} = 64$$

doğuranlarını göz önüne alırsak

$$(2)\quad \begin{cases} a_{8,9} = p_{8,9}^2 - q_{8,9}^2 = 135^2 - 64^2 = 14129 = 3,55,29, \\ h_{8,9} = 2p_{8,9}q_{8,9} = 2 \times 135 \times 64 = 17280 = 4,48,0, \\ r_{8,9} = p_{8,9}^2 + q_{8,9}^2 = 135^2 + 64^2 = 22321 = 6,12,1 \end{cases}$$

dik üçgeni elde edilir ve bu dik üçgenin eğim açısı

$$(3)\quad \theta_{8,9} = Tan^{-1}\left(\frac{a_{8,9}}{h_{8,9}}\right) = Tan^{-1}\left(\frac{14129}{17280}\right) = 39^{\circ}16'16''$$

olarak bulunur ki, bu dik üçgen tablette 8. ile 9. satırların arasına girer:

n	p_n	q_n	a_n	h_n	r_n	θ_n
8	32	15	799	960	1249	$39^{\circ}46'13''$
	135	64	14129	17280	22321	$39^{\circ}16'16''$
9	25	12	481	600	769	$38^{\circ}43'05''$

Bu tabloya göre dik üçgenlerin ardışık eğim açılarının farklarına ilişkin tablo da şu şekilde ortaya çıkar:

n	$\nabla(\theta_n)$
8	$39^{\circ}46'13'' - 39^{\circ}16'16'' = 0^{\circ}29'57''$
9	$39^{\circ}16'16'' - 38^{\circ}43'05'' = 0^{\circ}33'11''$

Gerçekten de İnterpolasyon metoduna elverişli bir şekilde yazılan 8. ve 9. satırlardaki dik üçgenlerin eğim açılarının aritmetik ortalaması (Orta Nokta Bulma Problemi'nden)

$$(4)\quad \frac{38^{\circ}43'05'' + 39^{\circ}46'13''}{2} = 39^{\circ}14'39''$$

olup, ardışık fark açısı 1 ila 2 dakika arasında olan dik üçgenlerin hep bu düşünceye göre yazıldığını kanıtlayan güzel bir örnek olarak karşımıza çıkmaktadır. Ve şüphesiz böyle bir açı söz konusu olduğunda 8. ve 9. satırlardaki dik üçgenlerden kolaylıkla buna ulaşabiliyordu!

Yine ***Eleanor Robson*** tarafından keşfedilen bir başka kayıp dik üçgen (!) için

$$(5)\quad p_{12,13} = 256, q_{12,13} = 135$$

doğuranlarını göz önüne alırsak

20. YIL DÖNÜMÜNE ÖZEL

$$(6)\quad \begin{cases} a_{12,13} = p_{12,13}^2 - q_{12,13}^2 = 256^2 - 135^2 = 47311 = 13,8,31, \\ h_{12,13} = 2p_{12,13}q_{12,13} = 2 \times 256 \times 135 = 69120 = 19,12,0, \\ r_{12,13} = p_{12,13}^2 + q_{12,13}^2 = 256^2 + 135^2 = 83761 = 23,16,1 \end{cases}$$

dik üçgeni elde edilir ve bu dik üçgenin eğim açısı

$$(7)\quad \theta_{12,13} = Tan^{-1}\left(\frac{a_{12,13}}{h_{12,13}}\right) = Tan^{-1}\left(\frac{47311}{69120}\right) = 34^{\circ}23'27''$$

olarak bulunur ki, bu dik üçgenin de tablette 12. ile 13. satırların arasına girer:

n	p_n	q_n	a_n	h_n	r_n	θ_n
12	48	25	1679	2400	2929	$34^{\circ}58'34''$
	256	135	47311	69120	83761	$34^{\circ}23'27''$
13	15	8	161	240	289	$33^{\circ}51'18''$

Bu tabloya göre dik üçgenlerin ardışık eğim açılarının farklarına ilişkin tablo şu şekilde ortaya çıkar:

n	$\nabla(\theta_n)$
12	$34^{\circ}58'34'' - 34^{\circ}23'27'' = 0^{\circ}35'07''$
13	$34^{\circ}23'27'' - 33^{\circ}51'18'' = 0^{\circ}32'09''$

Gerçekten de İnterpolasyon metoduna elverişli bir şekilde yazılan 12. ve 13. satırlardaki dik üçgenlerin eğim açılarının aritmetik ortalaması

$$(8)\quad \frac{38^{\circ}58'34'' + 33^{\circ}51'18''}{2} = 34^{\circ}24'56''$$

olup, yine aynı bulgunun geçerli olduğu görülür.

Özetle **Robson**, *"Neither Sherlock Holmes nor Babylon: A Reassesment of Plimpton 322, 2001"* makalesinde (1)'deki doğuranları 197. sayfadaki (PDF'de 31. sayfa) tablodaki 2. satırda ve (5)'teki doğuranları aynı tablodaki son satırda verir ve aynı tablodaki diğer satırlardaki doğuranlar da *"Babilonya Seçme Metodu"*na göre $1 < q < 300$ aralığında sıralı bir şekilde elde edilirler (Bkz. Tablo 19). Şimdi Mathematica'da yazdığım bu programın ardından Tablo 17'yi de Mathematica'da doğruladım (Bkz. Tablo 17). Fakat Tablo 17'deki ilk 15 dik üçgeni veren ve Plimpton 322 no'lu tabletinde geçen doğuranları 35-46. sayfalarında elle doğrularken 16-40. satırlarındaki dik üçgenleri ***Manuel Benito Muñoz***'un *"Birkaç Diofant Problemi (Algunos problemas diofánticos)"* adlı makalesinin 9. sayfasındaki Tablo 1.2'den almıştım ama hesaplamamıştım. Ancak tahminim 1964'ten beri bilinen Tablo 1.2'nin doğru olduğuydu!

Bana göre Plimpton 322 no'lu tabletin değerlendirmesi çözümünden daha zor oldu: 9 maddede 22 sayfa. Bu, makalemin yaklaşık 3'te 1'idir. Özellikle 8. Maddede dik üçgende metrik bir bağıntı olarak bilinen "Pisagor Bağıntısı"nı ya da "Pisagor Teoremi"ni diğer kaynaklarda görülmesini araştırırken Osmanlı ve Cumhuriyet dönemlerinde karşılaştırmalı araştırma sonuçları beni derinden etkiledi. Yani **Robson**'un, makalesinin başlığında *"Ne Sherlock Holmes ne de Babil: Plimpton 322'nin Yeniden Değerlendirilmesi (Neither Sherlock Holmes nor Babylon: A Reassesment of Plimpton 322)"* dediği gibi her şeyi bir kenara bıraktım ve kendi derdimizin peşine düştüm. ***Atatürk***'ün Pisagor Teoremi'ni Osmanlıcadan Türkçeye çevirirken büyük bir gayret sarf etmesi ve bunu *"Geometri"* kitabına koyması şapka çıkartılacak cinstendi ve ***Atatürk***'ün çalışmasını Şekil 14'te günümüz Türkçesiyle tekrar ele aldım. Ona göre *"bir dik üçgende dik kenarların üzerlerine kurulu karelerin alanlarının toplamı, çapın üzerindeki karenin alanına eşittir"* ve bu ifade TDK Başuzmanı ***Agop Dilaçar***'a göre Türkçe olarak tamamen doğrudur!

"Çap" Teriminde Osmanlıca-Türkçe Karşılaştırma

Osmanlıcada bir dik üçgende dik açının karşısında bulunan kenara "1. Veteri kaime" ya da "2. Kaim veter" deniliyordu. "Kaim" en temel anlamda namazdan bilindiği üzere "ayakta duran" ya da "ayakta bulunan" demektir ve geometride "Zâviye-i kaime: Dik açı", "dıl'ı kaim: Dik kenar" iken "Veter" en temel anlamda "kiriş" demektir ve geometride de bu şekilde geçer. Her 2 kelimeyi birleştirdiğiniz zaman "dik kiriş" ya da en iyi bilinen şekliyle "hipotenüs" anlamına gelir ki, ***Atatürk***, buna "dikeyin çapı" demiştir. Aslında sadece "çap" demek de yeterliydi ve nitekim ***Atatürk***, Şekil 13'te bir üçgen çizdikten sonra hipotenüsün üzerine "Ç. K." Yani "Çapın Karesi" diyerek zaten bunu bildiğini gösteriyor. Yani Osmanlı döneminde "hipotenüs" yerine sadece "çap" bile deseniz, bu, "1. Veter-i kaime" ya da "2. Kaim veter"den daha açık bir anlam taşımaktaydı. Bu noktada ***Agop Dilaçar***, şu bilgiyi verir: "*Pedagojide bir gerçek var: Fikir yolunun açık olması, bir ipucunun bulunması lazımdır. Yoksa bir külçe gibi çöker.*" Bu ipucu ta Babil döneminden kalma *"çapı gören çevre açı diktir"* bilgisidir ve üçgende buna karşılık gelen kenar "çap" olmaktadır. ***Atatürk***, bu yoğurmayı Yunanca, Osmanlıca, Fransızca ve Türkçe dilleri arasında yaptı ve buna "çap" yerine "dikeyin çapı" dedi. Bu nedenle ***Peyami Safa***, *"Osmanlıca-Türkçe-Uydurmaca"*'da terim rezaletini dile getirirken aslında Osmanlıcadaki uydurmacayı dile getiriyordu. Çünkü sorun orada başlamıştı ama bu matematik terimini düzeltmek bir edebiyatçının işi değildi. ***Atatürk***'ün ölümünden sonra, 1939'da "Türk Hümanizmi" kültür politikaları gereğince Batıya entegre olabilmek için "hipotenüs" terimi kullanılmaya başlandı ve bu kullanım günümüze kadar ulaşmıştır. Bana göre bunun dışında bir art niyet aramak doğru değildir. Eğer bu terimi en iyi şekilde ifade etmeye çalışırsak ***Peyami Safa***'nın *"Cingöz Recai"* romanındaki gibi Doğu ile Batıyı aynı vücutta buluşturmak gerekir ki, bu da imkânsızı istemek gibi bir şey olur.

Sherlock Holmes'e Karşı *Cingöz Recai*: *Cingöz Recai* Babil'de

Makalemin orijinal başlığı *"Antik Matematiksel Astronomi Plimpton 322 No'lu Tableti & Çatalhöyük Tabletinde Mathquake'in Dedektiflik Araştırması, 2006"* idi, çünkü makaledeki bulgular ***R. Creighton Buck***'ın 1980'de yayımladığı *"Sherlock Holmes Babil'de (Sherlock Holmes In Babylon)"* makalesindeki gibi esaslı bir dedektiflik araştırması gerektiriyordu. Bunun Türkçedeki karşılığı ***Peyami Safa***'ya göre *"Cingöz Recai Babil'de"* olmalıdır ve makalemin başlığını buna göre değiştirdim. Buna bir edebiyat romanı değil matematik romanıdır, diyebiliriz. Hesapta ***Peyami Safa***'nın 16. kitabına karşılık gelir!

20. YIL DÖNÜMÜNE ÖZEL

Önsöz

Cingöz Recai, ***Peyami Safa***’nın ***“Server Bedi”*** adı altında yazdığı ve ***Arsen Lüpen***’den esinlenmiş olduğu hırsız karakteridir. ***Cingöz Recai***; yakışıklı, kurnaz, cesur, soğukkanlı, zarif, tahsilli, görgülü, cömert ve kibar bir serseridir. Maceralarında “helal” para kazanmış kimselere dokunmaz, haksız yolla servet sahibi olmuş kimselerden hile ile para çalar, elde ettiklerini muhtaçlara dağıtır. ***Cingöz Recai*** bu yönüyle ***Robin Hood***’a benzer!

1928’de yayımlanan *“Sherlock Holmes’e Karşı Cingöz Recai”* 15 kitaplık serisinde ***Homi Bhabba***, ***René Girard*** ve ***Fredric Jameson***’un taklit ve orijinal ilişkisine dair yaklaşımlar mevcuttur. ***Cingöz Recai***, Türk edebiyatında taklit ve orijinal ilişkisine farklı bir yaklaşım getirmiştir. Bu yaklaşımda yazarın kahramanı üzerinden ortaya koyduğu strateji bir taraftan Doğu-Batı meselesini gündeme getirirken diğer taraftan taklit ve orijinal ilişkisini sorgulamaya açar.

Bu serideki 6. kitabın orijinali şöyledir:

Peyami Safa’nın ***“Server Bedi”*** mahlasıyla (takma adıyla) Osmanlıca *“**Sherlock Holmes**’e Karşı **Cingöz Recai**”* serisinden *“Ateşten Gözler”*, İstanbul Gündoğdu Matbaa ve Kütüphanesi, 1928, 16 sayfa.

Peyami Safa Arapça Yazıyor, Türkçe Konuşuyordu!

Peyami Safa’nın 1925’te yayımladığı *“Cingöz’ün Esrarı”* adlı romanı notlandırılarak yeni harflere aktarılırken ***Didem Ardalı Büyükarman***’ın şu tespiti bunu doğrular (Bkz. *“Cingöz’ün Esrarı”*, S. 9, son paragraf): *“Cingöz’ün Esrarı romanını Yıldız Teknik Üniversitesi Türk Dili ve Edebiyatı Bölümü 4. sınıf öğrencilerinden **Süheyla Ağan** ile birlikte hazırladık. Kendisi lisans öğrencilerinde az bulunur azim ve titizlikle bu işe sarıldı. Eseri önce Osmanlıca aslından Latin alfabesine aktarıp karşılıklı okumalarla kontrolünü yaptık. Daha önceki baskıların aksine herhangi bir sansüre ya da sadeleştirmeye yeltenmeden orijinal haliyle Latin alfabesine aktardık.”*

Film endüstrisinde 1954 yapımı *“Beyaz Cehennem/Cingöz Recai”* adlı filmin yönetmeni ***Metin Erksan***, ***Cingöz Recai*** karakterini canlandıran oyuncu ***Turan Seyfioğlu***’dur. 1969 yılında çekilen *“Cingöz Recai”* filminde ***Ayhan Işık***, ***Mehmet Rıza*** karakterini ***Abdurrahman Palay*** canlandırmıştır. Ve 2017’de *“Cingöz Recai: Bir Efsanenin Dönüşü”* filminin yönetmenliğini ***Onur Ünlü*** üstlenmiş ve ***Cingöz Recai*** karakterini ***Kenan İmirzalıoğlu*** oynamıştır. Makalemin kapağına ***Cingöz Recai*** karakteri ***Sherlock Holmes***’deki (kasketli ve pipolu. Bkz. *“Sherlock Holmes In Babylon”*, ön kapak) gibi belli bir sureti olmadığından, ki binbir surat olduğu bilinmektedir, ***Kenan İmirzalıoğlu***’nun ***Sherlock Holmes***’i andıran (kasketli ve purolu) fotoğrafını koydum!

D. PAMUKTULUM, 12.03.2026, 23:19.

İçindekiler

DERYA PAMUKTULUM
Dijital olarak imzalayan DERYA PAMUKTULUM
Tarih: 2026.03.24 14:11:29 +03'00'

1. Rasyonel Kenarlı Dik Üçgenlerle Trigonometrik Cetvelin İnşası İçin Bir Metot. Karmaşık sayılar düzleminde $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Q}^+$ için öyle $x_1 + y_1 i$ ve $x_2 + y_2 i$ karmaşık sayıları vardır ki $N(x_1 + y_1 i) = z_1$ ve $N(x_2 + y_2 i) = z_2$ olacak şekilde $z_1, z_2 \in \mathbb{Q}^+$ mevcut olduğundan bu karmaşık sayıların normlarından

$$[1] \quad \begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 = z_1^2, \\ x_2^2 + y_2^2 = z_2^2 \end{aligned}$$

denklem sistemi ve bu kompleks sayıların çarpımının normundan da

$$[2] \quad (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 + (x_1 x_2 + y_1 y_2)^2 = (z_1 z_2)^2 = z_1^2 z_2^2 = (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)$$

özdeşliği ortaya çıkar. Bu özdeşliği ilkin İskenderiyeli ***Diofant***'ın "*Arithmetica (Aritmetik)*" adlı eserinde görüyoruz ama, ***Heron***'un "*Metrica*" adlı eserinde olduğu gibi, bu eserde geçen "*Diofant Denklemleri*"nin ilk kez kadim Babillilere ait tabletlerde görülmesi (ki bu özdeşliğin kullanıldığını gösteren Susa tabletleri mevcuttur) nedeniyle bir derlemeler kitabı olduğu anlaşılmaktadır. Daha sonra bu özdeşlik Sayılar Teorisi'nde "*Fermat'ın 2-Kare Toplamı*" olarak yer alır.

Öte yandan bu özdeşliği Vektör Cebri ile yorumlarsak $\vec{v_1} = (x_1, y_1, 0)$ ve $\vec{v_2} = (x_2, y_2, 0)$ vektörleri için şu özdeşlik geçerli olur:

$$[3] \quad \|\vec{v_1} \times \vec{v_2}\|^2 + (\vec{v_1} \bullet \vec{v_2})^2 = \|\vec{v_1}\|^2 \|\vec{v_2}\|^2 = (\|\vec{v_1}\|\|\vec{v_2}\|)^2.$$

Şu hâlde böyle bir trigonometrik cetvelin ilk satırında yer alan $a_1, h_1, r_1 \in \mathbb{Q}^+, a_1 < h_1$ için (a_1, h_1, r_1) dik üçgeni $a_0, h_0 \in \mathbb{Q}^+, a_0 > h_0$ için $\left(a_0, h_0, \sqrt{a_0^2 + h_0^2}\right)$ dik üçgeni tarafından

$$[4] \quad \begin{aligned} a_1 &= \|(a_0, h_0, 0) \times (h_0, a_0, 0)\| = \begin{vmatrix} a_0 & h_0 \\ h_0 & a_0 \end{vmatrix} = a_0^2 - h_0^2, \\ h_1 &= \|(a_0, -h_0, 0) \times (a_0, h_0, 0)\| = \begin{vmatrix} a_0 & -h_0 \\ a_0 & h_0 \end{vmatrix} = 2a_0 h_0, \\ r_1 &= (a_0, h_0, 0) \bullet (a_0, h_0, 0) = a_0 a_0 + h_0 h_0 = a_0^2 + h_0^2 \end{aligned}$$

olacak şekilde doğrulursa,

$$[5] \quad a_1^2 + h_1^2 = r_1^2$$

denklemine göre [2] özdeşliğinden

$$[6] \quad a_1^* = h_1^2 - a_1^2, h_1^* = 2a_1 h_1, r_1^* = r_1^2$$

için

$$[7] \quad {a_1^*}^2 + {h_1^*}^2 = {r_1}^4$$

yardımcı denklemi elde edilir ki, genel olarak trigonometrik cetveldeki ardışık dik üçgenlerin eğim açıları arasındaki farkların θ civarında seyretmesine neden olan asıl faktör, bu denklemden kaynaklanan dik üçgenin eğim açısıdır.

Şu hâlde trigonometrik cetveldeki $n = 1,2, \ldots$ için (a_n, h_n, r_n) dik üçgenlerinin bulunması problemi, [2] özdeşliği altında (a_1^*, h_1^*, r_1^2) dik üçgeniyle ardışık olarak diğer dik üçgenlere geçmeye dönüşür. Buna göre [2] özdeşliği altında (a_1, h_1, r_1) ve (a_1^*, h_1^*, r_1^2) dik üçgenlerinden

$$[8] \quad a_2 = \begin{vmatrix} a_1 & h_1 \\ a_1^* & h_1^* \end{vmatrix} = a_1 h_1^* - a_1^* h_1, h_2 = a_1 a_1^* + h_1 h_1^*, r_2 = r_1 . r_1^2 = r_1^3$$

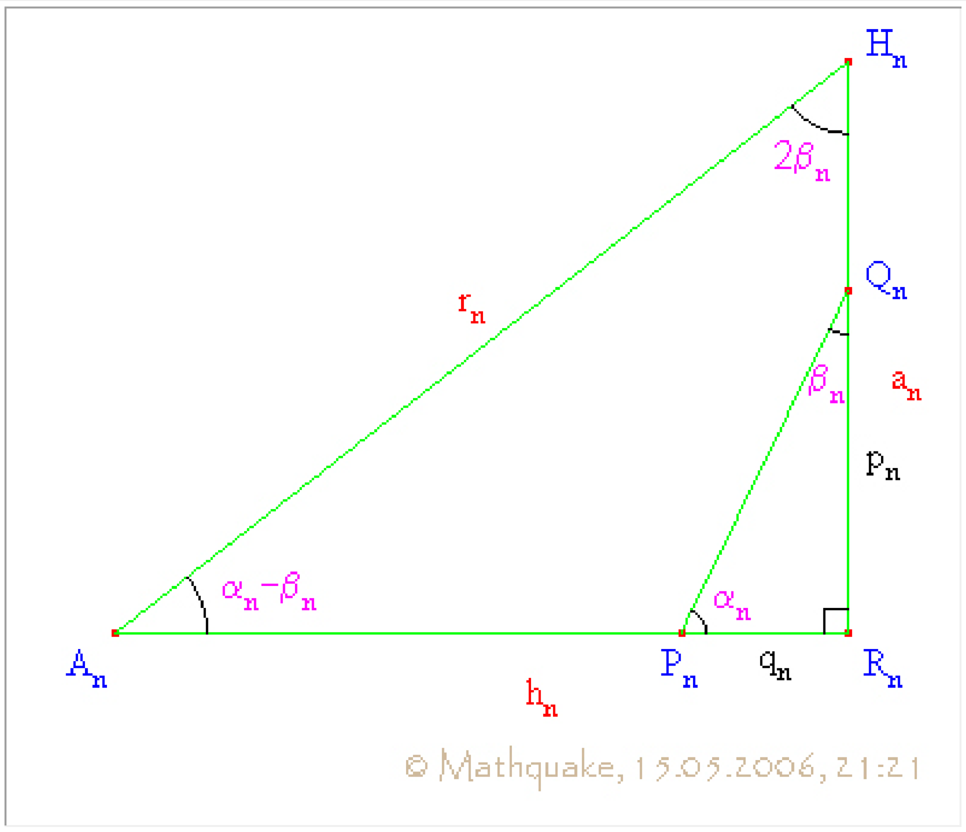
bağıntılarıyla $(a_2, h_2, r_2) = (a_2, h_2, r_1^3)$ dik üçgeni elde edilir ve genelde de MEM (Matematiksel Endüksiyon Metodu) gereğince (a_1^*, h_1^*, r_1^2) ve $(a_{n-1}, h_{n-1}, r_{n-1}) = \left(a_{n-1}, h_{n-1}, r_1^{2(n-1)-1}\right)$ dik üçgenlerinden

$$[9] \quad \begin{aligned} a_n &= \begin{vmatrix} a_{n-1} & h_{n-1} \\ a_1^* & h_1^* \end{vmatrix} = a_{n-1} h_1^* - a_1^* h_{n-1}, \\ h_n &= a_{n-1} a_1^* + h_{n-1} h_1^*, \\ r_n &= r_1^2 . r_1^{2(n-1)-1} = r_1^{2n-1} \end{aligned}$$

bağıntılarıyla $(a_n, h_n, r_n) = (a_n, h_n, r_1^{2n-1})$ dik üçgeni bulunmuş olur.

1.1. Babil Metodu. Görüldüğü gibi (a_n, h_n, r_n) dik üçgeni ilk doğuranları a_0 ve h_0 olmak üzere karmaşık bir yapıya sahiptir. Çünkü yukarıdaki metoda göre dik üçgenlerin devamlı suretle birbirinden doğrulması sonucunda $n + 1$-inci adımda (a_n, h_n, r_n) dik üçgeni elde edilmektedir. Oysa Plimpton 322 no'lu tabletle aynı döneme ait Susa Matematik Tableti'nden de kolaylıkla görüleceği gibi, (a_n, h_n, r_n) dik üçgeninin (p_n, q_n) doğuranlarıyla $\left(p_n, q_n, \sqrt{p_n^2 + q_n^2}\right)$ dik üçgeni tarafından doğurulduğu göz önüne alınırsa, bu durumda $\left(p_n, q_n, \sqrt{p_n^2 + q_n^2}\right)$ dik üçgeninden hareketle (a_n, h_n, r_n) dik üçgenine ulaşıldığında tepe açısının 2 katı alınmış olur. Böylece Plimpton 322 no'lu tableti 1945'te ilk kez okuyup "*Matematiksel Çivi Yazıtları (Mathematical Cuneiform Texts), New Heaven, Conn., 1945*" ortak çalışmasıyla tüm dünyanın dikkatini çeken ***Otto Neugebauer (1899-1990)*** ve ***Abraham Joseph Sachs (1914-1983)***'ın ortak tahmini, $m_n = Tan(\alpha_n) = \frac{p_n}{q_n}$ ve $m_n^{-1} = \left(\frac{p_n}{q_n}\right)^{-1}$ oranlarının (ki ***Neugebauer*** bunları $m_n =: \alpha$ ve $m_n^{-1} =: \overline{\alpha}$ olarak gösterir. Bkz. S. 41)

$$[10] \quad a_n^2 + h_n^2 = r_1^{2(2n-1)}$$



Şekil 1. Doğuran ile doğurulan dik üçgenler arasındaki geometrik ilişkiler.

denkleminden

$$a_n^2+h_n^2=r_1^{2(2n-1)} \Rightarrow 1=\underbrace{\frac{r_1^{2n-1}-a_n}{h_n}}_{=\frac{q_n}{p_n}}.\underbrace{\frac{r_1^{2n-1}+a_n}{h_n}}_{=\frac{p_n}{q_n}}$$

eşitliklerine göre

$$[11] \quad \frac{q_n}{p_n}=\frac{r_1^{2n-1}-a_n}{h_n},\ \frac{p_n}{q_n}=\frac{r_1^{2n-1}+a_n}{h_n}$$

şeklinde bulunmasıyla gerçekleşmiş olmaktadır. Burada (p_n,q_n) çiftine (a_n,h_n,r_1^{2n-1}) dik üçgeninin doğuranları denir ve (a_n,h_n,r_1^{2n-1}) dik üçgenine ait bileşenlerin (p_n,q_n) doğuranları cinsinden ifadeleri

$$[12] \quad a_n=p_n^2-q_n^2, h_n=2p_nq_n, r_1^{2n-1}=p_n^2+q_n^2$$

olarak elde edilirler ve bu doğuranlar arasında $q_n<p_n$ ilişkisi vardır. Aksi takdirde çözümden de görüleceği gibi, $p_n<q_n$ için $1<m_n^{-1}=\frac{q_n}{p_n}$ oranının 2. çarpan olarak alınması gerekir.

Şimdi (a_n,h_n,r_n) dik üçgeninin inşası için tutmuş olduğumuz bu yol tipik bir "*Babil Metodu*"dur. Çünkü bu yol, (a_n,h_n,r_n) dik üçgeninin inşasını $\left(m_n,1,\sqrt{m_n^2+1}\right)$ dik üçgeninin inşasına indirgemiş olmaktadır. Bu problem daha önce BM 34568 no'lu tablette ortaya atılarak çözülmüştür.

1.2. $\left(p_n,q_n,\sqrt{p_n^2+q_n^2}\right)$ Doğuran Dik Üçgeni İle (a_n,h_n,r_n) Doğurulan Dik Üçgeni Arasındaki İlişkiler

1. 2'ye Katlama Bağıntısı. Şekil 1'e göre $\left(p_n,q_n,\sqrt{p_n^2+q_n^2}\right)$ dik üçgenindeki tepe açısı olan β_n,

$$[13] \quad \beta_n=Tan^{-1}\left(\frac{q_n}{p_n}\right)\Rightarrow 2\beta_n=2Tan^{-1}\left(\frac{q_n}{p_n}\right)=Tan^{-1}\left(\frac{2p_nq_n}{p_n^2-q_n^2}\right)\overset{[12]}{=}Tan^{-1}\left(\frac{h_n}{a_n}\right)\Rightarrow 2\beta_n=Tan^{-1}\left(\frac{h_n}{a_n}\right)$$

şeklinde 2'ye katlanmış olduğundan (a_n,h_n,r_n) dik üçgeninin tepe açısı $\left(p_n,q_n,\sqrt{p_n^2+q_n^2}\right)$ dik üçgeninin tepe açısının 2 katı olarak elde edilir.

Diğer yandan

$$[14] \quad Tan^{-1}\left(\frac{a_n}{h_n}\right)+Tan^{-1}\left(\frac{h_n-a_n}{h_n+a_n}\right)=\frac{\pi}{4}$$

özdeşliğindeki

$$[15] \quad 2\beta_n=Tan^{-1}\left(\frac{h_n}{a_n}\right), \frac{-\alpha_n+3\beta_n}{2}=Tan^{-1}\left(\frac{h_n-a_n}{h_n+a_n}\right)$$

açıları bir kez daha 2'ye katlanırsa, ki bu durumda (a_n,h_n,r_n) dik üçgeninin tepe açısı 2'ye katlanmış olmaktadır, $\left(1,1,\sqrt{2}\right)$ ile (a_1,h_1,r_1) dik üçgenlerinin eğim açıları arasındaki fark,

$$[16] \quad \begin{aligned}&\frac{-\alpha_1+3\beta_1}{2}=Tan^{-1}\left(\frac{h_1-a_1}{h_1+a_1}\right)\Rightarrow 2.\frac{-\alpha_1+3\beta_1}{2}=2Tan^{-1}\left(\frac{h_1-a_1}{h_1+a_1}\right)=Tan^{-1}\left(\frac{2(h_1+a_1)(h_1-a_1)}{(h_1+a_1)^2-(h_1-a_1)^2}\right)\\&=Tan^{-1}\left(\frac{h_1^2-a_1^2}{2a_1h_1}\right)\overset{[6]}{=}Tan^{-1}\left(\frac{a_1^*}{h_1^*}\right)\Rightarrow -\alpha_1+3\beta_1=Tan^{-1}\left(\frac{a_1^*}{h_1^*}\right)\end{aligned}$$

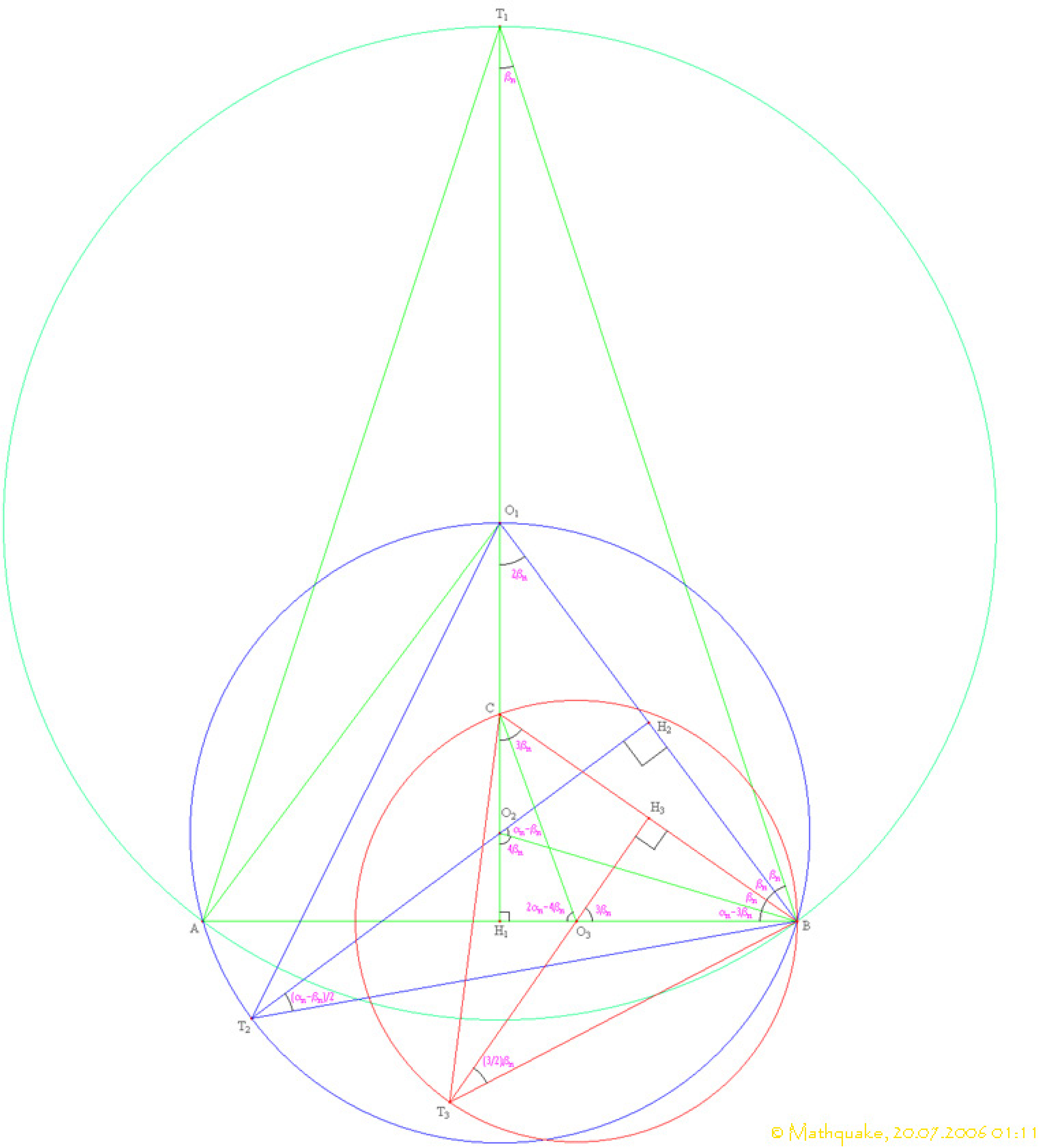
şeklinde 2'ye katlanarak (a_1^*,h_1^*,r_1^2) dik üçgeninin eğim açısı elde edildiğinden, (a_1,h_1,r_1) dik üçgeninden (a_1^*,h_1^*,r_1^2) dik üçgenine geçilmiş olur.

Susa Matematik Tableti'nde ise 2'ye katlama bağıntısı şu şekilde ortaya çıkar: Aşağıdaki Şekil 2'de Susa tabletindeki $|AT_1|=|BT_1|$ için ABT_1 ikizkenar üçgeni ve çevrel çemberi yer almaktadır. Eğer kenarlarının uzunluklarına göre BH_1T_1 dik üçgeni $\left(p_n,q_n,\sqrt{p_n^2+q_n^2}\right)$ sıralı üçlüsüyle gösterilirse BH_1O_1 dik üçgeni $\left(\frac{p_n^2-q_n^2}{2p_n},q_n,\frac{p_n^2+q_n^2}{2p_n}\right)$ sıralı üçlüsüne karşılık geldiğinden, $n=1$ için (a_1,h_1,r_1) dik üçgeni bu son sıralı üçlünün $2p_1$ katı olarak elde edilir.

Şimdi ilkin BH_1O_1 dik üçgeninin $[BO_1]$ hipotenüsünün orta dikmesi çizilirse, $[T_2H_2]$ orta dikmesinin $[T_1H_1]$ orta dikmesini kestiği O_2 noktası 2. çemberin merkezi olur ve $|BO_2|=|O_2O_1|$ eşitliği nedeniyle mavi renkli çevrel çemberiyle birlikte $|BT_2|=|O_1T_2|$ için BO_1T_2 ikizkenar üçgeni ortaya çıkar. Dikkat edilirse BH_1O_1 dik üçgeninin tepe açısının 2'ye katlanmasıyla BH_1O_2 dik üçgeninin tepe açısının $4\beta_1$ ve eğim açısının da $\alpha_1-3\beta_1$ olduğu görülür. Bu da açıkça BH_1O_2 dik üçgeninin eğim açısının (a_1^*,h_1^*,r_1^2) dik üçgeninin eğim açısının ters işaretlisi olup,

$$[17] \quad \angle(H_1BO_2)=\alpha_1-3\beta_1=-Tan^{-1}\left(\frac{a_1^*}{h_1^*}\right)=Tan^{-1}\left(\frac{a_1^2-h_1^2}{2a_1h_1}\right)$$

eşitlikleri nedeniyle $h_1<a_1$ şartını ortaya koyar.



Şekil 2. Susa Matematik Tableti'nde (a_n, h_n, r_n) dik üçgenine benzer olan dik üçgenlerde 2'ye katlama bağıntısı (Bkz. "*New Angles on Ancient Babylonian Geometry (Part 2)*").

İkinci olarak $[BO_1]$ açıortay olarak göz önüne alınırsa –ki BT_1O_1 üçgeninin $[BO_1]$ kenarı sabit olmak üzere düzlem üzerine katlanmasıyla $[BO_1]$ kenarının $[T_1H_1]$ orta dikmesini kestiği nokta C olur ve bu durumda $[BO_1]$, BT_1C üçgeninin açıortayı olarak ortaya çıkmış olur– BH_1C dik üçgeninin $[BC]$ hipotenüsünün orta dikmesi çizildiği takdirde $[T_3H_3]$ orta dikmesinin $[BH_1]$ kenarını kestiği O_3 noktası da 3. çemberin merkezi olur ve $|BO_3| = |O_3C|$ eşitliği nedeniyle kırmızı renkli çevrel çemberiyle birlikte $|BT_3| = |CT_3|$ için BCT_3 ikizkenar üçgeni ortaya çıkar. Dolayısıyla O_3H_1C dik üçgeninin eğim açısının

$$[18] \quad \angle(H_1O_3C) = \angle(H_1BO_1) + \angle(H_1BO_2) = (\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_1 - 3\beta_1) = 2\alpha_1 - 4\beta_1$$

olması hem *"Bir çemberde aynı yayı gören merkez açının ölçüsü çevre açının ölçüsünün 2 katıdır"* kuralına göre BH_1C dik üçgeninin eğim açısı 2'ye katlanmış olmaktadır hem de trigonometrik cetveldeki $(a_2, h_2, r_2) = (a_2, h_2, r_1^3)$ dik üçgeni ile O_3H_1C dik üçgeninin benzer oldukları sonucu ortaya çıkmış olmaktadır.

Sonuçta işleme bu şekilde devam edilirse trigonometrik cetveldeki $(a_n, h_n, r_n) = (a_n, h_n, r_1^{2n-1})$ dik üçgenlerine benzer olan dik üçgenler Susa tabletinden hareketle elde ettiğimiz yukarıdaki şekilden geometrik olarak elde edilebilirler. Üstelik, burada (a_1^*, h_1^*, r_1^2) transit dik üçgen olduğundan (a_n, h_n, r_1^{2n-1}) dik üçgenlerinde $a_1 < h_1$ ters şartı geçerli olmaktadır.

2. (a_n, h_n, r_n) Dik Üçgeni ve (p_n, q_n) Doğuranlarının Trigonometrik Formülleri. Öncelikle $\left(p_1, q_1, \sqrt{p_1^2 + q_1^2}\right)$ dik üçgenindeki tepe açısı β_1'i 2'ye katlarsak [13]'ten

$$[19] \quad \beta_1 = Tan^{-1}\left(\frac{q_1}{p_1}\right) \Rightarrow 2\beta_1 = 2Tan^{-1}\left(\frac{q_1}{p_1}\right) = Tan^{-1}\left(\frac{2p_1q_1}{p_1^2 - q_1^2}\right) = Tan^{-1}\left(\frac{h_1}{a_1}\right) \Rightarrow 2\beta_1 = Tan^{-1}\left(\frac{h_1}{a_1}\right)$$

ve $2\beta_1$ açısını tekrar 2'ye katlarsak

$$[20] \quad 2\beta_1 = Tan^{-1}\left(\frac{h_1}{a_1}\right) \Rightarrow 2(2\beta_1) = 2Tan^{-1}\left(\frac{h_1}{a_1}\right) = Tan^{-1}\left(\frac{2a_1h_1}{h_1^2 - a_1^2}\right) = Tan^{-1}\left(\frac{h_1^*}{a_1^*}\right) \Rightarrow 4\beta_1 = Tan^{-1}\left(\frac{h_1^*}{a_1^*}\right)$$

sonuçları elde edilir.

Şu hâlde bu sonuçlara göre

$$[21]\quad Tan^{-1}\left(\frac{a_1}{h_1}\right) - Tan^{-1}\left(\frac{a_1^*}{h_1^*}\right) = Tan^{-1}\left(\frac{a_1h_1^* - a_1^*h_1}{a_1a_1^* + h_1h_1^*}\right) \overset{[8]}{=} Tan^{-1}\left(\frac{a_2}{h_2}\right)$$
$$(\alpha_1 - \beta_1) - (-\alpha_1 + 3\beta_1) = 2\alpha_1 - 4\beta_1$$

özdeşliği elde edilir ve işleme yine aynı şekilde devam edilirse,

$$[22]\quad Tan^{-1}\left(\frac{a_2}{h_2}\right) - Tan^{-1}\left(\frac{a_1^*}{h_1^*}\right) = Tan^{-1}\left(\frac{a_2h_1^* - a_1^*h_2}{a_2a_1^* + h_2h_1^*}\right) \overset{[9]}{=} Tan^{-1}\left(\frac{a_3}{h_3}\right)$$
$$(2\alpha_1 - 4\beta_1) - (-\alpha_1 + 3\beta_1) = 3\alpha_1 - 7\beta_1$$

özdeşliği bulunur ve sonuçta işleme bu şekilde devam edildiği takdirde MEM metoduna göre

$$[23]\quad \begin{gathered} Tan^{-1}\left(\frac{a_{n-1}}{h_{n-1}}\right) = (n-1)\alpha_1 - (3(n-1)-2)\beta_1 = (n-1)\alpha_1 - (3n-5)\beta_1 \\ Tan^{-1}\left(\frac{a_1^*}{h_1^*}\right) = -\alpha_1 + 3\beta_1 \end{gathered}$$

özdeşliklerinin doğruluğu altında

$$[24]\quad Tan^{-1}\left(\frac{a_{n-1}}{h_{n-1}}\right) - Tan^{-1}\left(\frac{a_1^*}{h_1^*}\right) = Tan^{-1}\left(\frac{a_{n-1}h_1^* - a_1^*h_{n-1}}{a_{n-1}a_1^* + h_{n-1}h_1^*}\right) \overset{[9]}{=} Tan^{-1}\left(\frac{a_n}{h_n}\right)$$
$$\big((n-1)\alpha_1 - (3n-5)\beta_1\big) - (-\alpha_1 + 3\beta_1) = n\alpha_1 - (3n-2)\beta_1$$

genel özdeşliğini bulmuş oluruz.

Buna göre (a_n, h_n, r_n) dik üçgenindeki $\frac{a_n}{h_n}$ oranı için trigonometrik formül,

$$Tan^{-1}\left(\frac{a_n}{h_n}\right) = n\alpha_1 - (3n-2)\beta_1 = n\left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right) - (3n-2)\beta_1 = \frac{n}{2}\pi - (4n-2)\beta_1$$
$$\Rightarrow \frac{a_n}{h_n} = Tan\left(\frac{n}{2}\pi - (4n-2)\beta_1\right) = \frac{Tan\left(\frac{n}{2}\pi\right) - Tan\big((4n-2)\beta_1\big)}{1 + Tan\left(\frac{n}{2}\pi\right)Tan\big((4n-2)\beta_1\big)} = \frac{4(-1)^{n+1}Tan\big((4n-2)\beta_1\big)}{(1+(-1)^n)^2 + (-1+(-1)^n)^2Tan^2\big((4n-2)\beta_1\big)}$$

eşitliklerinden

$$[25]\quad \frac{a_n}{h_n} = \frac{4(-1)^{n+1}Tan\big((4n-2)\beta_1\big)}{(1+(-1)^n)^2 + (-1+(-1)^n)^2Tan^2\big((4n-2)\beta_1\big)}$$

olarak bulunur. Burada n'nin tek ve çift oluşlarına göre k doğal sayısı için bu trigonometrik fonksiyon,

$$[26]\quad \frac{a_{2k+1}}{h_{2k+1}} = Cot\big((8k+2)\beta_1\big), \frac{a_{2k+2}}{h_{2k+2}} = -Tan\big((8k+6)\beta_1\big) = Tan\big((8k+6)\alpha_1\big)$$

şeklinde 2 parçaya ayrılmaktadır.

Şimdi (a_n, h_n, r_1^{2n-1}) dik üçgeninde $\left(p_n, q_n, \sqrt{p_n^2 + q_n^2}\right)$ doğuran dik üçgeninin $m_n = \frac{p_n}{q_n}$ eğimi göz önüne alınırsa, ilkin

$$\frac{m_{2k+1} - m_{2k+1}^{-1}}{2} = \frac{a_{2k+1}}{h_{2k+1}} = Cot\big((8k+2)\beta_1\big) \Rightarrow$$
$$m_{2k+1} = Cot\big((8k+2)\beta_1\big) \pm \sqrt{1 + Cot^2\big((8k+2)\beta_1\big)} = \begin{cases} \dfrac{Cos\big((8k+2)\beta_1\big) - 1}{Sin\big((8k+2)\beta_1\big)} = -\dfrac{2Sin^2\big((4k+1)\beta_1\big)}{2Sin\big((4k+1)\beta_1\big)Cos\big((4k+1)\beta_1\big)} = -Tan\big((4k+1)\beta_1\big) \\ \dfrac{Cos\big((8k+2)\beta_1\big) + 1}{Sin\big((8k+2)\beta_1\big)} = \dfrac{2Cos^2\big((4k+1)\beta_1\big)}{2Sin\big((4k+1)\beta_1\big)Cos\big((4k+1)\beta_1\big)} = Cot\big((4k+1)\beta_1\big) \end{cases}$$

eşitliklerinden

$$m_{4k+3} = m_{2(2k+1)+1} = -Tan\big((4(2k+1)+1)\beta_1\big) = -Tan\big((8k+5)\beta_1\big), m_{4k+1} = m_{2(2k)+1} = Cot\big((4(2k)+1)\beta_1\big) = Cot\big((8k+1)\beta_1\big)$$

genel çözümüne ulaşılır ve buradan da

$$[27]\quad m_{4k+1} = Cot\big((8k+1)\beta_1\big), m_{4k+3} = -Tan\big((8k+5)\beta_1\big)$$

eşitliklerini elde ederiz.

İkinci olarak

$$\frac{m_{2k+2}-m_{2k+2}^{-1}}{2}=\frac{a_{2k+2}}{h_{2k+2}}=-Tan\big((8k+6)\beta_1\big)\Rightarrow m_{2k+2}=-Tan\big((8k+6)\beta_1\big)\pm\sqrt{1+Tan^2\big((8k+6)\beta_1\big)}=\begin{cases}\dfrac{-Sin\big((8k+6)\beta_1\big)-1}{Cos\big((8k+6)\beta_1\big)}\\ \dfrac{-Sin\big((8k+6)\beta_1\big)+1}{Cos\big((8k+6)\beta_1\big)}\end{cases}$$

eşitlikleri nedeniyle

$$m_{4k+2}=m_{2(2k)+2}=-\frac{1+Sin\big((8(2k)+6)\beta_1\big)}{Cos\big((8(2k)+6)\beta_1\big)}=-\frac{1+Sin\big((16k+6)\beta_1\big)}{Cos\big((16k+6)\beta_1\big)},m_{4k+4}=m_{2(2k+1)+2}=\frac{1-Sin\big((8(2k+1)+6)\beta_1\big)}{Cos\big((8(2k+1)+6)\beta_1\big)}=\frac{1-Sin\big((16k+14)\beta_1\big)}{Cos\big((16k+14)\beta_1\big)}$$

genel çözümünden

$$[28]\quad m_{4k+2}=-\frac{1+Sin\big((16k+6)\beta_1\big)}{Cos\big((16k+6)\beta_1\big)},m_{4k+4}=\frac{1-Sin\big((16k+14)\beta_1\big)}{Cos\big((16k+14)\beta_1\big)}$$

eşitlikleri elde edilir.

13 Hakkında

Ramanujan, tam sayılar arasındaki bağlılıkları bulma bakımından üstün ve parlak bir zekâya sahipti.

Putney'deki bir hastenede ölüm döşeğinde yatarken ***Hardy*** onu ziyarete giderdi. Taksi plaka no'su ile ilgili olay bu ziyaretlerin birinde gerçekleşti. ***Hardy*** o gün de her zamanki ulaşım aracı olan taksi ile gitmişti. ***Ramanujan***'ın yattığı odaya girdi. ***Hardy***, konuşma başlatmakta her zamanki beceriksizliği ile, muhtemelen daha selâmlaşmadan ve mutlaka ilk söz olarak, *"Geldiğim taksinin plaka no'su 1729'du. Bana çok alelade bir sayı gibi geldi"* dedi. ***Ramanujan***'ın buna yanıtı şu oldu (ki o sırada ***Hardy***'nin aklına bu sayının $1729 = 7.13.19$ şeklinde asal çarpanlarına ayrılışındaki 13'ün uğursuz olduğu gelmişti): *"Hayır **Hardy**! Hayır **Hardy**! Çok ilginç bir sayı. 2 küpün toplamı olarak 2 ayrı şekilde ifade edilebilen en küçük sayı"*

C. P. Snow

Not. ***Hardy***'nin ifadesine göre ***Snow*** tarafından aktarılan konuşma bu şekilde geçmiş. ***Hardy***, 13'ün uğursuzluğuna inananlardan biri olarak hastanede ***Ramanujan***'ın ölüm haberini alacağını sanmıştı ve ***Ramanujan***'ı sağlıklı görünce bu korkusunu dile getirmiş.

Bir not da bizden olsun: İstanbul'un fethedildiği yıl olan 1453 sayısı asaldır ancak bu sayının $1+4+5+3=13$ şeklinde rakamları toplamı 13'tür. Bu nedenle 13 sayısı o günden bu yana Batılılar tarafından "uğursuz" olarak kabul edilmiştir. Dolayısıyla ***Hardy***'nin korkusu buradan gelebilir, ancak 13 için 2 tabletten "0" rakamı ile ilgili elde ettiğim şu bulgular daha ilginçtir:

Plimpton 322 no'lu tablette 2 yerde "0" rakamı için bir "boşluk" bırakılmıştır: 1. Satır-4. Sütun'daki "0" rakamına karşılık gelen boşluğun olduğu (tabletin kırık kısmında olması nedeniyle) tartışılabilir ancak 13. Satır-4. Sütun'daki "0" rakamını temsil eden boşluk tartışmasız bir şekilde, açıkça görülmektedir ki, bu da "0" rakamının tarihini bilinenden çok daha geriye götürür. Ama esas ilginçlik şurada yatar: Bu satırlardaki dik üçgenleri doğuran dik üçgenler de rasyonel kenarlı dik üçgenlerdirler ve bu doğuran dik üçgenleri doğuran dik üçgenlerin de dik kenarları da rasyoneldir).

Oysa bu tabletin kardeşi olan YBC 7289 no'lu tablette "0" rakamının olup olmadığı hakkında Matematik Dünyası'nda bir tartışma başlatılmış ve sonuçlanamamıştı!

Bu konuda

***Hesabın Destanında İlk Gerçek Algoritma: YBC 7289 no'lu Tabletindeki Babil Algoritması*, 1. Baskı, 20.04.2006, 17:00:00.**

çalışmasıyla YBC 7289 no'lu tabletinin tam bir deşifresini verdiğimde, orada da "0" rakamı için 2 yerde boşluk kullanıldığı ortaya çıktı! Ne ilginç değil mi?

***Mathquake*'in *Hardy*'e Yanıtı:** Hayır dostum, korkmana gerek yok! Bu sayının çalışmamızda bir başka ilginç özelliği şu şekilde ortaya çıktı: 13 sayısı, aynı zamanda en küçük (triviyal olmayan) 2 tam sayının karelerinin toplamıdır:

$$2^2+3^2=13.$$

Not 1. Plimpton 322 no'lu tabletindeki ilk satırdaki dik üçgen, $\left(p_1,q_1,\sqrt{p_1^2+q_1^2}\right)=(12,5,13)$ doğuran dik üçgeniyle elde edilen $(a_1,h_1,r_1)=(119,120,169)$ dik üçgenidir. Ancak $(12,5,13)$ doğuran dik üçgeni de $\left(p_0,q_0,\sqrt{p_0^2+q_0^2}\right)=\left(2,3,\sqrt{13}\right)$ dik üçgeni tarafından doğrulmaktadır ki [13] bağıntısına göre

$$[29]\quad \frac{\alpha_1}{2}=Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\Rightarrow 2Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)=\alpha_1=Tan^{-1}\left(\frac{12}{5}\right)\Rightarrow 2\alpha_1=-Tan^{-1}\left(\frac{120}{119}\right)$$

eşitlikleri 2'ye katlama bağıntısına güzel bir örnek teşkil etmektedir. Tablette bunun gibi güzel bir örnek daha var: 13. satırdaki $(a_{13},h_{13},r_{13})=(161,240,289)$ dik üçgeni. Her iki dik üçgenin hipotenüs uzunlukları birer kare sayı olduklarından, her iki dik üçgen de Susa tabletindeki orijinal problemle tamamen uyumludur.

3. [10] Denkleminin Genel Çözümüne Göre (a_n,h_n,r_n)'nin ve (p_n,q_n) Doğuranlarının (p_1,q_1) İlk Doğuranları Cinsinden Bulunması. Sayılar Teorisi'nde [10] denklemi $2(2n-1)=:m$ için $a_{\frac{m+2}{4}}^2+h_{\frac{m+2}{4}}^2=r^m$ ya da kısaca $a^2+h^2=r^m$ şeklinde göz önüne alınırsa $1<m\quad(m\in\mathbb{Z}^+)$ için

$$[30]\quad a^2+h^2=r^m$$

denkleminin özel bir hali olduğundan, bu denklemin genel çözümünden [10] denkleminin genel çözümüne ulaşılabilir.

Diğer taraftan burada $h<a$ şartı altında

$$[31]\quad a^2-h^2=x^m$$

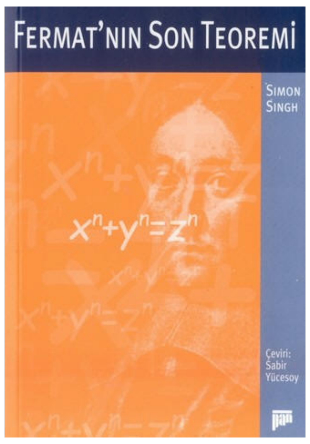
denklemi de göz önüne alınırsa [30] veya [31] denkleminin pozitif tam sayılar kümesinde çözümü olmasına rağmen her ikisinin birden pozitif tam sayılar kümesinde çözümü yoktur. Bu konuda ***Pierre De Fermat***'ın; *"Bunun gerçekten dikkat çekici güzellikte bir kanıtını buldum, ancak sayfadaki boşluk kanıtı yazamayacak kadar küçük!!!"* sözünü söylemiş olması ihtimali daha yüksek görünmektedir. Çünkü [30] ve [31] sisteminin çözümsüzlüğü **"Çift Kuvvetler İçin Fermat'ın Son Teoremi"**nin doğru olduğunu söylemektedir.

Bu sistemin çözümsüzlüğüne ilişkin en basit ispat için ***Fermat***'ın şu bilgisi oldukça dikkat çekmektedir. ***Diofant***'ın **"Arithmetica"** adlı eserinin 4. cildindeki 26. problemden sonra ***Fermat*** şu sonucu veriyor:

"Kenarları rasyonel sayılar olan bir dik üçgenin alanı, bir rasyonel sayının karesi olamaz. Bu teoremi ancak uzun ve zorlu bir çalışma sonucu kanıtlayabildim. Kanıtı burada veriyorum çünkü kullandığım yöntem sayılar teorisinde büyük ilerlemelere yol açabilir", *"İskenderiyeli Diofant; Yunan Cebir Tarihi Üzerine Bir Çalışma"*, S. 293.

Sonra oldukça karmaşık bir dille ve hiçbir sembol kullanmadan kanıtı anlatıyor ve *"sayfadaki boşluğun yeterli olmaması nedeniyle tüm ayrıntıları veremeyeceğini"* yazarak bitiriyor. ***Fermat*** bu yeni yönteme **"Sonsuz Azalma"** adını verdi.

Eğer ***Fermat***'ın yukarıdaki sonucu bir teorem olarak ifade edersek son teorem çift kuvvetler için ispatlanmış olur. Bu konuda ***Fermat***'ın 4. kuvvet için ayrıca bir ispat yaptığını biliyoruz ama bulduğu sonuç aslında çift kuvvetler için genel bir ispattı!



Teorem (*Fermat*, 1640). Kenarları birer rasyonel sayı olan bir dik üçgenin alanı kare sayı olamaz!

Çünkü

$$[32] \quad x^{2m} + y^{2m} = r^{2m}$$

denkleminin genel çözümü Babilliler'in çözüm formülüne göre (a, h) doğuranları cinsinden

$$[33] \quad x^m = a^2 - h^2, y^m = 2ah, r^m = a^2 + h^2$$

şeklinde göz önüne alınırsa, ***Fermat***'ın teoremine göre (x^m, y^m, r^m) dik üçgeninin alanı için *s* bir pozitif tam sayı olmak üzere

$$[34] \quad A = \frac{x^m y^m}{2} = \frac{(a^2 - h^2)(2ah)}{2} = ah(a^2 - h^2) \neq s^2$$

olurdu. Eğer bu denklemi sağlayan a ve h pozitif tam sayıları olsaydı, eşitliğin solundaki çarpanların birer tam kare (sayı) olmaları gerekirdi. Örneğin $m = 2$ için $a = a_0^2$ ve $h = h_0^2$ olduklarını gözönüne alırsak,

$$[35] \quad a^2 - h^2 = \left(\frac{s}{a_0 h_0}\right)^2 (= x^2)$$

olması gerekirdi. Oysa ***Fermat***'ın teoremine göre bu mümkün değildir ve bu da *a* ve *h* pozitif tam sayıları mevcut olsa bile, *x* pozitif tam sayısının mevcut olmadığını gösterir. Bu sonuç ise genel olarak $m = 2k$ için [32] denkleminin pozitif tam sayılar kümesinde çözümünün olmadığını gösterir. O halde genel olarak bu ispata göre *a* ve *h* pozitif tam sayıları için $a^2 + h^2 = r^{4k}$ denkleminin pozitif tam sayılarda çözümü olmasına rağmen $a^2 - h^2 = x^{4k}$ denkleminin pozitif tam sayılar kümesinde çözümü yoktur. Çünkü *x* pozitif bir tam sayı değildir!

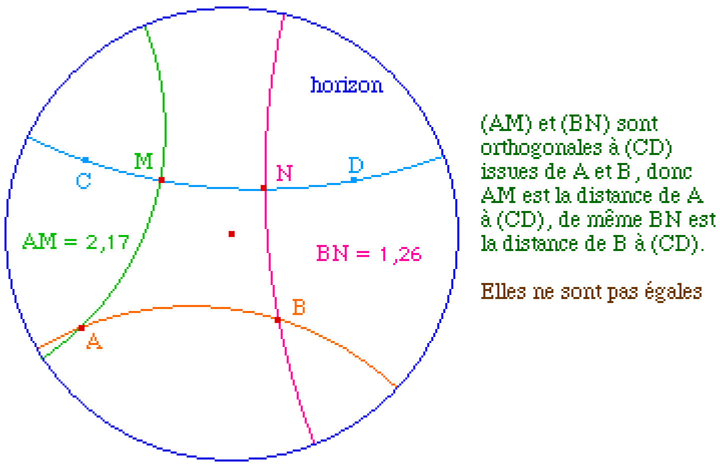
Şimdi çalışma alanımızın dışına çıkmamak için [30] ve [31] denklemlerinin genel çözümlerine göre sistemin çözümsüzlüğünün nasıl bulunduğunu bir kenara bırakırsak ***Fermat***'ın teoremi şu şekilde genelleşmiş olur:

Genelleştirilmiş Fermat Teoremi. Kenarları birer rasyonel sayı olan bir dik üçgenin alanı kare olamaz, bir tam küp olamaz. Aynı özellik 4. kuvvet ve genel olarak 4'ten büyük tüm kuvvetler için de doğrudur!

İşte bu son teoreme göre ***Fermat***'ın teoreminin genelleştirilmişini düşündüğünüzde çift kuvvetler için ***Fermat***'ın son teoreminin doğru olduğunu görürsünüz.

Peki, tek kuvvetler için ***Fermat***'ın son teoremi hakkında ne söylenebilir?

Bunun için de şu gelişmeye bir bakalım: ***Fermat***'a Duyurulur!



17. yüzyıl Fransız matematikçisi ***Pierre Fermat***'a (1601-1663) atfedilen ve **"Fermat'ın Son Teoremi"**nin özel bir hâli olan

$$[36] \quad x^3 + y^3 = z^3$$

denkleminin tam sayılarla çözülemeyeceğini büyük bir ustalıkla gösteren ***Ömer Hayyam***, ***Fermat***'tan tam 550 yıl önce göstermiştir. Bilindiği üzere ***Ömer Hayyam*** rubaileriyle tanındığı kadar, Matematik alanında yaptığı çalışmalarla da meşhur oldu. Cebirde Babillilerden sonra ilk kez ve esaslı bir şekilde 2. dereceden denklemlerin geometrik ve cebirsel çözümleriyle birlikte 3. dereceden denklemlerin tasvirini yapmıştır. Birçok cebrik denkleminin çözümünü geometrik olarak açıklamıştır. Çünkü Babillilerden Türk-İslâm dünyası matematikçilerine kadar geçen zamanda bu denklemleri çözen çıkmamıştı! Kübik denklemlerin kısmî çözüm şekillerini sistematik bir şekilde tarif ve tasvir etmiştir. Örneğin yandaki resimde ***Hayyam***'ın kübik bir denklem için geometrik tasvirini görebilirsiniz. Zaten [30] denkleminin genel çözümü bir çember üzerinde trigonometrik fonksiyonlarla ve [31] denkleminin genel çözümü ise bir hiperbolde hiperbolik fonksiyonlarla temel özdeşliklerle elde edildiğinden, [30] ve [31] sisteminin çözümü bir çember ile hiperbolün kesim noktaları olarak karşımıza çıkar. Bunun güzel bir örneğini aynı metodu kullanan ***Ömer Hayyam***'ın 3. dereceden bir denklemin pozitif tam sayılı kökünü konikleri nasıl kesiştirerek elde ettiğini bu resimde görebilirsiniz. Özetle bu ve diğer bütün bilgiler bir araya getirildiğinde ***Fermat***'ın **"Son Teoremi"** nasıl oluşturduğunu tahmin etmek güç olmasa gerek!

Şimdi [10] denkleminin genel çözümü için [30] denkleminin genel çözümüne geçebiliriz.

[30] Genel Denkleminin 2 Terimli Formüle Göre Genel Çözümünün Bulunması. [30] denkleminin genel çözümü için birim çemberdeki

$$[37] \quad Cos^2(mt) + Sin^2(mt) \equiv 1 \equiv \left(Cos^2(t) + Sin^2(t)\right)^m$$

temel özdeşliğinden her *m* doğal sayısı için

$$[38] \quad \left(e^{\pm ti}\right)^m = \left(Cos(t) \pm iSin(t)\right)^m \equiv Cos(mt) \pm iSin(mt) = e^{\pm mti}$$

özdeşliği geçerli olur ve bu özdeşlikten 2 terimli açılımla

$$[39] \quad (Cos(t) + i\,Sin(t))^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} Cos^{m-k}(t)\,(i\,Sin(t))^k = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} i^k\, Cos^{m-k}(t)\, Sin^k(t)$$

eşitlikleri ortaya çıkar. Buna göre [39] özdeşliğinde ***"2 karmaşık sayı birbirine eşit ise, reel ve sanal kısımları birbirine eşittir"*** kuralına göre [37] denkleminin, dolayısıyla [30] denkleminin genel çözümü bulunmuş olur!

Söz konusu bu genel çözüm şu yolla daha kolay şekilde bulunmaktadır: Öncelikle z_1 ve z_2 herhangi 2 karmaşık sayı olmak üzere 2 terimli açılıma göre

$$[40]\quad (z_1+z_2)^m=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}z_1^{m-k}z_2^k$$

şeklinde yazılabilir. Burada a_k karmaşık sayıları ne olursa olsun sonlu tane karmaşık sayının toplamı için

$$[41]\quad \sum_{k=0}^{m}a_k=\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}a_{2k}+\sum_{k=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]}a_{2k+1}$$

özdeşliği vardır. O halde z_1 ve z_2 karmaşık sayıları için

$$[42]\quad (z_1+z_2)^m=\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\binom{m}{2k}z_1^{m-2k}z_2^{2k}+\sum_{k=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]}\binom{m}{2k+1}z_1^{m-(2k+1)}z_2^{2k+1}$$

özdeşliği geçerli olur. Eğer bu özdeşlikte $z_1=Cos(t)$ ve $z_2=iSin(t)$ değişken dönüşümleri yapılırsa,

$$(Cos(t)+i\,Sin(t))^m=\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\binom{m}{2k}Cos^{m-2k}(t)\,(i\,Sin(t))^{2k}+\sum_{k=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]}\binom{m}{2k+1}Cos^{m-(2k+1)}(t)\,(i\,Sin(t))^{2k+1}$$
$$=\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}(-1)^k\binom{m}{2k}Cos^{m-2k}(t)\,Sin^{2k}(t)+i\sum_{k=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]}(-1)^k\binom{m}{2k+1}Cos^{m-(2k+1)}(t)\,Sin^{2k+1}(t)$$

olur ve özdeşliğin sol tarafında [38]'deki ***Euler***'in kuralı uygulanırsa,

$$[43]\quad Cos(mt)+iSin(mt)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}(-1)^k\binom{m}{2k}Cos^{m-2k}(t)Sin^{2k}(t)+i\sum_{k=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]}(-1)^k\binom{m}{2k+1}Cos^{m-(2k+1)}(t)Sin^{2k+1}(t)$$

özdeşliği elde edilir ve burada yine 2 karmaşık sayının birbirine eşitliğinden şu eşitlikler elde edilir:

$$[44]\quad \begin{aligned} Cos(mt)&=\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}(-1)^k\binom{m}{2k}Cos^{m-2k}(t)Sin^{2k}(t),\\ Sin(mt)&=\sum_{k=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]}(-1)^k\binom{m}{2k+1}Cos^{m-(2k+1)}(t)Sin^{2k+1}(t).\end{aligned}$$

Şu hâlde [30] denkleminin genel çözümü için [44]'de $Cos(t)=p_1$ ve $Sin(t)=q_1$ için $Cos(mt)=a_m$ ve $Sin(mt)=h_m$ değişken dönüşümleri yapılırsa,

$$[45]\quad \begin{aligned} a_m(p_1,q_1)&=\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}(-1)^k\binom{m}{2k}p_1^{m-2k}q_1^{2k},\\ h_m(p_1,q_1)&=\sum_{k=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]}(-1)^k\binom{m}{2k+1}p_1^{m-(2k+1)}q_1^{2k+1}\end{aligned}$$

çözümlerine karşılık r'nin formu değişmez:

$$[46]\quad r=p_1^2+q_1^2.$$

Sonuçta [10] denkleminin genel çözümü ise yalnızca $\frac{m+2}{4}=n$ pozitif tam sayılarına karşılık geldiğinden, [45]&[46]'dan

$$[47]\quad \begin{aligned} a_n&=\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k\binom{4n-2}{2k}p_1^{2(2n-k-1)}q_1^{2k},\\ h_n&=\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k\binom{4n-2}{2k+1}p_1^{2(2n-k-1)-1}q_1^{2k+1},\\ r_1&=p_1^2+q_1^2\end{aligned}$$

çözümleri elde edilir. Buna göre p_n ve q_n doğuranları da [12]'deki çözümden p_1 ve q_1 ilk doğuranları cinsinden bulunmuş olurlar!

1.3. Plimpton 322 No'lu Tableti'ndeki (a_n, h_n, r_n) Dik Üçgenlerinin Metoda Göre Analizi

Bu bölümde (a_n, h_n, r_1^{2n-1}) dik üçgeni yardımıyla tabletteki (a_n, h_n, r_n) dik üçgenlerinin nasıl bulunduklarına ilişkin bir analiz çalışması yapacağım. Ancak bunu yaparken bu çalışmanın yalnız 4000 yıl öncesindeki Babilliler için değil, günümüz için de hâlâ ağır bir çalışma olduğu görülecektir.

Bunun için ilkin tabletteki $(a_1, h_1, r_1) = (119,120,169)$ ilk dik üçgeni ve eğim açısının ölçüsü $30'$ civarında olan $(a_1^*, h_1^*, r_1^2) = (120^2 - 119^2, 2 \times 120 \times 119, 120^2 + 119^2) = (239, 28560, 169^2)$ geçiş (transit) dik üçgeniyle hesaba başlarsak [8]'deki bağıntılardan

$$[48] \quad \begin{aligned} a_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & h_1 \\ a_1^* & h_1^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 119 & 120 \\ 239 & 28560 \end{vmatrix} = 3369960, \\ h_2 &= a_1 a_1^* + h_1 h_1^* = 119 \times 239 + 120 \times 28560 = 3455641, \\ r_2 &= 169 \times 169^2 = 169^3 \end{aligned}$$

sonuçları ortaya çıkar. Bu sonuçlara göre tabletteki 2. dik üçgeni doğuran dik üçgenin eğimi yani $m_2 = \frac{p_2}{q_2}$ oranı için [11]'den

$$[49] \quad m_2 = \frac{p_2}{q_2} = \frac{r_1^3 + a_2}{h_2} = \frac{169^3 + 3369960}{3455641} = \frac{2863}{1207} = 2.37(1996686\ldots) > 2.37(0370370\ldots) = \frac{64}{27} = \overline{m_2}$$

eşitsizliği elde edilir ki Babilliler 60 tabanlı sayı sisteminde bu sonucu $\frac{p_2}{q_2} = p_2 q_2^{-1}$ şeklinde sonlu alarak hesap yapmaktaydılar. Çünkü Babil matematik tabletlerine bakıldığında sayıların daima 60 tabanında konumlu bir şekilde yazıldıkları görülür. Bu yüzden tabletteki (a_n, h_n, r_n) dik üçgenlerinin doğuranları olan p_n ve q_n sayılarının 60 tabanında sonlu olması, bu sayıların Ters Sayılar Cetveli'nden alınmış olduğu izlenimi verse de, gerçekte bu tableti 1945'de ilk kez okuyan ***O. Neugebauer*** ve ***A. J. Sachs*** tarafından hesaplanılmış olması gerektiğine işaret edilmiştir!

Gerçekten de "***Plimpton 322 No'lu Tablet'in Matematiksel-Astronomiksel Çözümü***"nde Babilliler, bu sayıları Sayılar Teorisi'ni ustaca kullanarak bulmuşlardır. Ancak burada hemen belirtmeliyiz ki p_n ve q_n sayıları ve tersleri 60 tabanında sonlu olduklarına göre, 60'ın asal çarpanları olan 2, 3 ve 5'i içeren eden birer tam sayı olmak zorundadırlar. Buna göre (a_n, h_n, r_n) dik üçgenlerinin $h_n = 2p_n q_n$ yükseklikleri de aynı özelliğe haiz olur.

Şimdi bir örnek olarak [49] eşitsizliği nedeniyle tabletteki 2. dik üçgeni veren doğuranlara nasıl ulaşıldığına bir bakalım.

Burada doğuran dik üçgenlerin eğimlerini sırasıyla $m_1 = \frac{p_1}{q_1} = \frac{12}{5}$ ve $m_2 = \frac{p_2}{q_2} = \frac{2863}{1207}$ olarak alırsak [49]'dan

$$m_2 = \frac{p_2}{q_2} = \frac{r_1^3 + a_2}{h_2} = \frac{r_1^3 + 3a_1^2 h_1 - h_1^3}{3a_1 h_1^2 - a_1^3} = \frac{\left(\frac{r_1}{h_1}\right)^3 + 3\left(\frac{a_1}{h_1}\right)^2 - 1}{3.\frac{a_1}{h_1} - \left(\frac{a_1}{h_1}\right)^3} = \frac{\left(\frac{m_1 + m_1^{-1}}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{m_1 - m_1^{-1}}{2}\right)^2 - 1}{3.\frac{m_1 - m_1^{-1}}{2} - \left(\frac{m_1 - m_1^{-1}}{2}\right)^3} = \frac{1 + 3m_1 - 3m_1^2 - m_1^3}{1 - 3m_1 - 3m_1^2 + m_1^3}$$

$$= \frac{m_1 - 1}{m_1 + 1} . \frac{1 + 4m_1 + m_1^2}{-1 + 4m_1 - m_1^2} > \frac{m_1 - 1}{m_1 + 1} . m_1^2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} < \frac{m_1 + 1}{m_1(m_1 - 1)}$$

nedeniyle

$$[50] \quad \frac{m_1}{m_2} < \frac{m_1 + 1}{m_1(m_1 - 1)} = \frac{85}{84} = 1;0,42,51,\ldots < \frac{81}{80} = 1;0,45$$

eşitsizlikleri söz konusu olur ve buradan da tabletteki 2. dik üçgeni veren doğuranların oranı

$$[51] \quad \overline{m_2} = \frac{\overline{p_2}}{\overline{q_2}} = \frac{\frac{12}{5}}{\frac{81}{80}} = \frac{64}{27}$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde tabletteki 3. ve 4. dik üçgenler için gerekli hesaplar yapılırsa, [9]&[11]'den

$$[52] \quad m_3 = \frac{p_3}{q_3} = \frac{r_1^5 + a_3}{h_3} = \frac{169^5 + 95420159401}{99498527400} = \frac{341525}{145668} = 2.34(4543757\ldots) > 2.34(375) = \frac{75}{32} = \overline{m_3}$$

ve

$$[53] \quad m_4 = \frac{p_4}{q_4} = \frac{r_1^7 + a_4}{h_4} = \frac{169^7 + 2701419604443960}{2864483360640839} = \frac{81478807}{35156177} = 2.31(7624211\ldots) > 2.31(48148148\ldots) = \frac{125}{54} = \overline{m_4}$$

sonuçları bulunur.

Şimdi buraya kadar tabletteki ilk 4 dik üçgenin metodumuzla 1-1 uyuştuğunu görmekteyiz. Çünkü doğuran dik üçgenlerin eğimleri için 2 ondalık doğrulukla kesirler söz konusudur. Eğer hesaba bu şekilde devam etseydik, tabletteki eğim açıları 45°'den 30°'ye kadar monoton olarak azalan dik üçgenler için aşağıda **Babil Kulesi**'ni andıran tabloyla karşılaşırdık ve bu sonuçlarla hesap yapabilmenin 4000 yıl öncesinde olduğu gibi şimdi de aynı derecede zorluklar içerdiği görülmektedir:

Aşağıdaki tabloda Şekil 1'e göre [10] denkleminin [12]'deki çözümünü veren ve [47]'den elde edilen (a_n, h_n, r_1^{2n-1}) dik üçgenleri yardımıyla Plimpton 322 no'lu tabletindeki (a_n, h_n, r_n) dik üçgenlerinin doğuranlarının eğimleri için bir yaklaşıklık serisi mevcuttur.

n	$m_n = \frac{p_n}{q_n}$
$\vdots$	$\vdots$
0	$1+\sqrt{2} = 2.414213562\ldots$
1	$\frac{12}{5} = 2.4$
2	$\frac{2863}{1207} = 2.371996686\ldots$
3	$\frac{341525}{145668} = 2.344543757\ldots$
4	$\frac{81478807}{35156177} = 2.317624211\ldots$
5	$\frac{9719139348}{4241902555} = 2.291221738\ldots$
6	$\frac{2318632401617}{1023533849993} = 2.265320684\ldots$
7	$\frac{276564805068235}{123471611274972} = 2.239906017\ldots$
8	$\frac{65975516800033193}{29786279899786543} = 2.214963299\ldots$
9	$\frac{7869181117654073292}{3592448206424508485} = 2.190478655\ldots$
10	$\frac{1877141838912899008303}{866464302453111601207} = 2.166438748\ldots$
11	$\frac{223885217598864875691605}{104481055062603285848388} = 2.14283075\ldots$
12	$\frac{53404085951066102004445207}{25194857377561050193456337} = 2.11964232\ldots$
13	$\frac{6369190842463618664434474068}{3037487499594078549120254875} = 2.096861581\ldots$
14	$\frac{1519199123849210782250719047377}{732328703245448391904175389193} = 2.074477099\ldots$
15	$\frac{181178130948357964283008838466955}{88272879599755688223674318532252} = 2.052477859\ldots$
16	$\frac{43213300417057797775415438075069993}{21278396355289967449741170967675183} = 2.030853251\ldots$
17	$\frac{5153350201660761850437274264487026572}{2564375014665680009131777649674719365} = 2.009593047\ldots$
18	$\frac{1229086323182256402245376771562724631343}{618038978706758284032932132536744954807} = 1.988687389\ldots$
19	$\frac{146566796130926260926306058135477220968085}{74470201117048743143058078223922384415108} = 1.968126766\ldots$
20	$\frac{34954994074174327618244089816155133426957207}{17944944863105575872117186753652927096178897} = 1.947902004\ldots$
21	$\frac{4168149319432279362444110139653711980973296788}{2161898408178203480527125861969602354706856795} = 1.92800425\ldots$
22	$\frac{994025788936136564143615197515267561097911075537}{520861868874022911208427191150388674755912070793} = 1.908424955\ldots$
23	$\frac{118525650843431307959557802507499279213822417491275}{62740006224913806171478856941229080413880447997532} = 1.889155866\ldots$
24	$\frac{28264890545355168796162835942351098651689677332417193}{15113387138597830982943004611461249498131249488901423} = 1.870189011\ldots$
25	$\frac{3370097726600643755649987392805225664127850816479403852}{1820182208335118386859770469040794864352529152589928645} = 1.851516684\ldots$
26	$\frac{803633174449218739213487216411408138862203815985987591983}{438393645518693938215135129493555198244382318285472350007} = 1.833131439\ldots$
27	$\frac{95814967523922292366904154796416494994911164851182781066965}{52789857226708534986315391582685550259634788943106939621828} = 1.815026078\ldots$
28	$\frac{22846987380990719340703777604760856753524133610489577735382807}{12712590844707262154096282743058263007047625722253741350683857} = 1.797193637\ldots$
29	$\frac{2723858696606037330137053282397393250542610153592377668702903508}{1530578099633013187084857676597842857718953340614566880274412315} = 1.779627382\ldots$
30	$\frac{649471650389209908715670876816379144021964873367963695939719526097}{368532024508896189043418037989281836245372458560473862054287446793} = 1.762320794\ldots$
31	$\frac{77427596209256135997000960760562666792502116138191424733769339645195}{44364312754007699545046290978127369003332991234660608363457209654812} = 1.745267567\ldots$
32	$\frac{18460831181258208803738183330796349994404672765793089903007414965546793}{10680498344417096327263064504533003858589087021222076823600042447145263} = 1.728461592\ldots$
$\vdots$	$\vdots$

Tablo 1. Doğuran dik üçgenlerin $m_n = Tan(\alpha_n) = \frac{p_n}{q_n}$ eğimleri.

Şimdi de hiçbir yorum yapmadan metot tarafından doğurulan dik üçgenler ile tabletteki dik üçgenlerin eğim açılarına bir bakalım.

Dik Üçgenlerin Eğim Açıları Arasındaki İlişkiler	
Metotla Bulunan Dik Üçgenlerin Eğim Açıları	**Plimpton 322 No'lu Tableti'ne Göre Dik Üçgenlerin Eğim Açıları**

Plimpton 322 no'lu Tableti'ndeki Babilonya Yüksek Matematiği

Mathquake, 27.05.2006

$$[1] \quad u^2 + v^2 = r^{2\,n}$$

n	Der.	Dak.	Sn.	Der.	Dak.	Sn.
0	44	45	37	44	16	51
1	43	48	5	43	19	19
2	42	50	33	42	21	47
3	41	53	1	41	24	15
4	40	55	29	40	26	42
5	39	57	56	39	29	10
6	39	0	24	38	31	38
7	38	2	52	37	34	6
8	37	5	20	36	36	34
9	36	7	48	35	39	2
10	35	10	16	34	41	30
11	34	12	44	33	43	58
12	33	15	12	32	46	26
13	32	17	40	31	48	53
14	31	20	7	30	51	21
15	30	22	35	29	53	49

n	p_n / q_n	Der.	Dak.	Sn.
1	$\frac{12}{5}$	44	45	37
2	$\frac{64}{27}$	44	15	10
3	$\frac{75}{32}$	43	47	14
4	$\frac{125}{54}$	43	16	17
5	$\frac{9}{4}$	42	04	30
6	$\frac{20}{9}$	41	32	40
7	$\frac{54}{25}$	40	18	55
8	$\frac{32}{15}$	39	46	13
9	$\frac{25}{12}$	38	43	05
10	$\frac{81}{40}$	37	26	14
11	2	36	52	12
12	$\frac{48}{25}$	34	58	34
13	$\frac{15}{8}$	33	51	18
14	$\frac{50}{27}$	33	15	43
15	$\frac{9}{5}$	31	53	27

Tablo 2

Bu çift tabloda ilk göze çarpan bulgu, "Z" şeklinde okunan soldaki tablonun ilk 2 satırındaki (sarı renkle ışıklandırılmış) ilk 4 dik üçgenin eğim açıları ile sağdaki tablodaki ilk 4 dik üçgenin eğim açıları arasında çok sıkı bir ilişki olduğudur. Diğer satırlarda ise *n* değeri büyüdükçe eğim açıları arasındaki ilişkilerin bozulduğu görülecektir ki, bu beklenen bir sonuçtur.

Peki Babilliler, soldaki tabloda yer alan 32 dik üçgenden 15 tanesini rastgele mi seçmişlerdi, yoksa bu 15 dik üçgeni seçerken bir metot mu kullandılar?

Bu soruya da yanıt için yine hiçbir yorum yapmadan gözlemlerimize devam edelim ve eğer bu gözlemlerimiz sırasında bulgularla karşılaşırsak, bu bulguların neler olduklarını açıklamaya çalışalım.

İlk gözlemimiz, ki bu, aynı zamanda esas gözlem noktamızdır, 2'şer 2'şer ardışık dik üçgenlerin eğim açıları arasındaki farklara, kısacası ardışık fark açılarına bakmak olacaktır. Bunun için bu dik üçgenlere ait ardışık fark açılarından sağdaki tablodakiler için

$$[54] \quad \nabla(\theta_n) = \theta_n - \theta_{n+1}$$

diyelim (∇ **(Nabla):** Geriye fark alma operatörü), soldaki tabloda yer alan ardışık dik üçgenlerin eğim açılarının farkları [24] nedeniyle daima sabittir:

$$[55] \quad \nabla(\alpha_n - \beta_n) = Tan^{-1}\left(\frac{a_n}{h_n}\right) - Tan^{-1}\left(\frac{a_{n+1}}{h_{n+1}}\right) = Tan^{-1}\left(\frac{a_1^*}{h_1^*}\right) = Tan^{-1}\left(\frac{239}{28560}\right) = 0°28'46.06'' \cong 0;28,46.$$

Eğer burada fark açısının tam olarak $0°30'00'' = 30' = 0;30 = \frac{30}{60} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\circ}$ olmasını istersek tabletteki ilk dik üçgeni doğuran dik üçgenin eğiminin

$$[56] \quad \frac{a_1^*}{h_1^*} = Tan\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow m_1 = \frac{p_1}{q_1} = \frac{1 - Sin\left(\frac{1}{2}\right) + \sqrt{2}\sqrt{1 - Sin\left(\frac{1}{2}\right)}}{Cos\left(\frac{1}{2}\right)} = 2.399394274 \ldots < \frac{12}{5} = 2.4 = \bar{m}_1$$

olması gerekirdi ki, bu gerçek değere göre 4000 yıl önce Babilliler'in harika bir yaklaşım yaptıkları görülür (Bkz. "*Plimpton 322 no'lu Tableti İçin Mathquake'in İnanılmaz Tahmini*").

Not 2. [56]'da $\sqrt{2}$ ve $Sin\left(\frac{1}{2}\right)$ için yaklaşık değerler kullanılarak $(30°, 45°)$ aralığında $30'$ aralıklarla bir trigonometrik cetvel oluşturmak mümkündür. Burada $\sqrt{2}$ için yaklaşık değerlerin bulunması **"Babil Algoritması"** ile mümkün iken $Sin\left(\frac{1}{2}\right)$ için yaklaşık değerlerin bulunmasında trigonometrik formüllerle birlikte sinüsün kuvvet serisinden yararlanılabilinir.

Bu konuda Türk-İslâm Dünyası'na bakıldığında pek çok çalışmanın yapıldığı görülür. Örneğin, trigonometrinin kurucusu ***Ebul Vefa*** ***(Buzcan 940- Bağdat 998)***, $\left(\frac{1}{4}\right)^{\circ} = 15'$ aralıklarla 8 ondalık yerin eşitliğini kullanarak Sinüs Cetveli'ni yapmıştır. ***Ebul Vefa*** bu cetvel için yepyeni bir metot kullanmıştır. Bu konuda ***Dr. Singrid Hunke***, "*AVRUPANIN ÜZERİNE DOĞAN İSLÂM GÜNEŞİ*" adlı eserinde şöyle demektedir (S. 91):

*"**Ebul Vefa**, **El-Battanî**'nin eserini hatırı sayılır derecede geliştirerek virgülden sonra 8. basamağa kadar hesaplama imkânı veren Sinüs cetvellerinin yeni hesaplama yöntemlerini buldu. Batı'nın ilk defa ancak asırlar sonra tırmanarak aşabildiği **Ebul Vefa**'nın ulaştığı bu yüksek kademe, **Hülagü**'nün Maliye Nazırı İran doğumlu **Nasirüddin-et Tûsi** tarafından daha yüksek yeni bir gelişme kademesine ulaştırıldı."*

Teğet fonksiyonları üzerinde birçok çalışmada bulunan ***Ebul Vefa***, günümüzde kullanılan 6 temel sinüs, kosinüs, tanjant, kotanjant, sekant ve kosekant trigonometrik eğrisine (fonksiyonlarına) ait özgü zamanlar ve kendilerine ait özellikleri ilk kez ortaya koymuştur. Onun zamanına kadar hiçbir matematikçinin yapamadığı incelikte trigonometrik çizelgeler düzenlenmiştir. Bunda da yine cebrin tarihine geçen şeyler oldu: Arapların yarattıkları bu bilgiye son şeklini veren İranlıların o üstün başarıları, zamanında Batıya ve Arap aleminin dışına çıkamadı. Avrupa, onların değil, daha önceki bilginlerin ve bu bilgileri takip edenlerin eserlerine dayanarak trigonometriyi geliştirdi.

Öte yandan [56]'daki sonuçla birlikte aşağıdaki tabloda yer alan sonuçlar birleştiğinde, **"YBC 7289 no'lu Tablet"**i ile birlikte yurdumuzda son zamanlarda keşfedilen **"Çatalhöyük Tableti"**ni deşifre ettikten hemen sonra **"Plimpton 322 no'lu Tablet"**inde daha ilk gözlemimde fark ettiğim bulgumun ne kadar isabetli olduğu daha iyi anlaşılmaktadır (ki bu tabletteki ilk bulgum, ilk 4 sıradaki dik üçgenlerin eğim açılarının 30 dakika civarında farklar halinde yazılmış olduğu gerçeği ve bu gerçeğin tablete hâkim olması idi):

n	$\nabla(\theta_n)$
1	44; 45, 37 - 44; 15, 10 = 0; 30, 27
2	44; 15, 10 - 43; 47, 14 = 0; 27, 56
3	43; 47, 14 - 43; 16, 17 = 0; 30, 57
4	43; 16, 17 - 42; 04, 30 = 1; 11, 47
5	42; 04, 30 - 41; 32, 40 = 0; 31, 50
6	41; 32, 40 - 40; 18, 55 = 1; 13, 45
7	40; 18, 55 - 39; 46, 13 = 0; 32, 42
8	39; 46, 13 - 38; 43, 05 = 1; 03, 08
9	38; 43, 05 - 37; 26, 14 = 1; 16, 51
10	37; 26, 14 - 36; 52, 12 = 0; 34, 02
11	36; 52, 12 - 34; 58, 34 = 1; 53, 38
12	34; 58, 34 - 33; 51, 18 = 1; 07, 16
13	33; 51, 18 - 33; 15, 43 = 0; 35, 35
14	33; 15, 43 - 31; 53, 27 = 1; 22, 16

Tablo 3

Bu son tabloda ardışık fark açıları 30 dakika civarında (turuncu renkli) olanların sayısı 7 tanedir ve bu da tablodakilerin yarısı demektir. Diğerleri ise 1 ile 2 derece arasında değişmektedirler (Bkz. "*Plimpton 322 no'lu Tableti İçin Mathquake Deşifrasyonları*").

Bu bulgu bize açıkça şunu söylemektedir: Plimpton 322 no'lu tabletinde $(30°, 45°)$ aralığında 30 dakika aralıklarla dik üçgenlerin yazılması hedeflenmiştir.

Peki, diğer ardışık fark açıları neden 30 dakika civarında verilmedi?

Öncelikle 30 dakika farklar halinde dik üçgenleri yazabilmenin zorluğu [56]'daki yaklaşımın hassasiyetliğinden kaynaklanmaktadır ve Babillilerin hassasiyetliği ise

$$[57] \quad \frac{12}{5} - \frac{1 - Sin\left(\frac{1}{2}\right) + \sqrt{2}\sqrt{1 - Sin\left(\frac{1}{2}\right)}}{Cos\left(\frac{1}{2}\right)} = 2.4\text{-}2.399394274\ldots = 0.000(6057250046\ldots)$$

mutlak hatasına göre 3 ondalık olduğu görülmektedir ki, 4000 yıl önce bu hassasiyeti yakalayabilmek gerçekten de bir harikadır!

Şu hâlde tabletteki ilk dik üçgen için hassasiyetlik bu olmak üzere 2., 3. ve 4. dik üçgenlerin hassasiyetlerinin de çok iyi olduğu görülmektedir. Çünkü tabletteki ilk 4 dik üçgenin eğim açıları arasındaki farklar 30 dakika civarındadır. Fakat tablette bundan sonraki dik üçgenlerde aynı hassaslığın olmaması bu gerçeği değiştirmemektedir ve bunun nedenleri tamamen ortadadır. Eğer Babilliler böyle bir Trigonometrik Cetvel hazırlamaya çalışsalardı, Tablo 1'de Babil Kulesi'ni andıran tabloları göz önüne almaları gerekirdi ki, bu durumda ne kadar iyi yaklaşım yaparsanız yapın dik üçgenlerin doğuranları, dolayısıyla dik üçgenlerin kenarlarının uzunlukları inanılmaz büyüklükte olurdu ve bu da tablet boyutlarının çok ama çok büyük olması demektir. Dolayısıyla tabletin bu temel zorluğu aşacak şekilde hazırlanmasında, yukarıdaki son tablodan da görüleceği gibi, ardışık fark açıları 30 dakika civarında olan tablete hâkim dik üçgenlerle birlikte, ardışık fark açıları 1-2 derece arasında olan dik üçgenlerin de interpolasyon metoduna elverişli bir şekilde hazırlanmış olması ya da bu duruma uygun düşmesi tablonun (tabletin) doğrultulmasına neden olmuştur diyebilirim (ki bu temel zorluğun nasıl aşıldığına ilişkin bir diğer örneği **"YBC 7289 no'lu Tablet"**te görebilirsiniz).

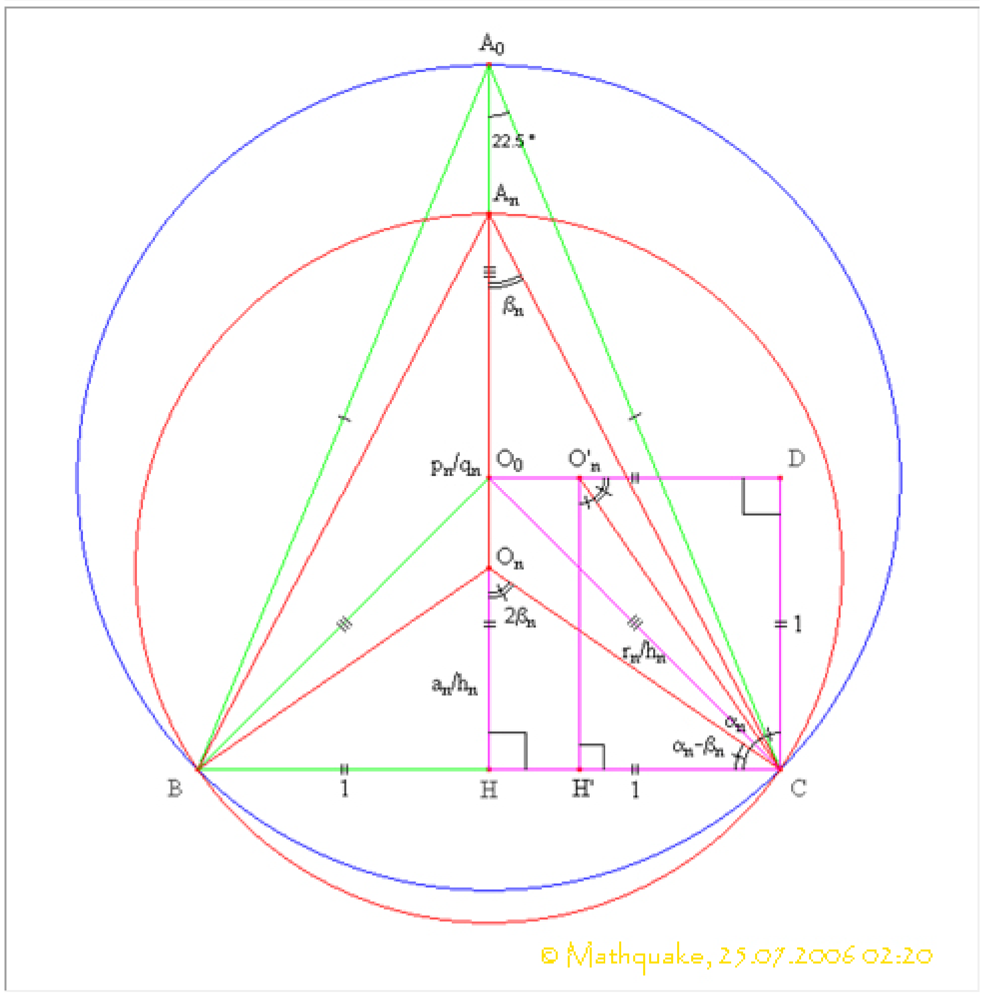
2. Babil Dik Üçgenleriyle Trigonometrik Cetvelin İnşası

Şüphesiz böyle bir cetvelin inşasının zorluğu ilk dik üçgenin doğuranlarının, dolayısıyla kenarlarının uzunluklarının belirlenmesinde ortaya çıkmaktadır. Örneğin Plimpton 322 no'lu tabletinde bunun çok güzel bir örneğini görmekteyiz. Orada $(30°, 45°)$ aralığında 30 dakika aralıklarla bir trigonometrik cetvel oluşturmak için [56]'daki gerçek değere iyi bir yaklaşımda bulunmak gerektiğini görmüştük!

Şu hâlde bir trigonometrik cetvelin inşası için Şekil 1'deki $A_nH_nR_n$ dik üçgenini doğuran $P_nQ_nR_n$ dik üçgenindeki dik kenarların uzunlukları olan p_n ve q_n'nin arasındaki ilişkinin, dolayısıyla bu 2 dik üçgen arasındaki bağlantının kesin olarak bilinmesi gerekir ama nasıl?

Bu mükemmel sorunun yanıtını Susa Matematik Tableti şu şekilde vermektedir:

Doğuran ile Doğurulan Dik Üçgenler Arasındaki Geometrik İlişkiler



Şekil 3

Susa tabletinden elde edilen bu şekilde CHO_0D birim karesi için çizilmiş $|A_0B| = |A_0C|$ için A_0BC ikizkenar üçgeni ve merkezi O_0 ve yarıçapı $|O_0C|$ şeklinde birim karenin köşegeni olan çevrel çemberi verilmektedir. Buna göre Babil metodu nedeniyle (a_n, h_n, r_n) dik üçgeni $\left(\frac{a_n}{h_n}, 1, \frac{r_n}{h_n}\right)$ olarak O_nCH dik üçgeniyle ve bu dik üçgeni doğuran dik üçgen de A_nCH olarak $\left(\frac{p_n}{q_n}, 1, \sqrt{\left(\frac{p_n}{q_n}\right)^2 + 1}\right)$ sıralı 3'lüsüyle yer almaktadır ve bu 2 dik üçgen arasındaki şekildeki bağlantıya göre eğim açıları arasındaki ilişkiler şu şekilde ortaya çıkmaktadır:

$\alpha_n = Tan^{-1}\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$	$\alpha_n - \beta_n = Tan^{-1}\left(\frac{a_n}{h_n}\right)$
$0°$	$-90°$
$15°$	$-60°$
$22.5°$	$-45°$
$30°$	$-30°$
$45°$	$0°$
$60°$	$30°$
$67.5°$	$45°$
$75°$	$60°$
$90°$	$90°$

Tablo 4

Bu tabloya göre şu 3 durumun mevcut olduğu görülür:

1. $\frac{p_n}{q_n} < 1$ ise: $0° < \alpha_n < 45°$ iken $-90° < \alpha_n - \beta_n < 0°$ olur.
2. $\frac{p_n}{q_n} = 1$ ise: $\alpha_n = 45°$ iken $\alpha_n - \beta_n = 0°$ olur.
3. $1 < \frac{p_n}{q_n}$ ise: $45° < \alpha_n < 90°$ iken $0° < \alpha_n - \beta_n < 90°$ olur.

Demek ki (a_n, h_n, r_n) dik üçgenine ait bileşenlerin (p_n, q_n) doğuranları cinsinden ifadeleri daima

$$[58] \quad a_n = p_n^2 - q_n^2, h_n = 2p_nq_n, r_n = p_n^2 + q_n^2$$

şeklinde alınırsa $q_n < p_n$ ilişkisi nedeniyle 3. durum geçerli olur. Aksi takdirde 1. durum geçerli olacaktır ki, bu belirsizliği ortadan kaldırabilmenin bir tek yolu var: Simetri Kavramı.

Simetri kavramına göre eğer $0° < \alpha_n - \beta_n < 45°$ ise O_nCH dik üçgeninin eğiminden $\frac{a_n}{h_n} < 1$ olduğu görülmektedir, ancak eğer $45° < \alpha_n - \beta_n < 90°$ ise $O_n'CH'$ dik üçgeninin eğiminden $1 < \frac{a_n}{h_n}$ şartı ortaya çıkmaktadır. Çünkü O_nCH dik üçgeninin $[O_0C]$ birim karenin köşegenine göre simetriği $O_n'CD$ dik üçgenidir ve bu dik üçgen yardımıyla $O_nCH \cong CO_n'H'$ eş dik üçgenleri meydana gelmektedir. Bu yüzden a_n ve h_n simetrik olarak rol oynarlar. Aynı şekilde, p_n ve q_n'ler de kendi aralarında simetrik rol oynarlar.

Böylece bu sonuçla çalışmamız boyunca ortaya çıkan belirsizlik bu şekilde tamamen ortadan kaldırılmış olmaktadır. Söz konusu bu çalışmada yer alan herhangi bir formülde $1 < \frac{a_n}{h_n}$ şartı belirsizlik meydana getiriyorsa (yani uzunluğun negatif bir sayı olması), simetri kavramıyla, $\frac{a_n}{h_n} < 1$ şartına geçiş için a_n ve h_n simetrik olarak yer değiştirebilir. Aynı şey p_n ve q_n için de geçerlidir.

Ayrıca siz, bir trigonometrik cetvel için (a_n, h_n, r_n) dik üçgenini bulurken, farkında olsanız da olmasanız da, simetri kavramı nedeniyle, bu dik üçgenin tepe açısını eğim açısı olarak kabul eden bir dik üçgen daha bulmuş oluyorsunuz.

Şu hâlde Tablo 4'deki sonuçları $q_n = 1$ ve $p_n = n$ pozitif tam sayıları için ele alırsak (a_n, h_n, r_n) dik üçgeninin $\alpha_n - \beta_n$ eğim açısına ait tablo şu şekilde ortaya çıkar:

n	$\mathrm{Tan}(\gamma_n)$
1	$00^\circ 00' 0.''$
2	$36^\circ 52' 11.63''$
3	$53^\circ 07' 48.37''$
4	$61^\circ 55' 39.05''$
5	$67^\circ 22' 48.49''$
6	$71^\circ 04' 31.28''$
7	$73^\circ 44' 23.26''$
8	$75^\circ 44' 59.88''$
9	$77^\circ 19' 10.62''$
10	$78^\circ 34' 43.73''$
11	$79^\circ 36' 40.11''$
12	$80^\circ 28' 21.78''$
13	$81^\circ 12' 9.32''$
14	$81^\circ 49' 43.56''$
15	$82^\circ 22' 18.66''$
16	$82^\circ 50' 50.39''$
17	$83^\circ 16' 1.48''$
18	$83^\circ 38' 25.22''$
19	$83^\circ 58' 27.93''$
20	$84^\circ 16' 30.68''$
$\vdots$	$\vdots$

Tablo 5

Bu tabloya göre Plimpton 322 no'lu tabletindeki 15 dik üçgenin eğim açıları $(30°, 45°)$ aralığında değiştiğinden dolayı $30° < \alpha_n - \beta_n < 45°$ için $60° < \alpha_n < 67.5°$ olur ve bu dik üçgenlere ait doğuranların oranları (doğuran dik üçgenlerdeki eğimler) için $1 \leq \frac{p_n}{q_n} \leq 2$ gerçeği ortaya çıkar. Demek ki tabletteki dik üçgenlerin doğuranları arasında $p_n = 2q_n + k_n, q_n + k_n$ şeklinde ilişkiler var ve tabletteki 1-11. satırlar arasında yer alan dik üçgenlerin doğuranları arasındaki ilişki $p_n = 2q_n + k_n$ iken 12-15. satırlar arasında yer alan dik üçgenlerin doğuranları arasındaki ilişki de $p_n = q_n + k_n$ şeklinde kesin olarak belirlenmiştir. Bu 2 bölümlenmeye neden olan dik üçgen ise hepimizin yakından tanıdığı bir geçiş üçgeni olan (3,4,5) Kutsal Üçgeni'dir.

Gerçekten de tabletteki dik üçgenlerin doğuranları arasındaki ilişkiler aşağıdaki tablodaki gibi ortaya çıkmaktadır:

n	p_n	q_n	$p_n = 2q_n + k_n$
1	12	5	$12 = 2 \times 5 + 2$
2	64	27	$64 = 2 \times 27 + 10$
3	75	32	$75 = 2 \times 32 + 11$
4	125	54	$125 = 2 \times 54 + 17$
5	9	4	$9 = 2 \times 4 + 1$
6	20	9	$20 = 2 \times 9 + 2$
7	54	25	$54 = 2 \times 25 + 4$
8	32	15	$32 = 2 \times 15 + 2$
9	25	12	$25 = 2 \times 12 + 1$
10	81	40	$81 = 2 \times 40 + 1$
11	60	30	$60 = 2 \times 30 + 0$
n	p_n	q_n	$p_n = q_n + k_n$
12	48	25	$48 = 1 \times 25 + 23$
13	15	8	$15 = 1 \times 8 + 7$
14	50	27	$50 = 1 \times 27 + 23$
15	9	5	$9 = 1 \times 5 + 4$

Tablo 6

Bu sonuçlara göre aşağıdaki teorem geçerli olur:

Genelleştirilmiş Babil Teoremi (*Mathquake*, 07.05.2006, 17:00). Plimpton 322 no'lu tabletine ve yurdumuzda keşfedilen Çatalhöyük tabletine göre (a_n, h_n, r_n) dik üçgeninin kenarlarının uzunlukları [58]'deki gibi olmak üzere

$$[59] \quad m_n = \frac{p_n}{q_n} = (1; a_1, a_2, \dots, a_k)_m \quad (0 \leq a_t \leq m, t = 1,2, \dots, k, k, m \in Z^+, 1 < m)$$

genel algoritmasına göre çok küçük bir açı içinde bile (istenildiği kadar küçültülebilir) sonsuz tane (a_n, h_n, r_n) Babil dik üçgeni vardır. Söz konusu bu genel algoritmayla Tablo 4&5'e göre bir trigonometrik cetvel hazırlanabilir.

Şimdi bu teorem için ilkin güzel bir örnek teşkil eden yurdumuzda keşfedilmiş **"Çatalhöyük Tableti"** ile başlayalım çalışmamıza!

3. Yurdumuzda Keşfedilen "Çatalhöyük Tableti"

Türkiye'nin güneyindeki Neolitik dönemden kalma Çatalhöyük köyünde, Olmazköy yakınında, İmkânsızdere'de son zamanlarda eski kil tabletlerle dolu bir mağara keşfedildi (**Yazarın Notu.** Bu absürt adres tarifinden böyle bir yer olmadığı açık olmakla birlikte, nedenini 3.2 Sonuçlar'daki 6. Madde'de açıkladım. Yani bu bölümdeki çalışma *"Mathematics in Search of History, Vol. 93, No. 8, P. 647-650, November 2000"* makalesini (ki orijinal linki şuradaydı) iyi niyetle değerlendirmemden gelir ve şimdi A3 formatında 47 sayfada gördüğünüz bu keşif çalışmalarımın olduğu dosyanın (ki dosya orijinalde Microsoft Word 97-2003 belgesi olarak A4 formatında 86 sayfa ve boyutu 7.93 MB'dir ve bunu noterde onaylatmıştım. Şimdi bu dosyayı 17.06.2025, 00:11:07'de Microsoft Office Professional Plus 2024 belgesi olarak A3'te yeniden düzenlediğimde sayfa sayısı 47'ye ve boyutu 3.02 MB'a düştü) son kayıt tarihi 17.08.2006, 10:34:35 ve makalenin sahibi ***Donald T. Barry***'e 15.07.2006, 00:48:56 günü 2 soruluk bir mesaj göndermiştim. Ama Çatalhöyük tabletini bu son tarihten, dolayısıyla ***Donald T. Barry***'nin bana gönderdiği mesajdan çok daha önce çözdüğümden 3. bölümde yer alan Çatalhöyük tableti hakkındaki değerlendirmemi değiştiremedim ve öylece kaldı). Bu tabletlerdeki yazıt, kayıp bir uygarlığın yazısıydı. Amerikalıların yaptıkları araştırmalara göre, "*O, belki tüm Hint-Avrupa dillerinin anası idi*" sonucu çıkmış, fakat ***Atatürk***'e göre bu tabletin bulunduğu yer, Anadolu en aşağı 7000 yıllık Türk yurdu olduğuna göre, tabletteki yazıtın bir Ön-Türk uygarlığına ait olması ihtimali nedeniyle Ön-Türkçe uzmanı olan ***Kâzım MİRŞAN***'dan yardım istedim!

Artık üzülerek söylemek gerekmiyor çünkü bu bir gerçektir: Ülkemiz eskiçağ tarihçileri **"Türklerin Anadolu'dan Atılması"** projesinin yürütüldüğü Batı emperyalizminin etkisinde kaldıkları için eski Anadolu uygarlıklarının Türk kökenli olabilecekleri tezini pek fazla ciddiye almazlar. Hatta bu tezi dile getirenleri en ağır bir şekilde dün eleştirdikleri gibi, bugün de aynı kararlılıkla eleştirmektedirler. Ancak buna rağmen az sayıda da olsa **"geçmişe özgürce bakabilme cesareti gösteren bilim insanlarımız"** eski Anadolu uygarlıklarının Türk kökenli olabileceklerini görmüşlerdir. Örneğin geçmişe özgürce bakabilenlerden ***Halikarnas Balıkçısı***, 1071'den önce de Anadolu'da Türklerin yaşadığını ilk ileri sürenlerdendi!

Resim 1. Bu tablet hakkında 647-648. sayfada şu bilgiler verilir: *"Tablet sayısal bilgi olması gereken 7 satırlık 3 sütundan oluşur. Ne yazık ki, tablet alttan kırılmış ve diğer kısmı henüz bulunamamıştır. Eksik parça hala mağarada bulunabilir, ancak şu anda gösterişli bir New York City dairesinde kitap ayracı olması da aynı derecede olasıdır. Bu tablet diğer tabletlerle aynı genel boyuttaysa, onun en üstteki üçte ikisine sahibiz. Göreviniz, tabi kabul etmeyi seçerseniz, tableti çözmektir. Sütunlardaki ve satırlardaki sayıları belirleyin ve sayısal bilgilerin bir yorumunu geliştirin. Yorumunuza dayanarak, tabletin eksik üçte birinin içeriğini belirleyin."*

Tabletlerden birkaçı matematiksel yazıtlar içerir ve yukarıdaki resimdeki tablet bunlardan birinin tıpkıbasımıdır (ki buna bulunduğu yer itibariyle **"Çatalhöyük Tableti"** diyelim). Resimde görüldüğü üzere bu tablet 3 sütun içerir: Sağdaki ilk sütunda 1'den 7'ye kadar satır numaraları, onun solundaki 2. sütunda hipotenüsler ve soldaki 3. sütunda ise genişlikleri veren sıralı üçlüler mevcuttur. Ne yazık ki tabletin altı kırıktır ve diğer parçası henüz bulunamadı. Kayıp parça hâlâ mağarada olabilir ama bu tablet hakkında ***Donald T. Barry*** tarafından yazılan 4 sayfalık "*Mathematics in Search of History*" makalesinde geçtiği üzere yapılan incelemelerde şu anda tıpkıbasımını görmüş olduğunuz yukarıdaki resme göre tabletin 3'te 2'sinin mevcut olduğu sonucu çıkmış. Amerikan Bölgeler Matematik Ligi'nde Problem Yazma Kürsüsü'ndeki ***Don Barry*** (Phillips Akademisi'nde Matematik Öğretmeni, Andover, MA 01810. dbarry@andover.edu) başkanlığında bir grup öğrenci tarafından yürütülen çalışmalarda bu tabletin tam çözümü araştırmanın son gününde ***John Maglio***'nun keşfiyle ortaya çıktı.

385	552	673	1
85	132	157	2
33	56	65	3
16	30	34	4
217	456	505	5
5	12	13	6
145	408	433	7

Fig. 7
John's Pythagorean triples

Tablo 7. Bu tablo hakkında 650. sayfada bilgiler verilir: *"**John**'un keşifleri dersin son gününde geldi. Bu bilgin topluluğu, tablo için uygulanabilir, düzeltilmiş bir giriş seti bulduğuna inanarak, analizini yüksek bir notla sonlandırdı."*

Bu tabloda ***John***'un keşfini hep birlikte görüyoruz ve bu keşif sınıfça yapılan tartışmalar sonunda tabletteki sembollerin anlamlarının çözülmesiyle birlikte dik üçgenlerin 2. sütundaki hipotenüsleri ve 3. sütundaki genişlikleri veren sayıların 12 tabanında sağdan sola doğru okunmasıyla gerçekleşmiştir. O halde bu çözümlemeyle birlikte aşağıdaki çözümlememe göre tabletteki semboller ve anlamları yani bu sembollere 12 tabanında karşılık gelen rakamlar şu şekilde belirir:

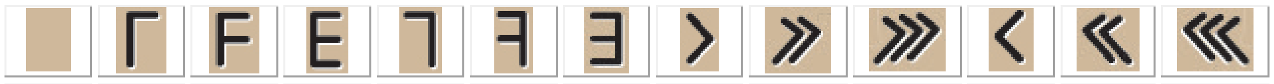
Keşfedildiği Yer: Türkiye'nin güneyindeki Neolitik dönemden kalma Çatalhöyük Köyü/Olmazköy yakını/İmkânsızdere.

Görüldüğü Zaman: Bilinmiyor.

Tip: C1 (Modern alfabedeki bazı harflerin kullanılmasıyla 1. türden konumlu sayılama). Taban: 12 ($k = 4$).

Sıfır İmi Gereği: VAR. Tıpkı Babil sayılamasındaki gibi bir "boşluk" kullanılmaktadır (Bkz. M.Ö. 1900-1600 tarihli Plimpton 322 ve YBC 7289 no'lu tabletler). Her şeyden önce "BOŞ"un eşanlamlısı olan bu im rakam betimlemelerinde belli bir basamaktaki birimin yokluğunu belirtir.

Betimleme Olanağı: Sınırlı.

Sembol													
Anlam	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**

Tablo 8. Tabletteki semboller ve anlamları.

Bu sembollerin (alfabetik) sıralamadaki yazımları tamamen matematikseldir: 1 ile 4 rakamlarına karşılık gelen semboller birbirinin tersidir. Tablodan görüleceği gibi 1 rakamına "Ög" sembolü karşılık gelirken, buna karşılık 4 rakamı için "Ög'ün Tersi" yazılmış. Yine 2 rakamına "F" harfi karşılık gelirken 5 rakamına da "F'nin Tersi" gelmektedir. Aynı şekilde 3 rakamına "E" harfi karşılık gelirken 6 rakamına da "E'nin Tersi"nin geldiği görülmektedir ve diğer rakamlar için de yine aynı özelliğin yani birbirinin tersi olan sembollerin karşılık geldikleri görülür. Gerçekten de 7 rakamına "Büyüktür" işareti gelirken 10 rakamına karşılık da "Büyüktür"ün tersi olan "Küçüktür" sembolü gelmektedir. Bu sembolün 60 tabanlı Babil Sayı Sistemi'ndeki karşılığı "10"dur. Daha sonra 8 rakamına "İç içe Geçmiş 2 Tane Büyüktür" işareti gelirken 11 rakamına bu işaretin tersi gelmektedir ve yine Babillilerin sayı sisteminde bu sembol için 20 rakamı karşılık gelmektedir (ki Babillilerin 20 rakamı burada 11 rakamına karşılık gelen sembolle gösterilmiştir, ancak $20 \equiv 8 \pmod{12}$ yerine ilk olarak bu sembolün tersi gelmektedir). Ve son olarak 9 rakamına "İç İçe Geçmiş 3 Tane Büyüktür" işareti gelirken 12 rakamına da tablette olmayan ama "Ters Alma Özelliği" nedeniyle 9'un yerine gelen sembolün tersi gelecektir.

Söz konusu 12 tabanındaki rakamlara karşılık gelen sembollerin bu şekilde birbirinin tersi olmaktan başka bir başka özelliği daha var: Örneğin 4 rakamına karşılık gelen "Ög'ün Tersi" sembolünü biraz yatırırsanız 7 rakamına karşılık gelen "Büyüktür" sembolüne benzer bir şekle gelecektir. Buna göre 5 rakamındaki sembolden 8 rakamındaki sembole ve 6 rakamındaki sembolden 9 rakamındaki sembole geçişler yapıldığında, Modüler Aritmetik ile tam bir uyum içinde olan

$$[60] \quad \left.\begin{array}{l} 1 \leftrightarrow 4 \rightarrow 7 \leftrightarrow 10 \Rightarrow 3k+1 \\ 2 \leftrightarrow 5 \rightarrow 8 \leftrightarrow 11 \Rightarrow 3k+2 \\ 3 \leftrightarrow 6 \rightarrow 9 \leftrightarrow 12 \Rightarrow 3k+3 \end{array}\right\} \Rightarrow 3k+m \quad (k,m = 0,1,2,3)$$

sonuçları elde edilir. Buna göre 12 tabanındaki rakamların $Satır \times Sütun = 3 \times 4 = 12$ formatında yazıldıkları görülmektedir.

Not 3 ("Gama" Sembolünün Kökeni Hakkında). "Gamalı Haç"ın bir parçası olan bu sembol, Mu'nun Kutsal Sembolleri'nden *"Atatürk ve Kayıp Kıta MU"* kitabının 65. sayfasındaki 13. Sembol (ki bu sembolü ilk kez *"James Churchward: Kayıp Uygarlıklar II, KAYIP KITA MU", Eski Kutsal Semboller'den 13. Sembol, S. 354*'te görmüştüm) olarak yer almaktadır. "2 Kenarlı Kare" olarak tabir edilen bu sembol fevkalâde uzak bir geçmişe sahiptir (Bkz. *"Kayıp Uygarlıklar-III, MU'nun Kutsal Sembolleri"*, S. 124-127). ***Churchward***, bu sembolün tam olarak ne zaman ortaya çıktığı hakkında *"Bunu ne bilebilirim, hatta ne de bir tahmin yürütebilirim!"* demiştir!

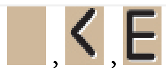
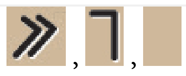
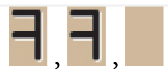
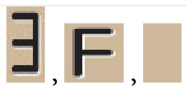
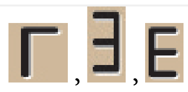
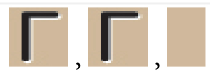
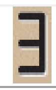
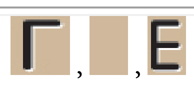
2 kenarı olan kare, "İnşa Edici" anlamına gelen kadim bir kelime adı altında anılır (Bkz. S. 72-73). Yine "Gamalı Haç" olarak tabir edilen sembol, Mu'nun Kutsal Sembolleri'nden biri olan "Kutsal 4'lü" sembolünün evrimiyle ortaya çıkmış bir semboldür. "Kutsal 4'lü" sembolünün pek çok anlamı olmakla birlikte, "4 Büyük İnşa Edici, 4 Büyük Mimar, 4 Büyük Geometrici" anlamlarını vererek, "2 Kenarlı Kare" sembolünün "Kutsal 4'lü"nün bir parçası olduğuna işaret etmeyi yeterli görüyoruz (Bkz. S. 64-81). Biraz daha ileriye gidersek, yukarıdaki rakamlı alfabedeki 1'den 6'ya kadar olan sembollerin "Gamalı Haç"ın parçaları olduğu görülecektir.

Eski çağlardan beri birçok toplum tarafından kullanılan Gamalı haç aynı zamanda Doğu kökenli bir Ön-Türk sembolüydü. Batı Anadolu'da Hasan Kale'de bulunan erken bronz çağına ait (M.Ö. 3200-3000) Beycesultan Anıtı'nın üzerindeki Ön-Türkçe yazılar arasında bir de Gamalı haç sembolü vardır. Gamalı haç "Uç" ya da "Ög" biçiminde okunan kozmik ve felsefi değeri olan bir Ön-Türk sembolüdür. İstanbul Arkeoloji Müzesi'nde "Bizans Sikkeleri Koleksiyonu"nda 1 numara ile kayıtlı olan (M.Ö. 500) ve Helenistik döneme ait olduğu belirtilen bir paranın ön yüzünde Gamalı haç sembolü vardır (Bkz. İlyada, XXIII, 44-46; Fattah, age, S. 160). Bir Ön-Türkçe uzmanı olan ***Kâzım MİRŞAN***, Kandıra Hazinesi'ne ait bu sikkenin üzerindeki Gamalı haç sembolünün "Ög" biçiminde okunması gerektiğini belirterek, Ön-Türkçe anlamının "Yüksek seviyede düşünce" olduğunu ileri sürmüştür ([1]). ***Mirşan***'a göre Gamalı haç sembolü Orta Asya'dan yapılan Ön-Türk göçleriyle Hindistan'ın İndüs Vadisi'ne inmiş, oradan da Batı'ya, Ön Asya'ya ve Yunanistan'a geçmiştir. Gamalı haçın Ön-Türkçe'de "felsefi düşünce" anlamına gelen "Ög" biçimindeki kullanımı Yunanistan'da ses değişimine uğrayarak "Gama" biçimine dönüşmüştür (Bkz. Jordanes, S. 117'den Fattah, age, S. 160).

"Ög" diye okunan bu damga Antik Grek alfabesine "Gama" harfi olarak girdiğinden, 4 tane Ög'ün döner şekilde düzenlenmesiyle meydana gelen haç şekli Yunanca "Gamalı Haç" diye yanlış okunmuştur. Ön-Türk göçleriyle Hindistan'a geçen bu damga, ***Adolf HITLER*** tarafından NAZİ Partisi amblemi haline dönüştürülmüştür. ***HITLER***, kendi elleriyle çizdiği bu amblemi –ki hayata çok yetenekli bir sanatçı olarak başlamıştı– tanıtırken *"Basit ve çarpıcı"* olarak nitelemişti ve *"Anlamı nedir?"* sorusuna ise yanıtı şu olmuştu: *"Fethedilemez"* (Bkz. *"Hitler: Kötülüğün Yükselişi"*, 46:09-47:07. Nazi Almanya'sının bayrağının ortaya çıkışı 40:13-41:26'dadır). Gamalı haçın Türk kökenli bir astrolojik simge olduğunu ileri sürenler de vardır. Yine siyasi bir simgeye dönüştürülen İsrail bayrağındaki "6 Köşeli Yıldız" Mu'nun kutsal sembollerinden biridir (Bkz. S. 43, 130. Bu sembole "Siyon Yıldızı" demiştim. Bkz. *"Genelleştirilmiş Napolyon Teoremi"*, S. 16).

([1]) ***Mirşan***, bugün kullanılan "Öğe" kelimesinin de "Ög" kökenli olduğunu ileri sürmektedir (Bkz. Tarcan, age, S. 260).

Şimdi tabletteki sembollerin anlamlarını çözdüğümüze göre, tabletteki sayıları okumaya geçebiliriz:

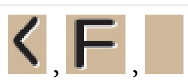
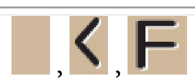
Dik Üçgenin Genişliği	Dik Üçgenin Hipotenüsü	Satır No
		
0, 10, 3	1, 8, 4	1
0,10,3 → 3,10,0 → $3.12^2 + 10.12 + 0 = 552$	1,8,4 → 4,8,1 → $4.12^2 + 8.12 + 1 = 673$	
		
0, 11, 0	1, 1, 1	2
0,11,0 → 0,11,0 → $0.12^2 + 11.12 + 0 = 132$	1,1,1 → 1,1,1 → $1.12^2 + 1.12 + 1 = 157$	
		
8, 4, 0	5, 5, 0	3
8,4,0 → 0,4,8 → $0.12^2 + 4.12 + 8 = 56$	5,5,0 → 0,5,5 → $0.12^2 + 5.12 + 5 = 65$	
		
6, 2, 0	10, 3, 0	4
6,2,0 → 0,2,6 → $0.12^2 + 2.12 + 6 = 30$	10,3,0 → 0,3,10 → $0.12^2 + 3.12 + 10 = 46$	
		
0, 2, 3	1, 6, 3	5
0,2,3 → 3,2,0 → $3.12^2 + 2.12 + 0 = 456$	1,6,3 → 3,6,1 → $3.12^2 + 6.12 + 1 = 505$	
		
0, 1, 0	1, 1, 0	6
0,1,0 → 0,1,0 → $0.12^2 + 1.12 + 0 = 12$	1,1,0 → 0,1,1 → $0.12^2 + 1.12 + 1 = 13$	
		
2, 9, 2	1, 0, 3	7
2,9,2 → 2,9,2 → $2.12^2 + 9.12 + 2 = 398$	1,0,3 → 3,0,1 → $3.12^2 + 0.12 + 1 = 433$	

Tablo 9. Resim 1'deki sembollerin 12 tabanındaki basamak değerleri ve her bir satırdaki dik üçgenin genişliğini ve hipotenüsünü veren değerler. Bu okumayı Şekil 2'de (ki Şekil 3'teki ters çeviri olmakla birlikte her 2 tabloda boşlukların yerine "0" gelir, çünkü tam sayılar 12 tabanında 3 basamak halinde yazılırlar) ve çevirmeyi Şekil 3, 5, 6, 7'de görebilirsiniz (ki doğru çeviri en sonunda ***John Maglio*** tarafından Şekil 7'de yapılmıştır). Bu yönüyle Çatalhöyük tableti Plimpton 322 no'lu tablete benzer.

Bu tablo ile ***John***'un Tablo 7'deki sonuçları karşılaştırırsak, bu tabloda 2 tane basit yazım hatasının olduğu görülür:

1. İlk hatanın düzeltilmiş şekli şudur: 4. Satır-2. Sütun'da yer alan 46 sayısı yerine 34 gelmelidir. Çünkü dik üçgen bağıntısına göre $h_4 = 30$ birim ise $r_4 = 34$ birim olmalı ki $a_4 = 16$ birim olarak elde edilsin. Bu hata büyük bir olasılıkla $a_4 + h_4 = 30 + 16 = 46$ şeklinde okunmasından kaynaklandı. Dikkat edilirse $r_4 - a_4 = 46 - 30 = 16 = 4^2$'dir ancak $r_4 + a_4 = 46 + 30 = 76$ sayısı bir tam kare değildir.
2. İkincisi hata ise 7. Satır-3. Sütun'da yazılan 398 sayısıdır. Burada da 398 yerine 408 sayısı gelmelidir. Bu durumda $(a_7, h_7, r_7) = (145{,}408{,}433)$ sıralı üçlüsü elde edilir. Eğer 398'e karşılık gelen sembolleri tersten yazar ve okursak, ki bu mümkündür, 10 tabanındaki karşılığı 384 olacaktı ve $r_7 - h_7 = 433 - 384 = 49 = 7^2$ tam karesi elde edilecekti. Bu şekilde bir işlemin yapılması mümkündür çünkü $h_7 = 2p_7q_7 = 2 \times 16 \times 12 = 384$ olması çok dikkat çekmektedir. Bu da hatanın nereden kaynaklandığını bize açıklar. Yani 7. Satır-3. Sütun'daki sayının $h_7 = 2p_7q_7 = 2 \times 17 \times 12 = 408$ olması gerekirken bu yanılgı nedeniyle 384'e karşılık gelen sembollerin tersten yazılmasıyla hatalı olan 398 sayısı elde edilmiştir.

Şu hâlde bu basit hataların düzeltilmiş şekliyle tabletteki 4. ve 7. satırların doğrusu şu şekilde olur:

Dik Üçgenin Genişliği	Dik Üçgenin Hipotenüsü	Satır No
		
6, 2, 0	10, 2, 0	4
6,2,0 → 0,2,6 → $0.12^2 + 2.12 + 6 = 30$	10,2,0 → 0,2,10 → $0.12^2 + 2.12 + 10 = 34$	
		
0, 10, 2	1, 0, 3	7
0,10,2 → 2,10,0 → $2.12^2 + 10.12 + 0 = 408$	1,0,3 → 3,0,1 → $3.12^2 + 0.12 + 1 = 433$	

Tablo 10. Tablo 9'daki 4. ve 7. satırların düzeltilmiş şekli. Tablo 7'deki alıntının devamında şu sonuçlar geçer: *"Öğrencilerim 34 yerine 46'nın neden göründüğüne dair makul bir açıklamaya ulaştıklarını düşündüler ve bir önceki sütundaki tüm girişlerin tek olmak zorunda olmadığına ikna oldular. 398'in 408 yerine nasıl yazıldığına dair açıklamalarından memnun değillerdi, ancak 408 ve 433'ün doğru olduğuna kuvvetle inanıyorlardı. Ne yazık ki tableti daha fazla incelemek için zamanımız yoktu ve tabletin Pisagor üçlülerinin rastgele mi yoksa sıralı bir koleksiyonu mu olduğunu düşünemedik. Tabletin eksik alt üçte birlik kısmındaki girişleri belirlemek için de zamanımız yoktu."*

3.1. Çatalhüyük Tableti'nin Matematiksel-Astronomiksel Çözümü

Yurdumuzda keşfedilen Çatalhöyük tabletimizde 7 tane (a_n, h_n, r_n) dik üçgeninin genişlikleri ve hipotenüsleri sıralı bir şekilde verilmiştir. Burada yine (a_n, h_n, r_n) dik üçgeninin kenarları a_n: Genişlik, h_n: Yükseklik, r_n: Hipotenüs olarak tanımlanırsalar, kenarların uzunlukları (p_n, q_n) doğuranlarıyla [58]'den bulunur.

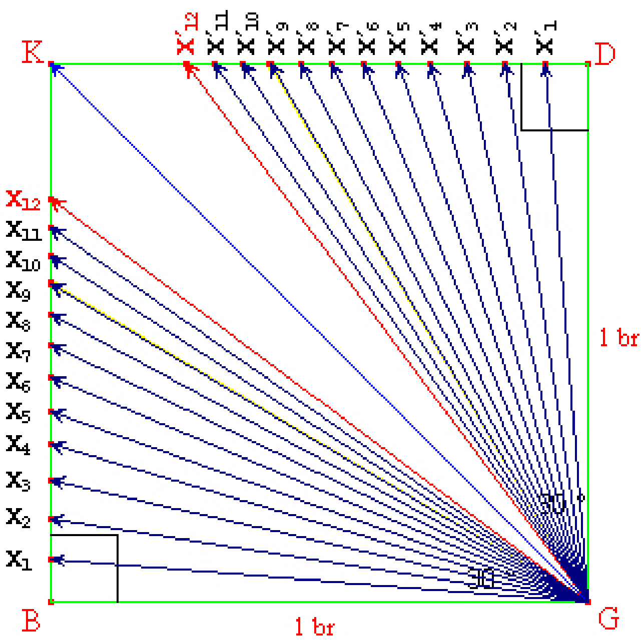
Tabletimizdeki bu sayılar nasıl bulunmuştur ve hangi kurallara göre sıralanmıştır?

Bu sorunun yanıtı gayet basittir. Çünkü tabletimizde verilen a_n genişlikleri ve r_n hipotenüsleriyle [58]'den (p_n, q_n) doğuranları kolaylıkla bulunur. Bu durumda (p_n, q_n) doğuranlarının 12 tabanında bir seriden elde edildikleri görülmektedir.

Şu hâlde q_n'ler, Plimpton 322 no'lu tabletindeki gibi, 12'nin doğal bölenleri olduğundan 12'nin asal çarpanları olan 2 ve 3 sayılarını ihtiva eden birer tam sayı olurlar. Dolayısıyla q_n ve q_n^{-1} sayıları 12 tabanında sonlu olurlar, ancak aynı özellik p_n sayıları için geçerli değildir. Çünkü her n için p_n 12 tabanında sonlu iken p_n^{-1} daima sonlu değildir. Buradan da dik üçgenlerin $h_n = 2p_nq_n$ yüksekliklerinin 12 tabanında daima 2 ve 3 asal çarpanlarını içermeyen sonlu birer tam sayı oldukları ama h_n^{-1} tersinin sonlu olmadıkları sonucu çıkar.

Peki bu dik üçgenlerin seri bir şekilde bulunmasında orijin (başlangıç) noktası nerede seçilmiş idi?

Aşağıdaki çözümde görüleceğe üzere bu dik üçgenlerin bulunması için seçilen orijin noktasının hepimizin yakından tanıdığı "Kutsal Üçgen" yani (3,4,5) geçiş dik üçgeni olduğu görülecektir.



Şekil 4. Tabletteki dik üçgenlerin Tablo 11'deki $12 - n$'ye göre eğim açılarına göre pozisyonları. Fakat bu dik üçgenler KBGD karesinin $[BG]$ köşegenine göre simetrik olduklarından çifte pozisyona sahiptirler yani eğim açıları çifte okunabilir. Örneğin GBX_1 dik üçgeninin eğim açısı Tablo 11'e göre $\theta_1 = 04^\circ 34' 52.39''$ iken GBX_1 dik üçgeninin $[BG]$ köşegenine simetrisi olan $GBX_1{}'$ dik üçgeninin eğim açısı $\theta_1' = 90^\circ - \theta_1 = 90^\circ - 04^\circ 34' 52.39'' = 85^\circ 25' 07.21''$ olur. Yani tabletteki dik üçgenlerin Plimpton 322 no'lu tabletindeki gibi çifte kullanımı söz konusudur.

Şekildeki GBX_{12} dik üçgeni (3,4,5) üçlüsünü gösterir ve $n = 1,2, \dots ,11$ için GBX_n dik üçgenleri de tabletimizdeki diğer dik üçgenleri gösterir. Bu dik üçgenlerin eğim (taban) açılarına $\measuredangle(X_nGB) = \theta_n$ dersek tepe açıları $\measuredangle(BX_nG) = \theta_n'$ olur. Ayrıca GBX_n dik üçgenleri KBGD birim karesinin $[GK]$ köşegenine göre simetrik olduklarından GDX_n' dik üçgenleri elde edilir ki, $GBX_n \cong GDX_n'$ (eş dik üçgenler) nedeniyle X_n' noktalarından birim karenin $[BG]$ kenarına dikmeler indirilirse, yani GDX_n' dik üçgenleri dikdörtgenlere tamamlanırsalar, bu dikdörtgenlerdeki 2. dik üçgenlerin eğim açıları GBX_n dik üçgenlerinin tepe açıları olur ve böylece simetri kavramı nedeniyle tabletimizdeki GBX_n dik üçgenlerini bulurken, GBX_n dik üçgenlerinin tepe açılarını eğim açıları olarak kabul eden dik üçgenleri de otomatikman bulmuş oluruz.

Şu hâlde tabletimizdeki dik üçgenleri bulmak için orijin olarak seçilen (3,4,5) dik üçgeninin doğuranları 12 tabanında şu şekilde bulunur: Eğer ***Neugebauer***'in çözüm prosedürünü kullanırsam (ki ***Neugebauer*** Plimpton 322 no'lu tabletteki dikdörtgenin köşegenini d (ki bu dik üçgende hipotenüse karşılık gelir) ve yüksekliğini ℓ ile göstererek ve p ve q doğuranlarının birer düzgün sayı olması hesabıyla $\frac{d}{\ell} = \frac{1}{2}(p.\overline{q} + \overline{p}.q) \left(= \frac{\frac{p}{q} + \frac{q}{p}}{2} \right)$ ve bunun karesine 1 ekleyerek son sütundaki 60 tabanlı sayıların elde edilebileceğini söylemişti (Bkz. "*Matematiksel Çivi Yazıtları (Mathematical Cuneiform Texts), New Heaven, Conn., 1945*", S. 41, (3) ve "*Otto Neugebauer: The Exact Sciences in Antiquity (1951,1957,1969), 2nd ed./Princeton, NJ: Brown University Press; reprint ed./New York: Dover, 1969*", S. 39). Ama diğer taraftan b genişliğinin ℓ yüksekliğine $\frac{b}{\ell} = \frac{\frac{p}{q} - \frac{q}{p}}{2} = \frac{1}{2}(p.\overline{q} - \overline{p}.q)$ oranı da mevcuttur) ilkin

$$\frac{\frac{p_{12}}{q_{12}} - \left(\frac{p_{12}}{q_{12}}\right)^{-1}}{2} = \frac{m_{12} - m_{12}^{-1}}{2} = \frac{a_{12}}{h_{12}} = \frac{3}{4} = 0;9 \Rightarrow m_{12}^2 - 1;6m_{12} - 1 = 0$$

eşitliklerinden (ki burada 12 tabanında yazılan sayılar $1;6 = 1 + \frac{6}{12} = \frac{3}{2}$ ve $0;9 = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$'e karşılık gelir)

$$[61] \quad m_{12}^2 - 2 \times 0;9m_{12} - 1 = 0$$

denklemi elde edilir ve bu 2. dereceden denklemin pozitif kökünden (3,4,5) dik üçgeninin doğuranları

$$m_{12}^2 - 2\times 0;9m_{12} - 1 = 0 \Rightarrow m_{12}^2 - 2\times 0;9m_{12} + 0;9^2 = 1 + 0;9^2 \Rightarrow (m_{12} - 0;9)^2 = 1 + 0;9^2 \Rightarrow \frac{p_{12}}{q_{12}} = m_{12} = 0;9 + \sqrt{1+0;9^2} = 0;9 + 1;3 = 2$$

eşitliklerinden

$$[62] \quad p_{12} = 2, q_{12} = 1$$

şeklinde bulunur.

Buna göre tabletimizin ilk satırındaki dik üçgenin doğuranları

$$\frac{p_{11}}{q_{11}} = m_{11} = 1;11 < m_{12} = 2 = 1;12 \Rightarrow \frac{p_{11}}{q_{11}} = 1;11 = 1 + \frac{11}{12} = \frac{23}{12}$$

seçiminden

$$[63] \quad p_{11} = 23, q_{11} = 12$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde 2. satırdaki dik üçgenin doğuranları

$$m_{10} = 1;10 < m_{11} = 1;11 \Rightarrow \frac{p_{10}}{q_{10}} = 1;10 = 1 + \frac{10}{12} = 1 + \frac{5}{6} = \frac{11}{6}$$

seçiminden

$$[64] \quad p_{10} = 11, q_{10} = 6$$

olarak bulunur.

Şu hâlde bu işleme aynı şekilde devam edersek **Genelleştirilmiş Babil Teoremi**ni seri bir şekilde gerçekleyen tabletimizdeki dik üçgenlerin doğuranları $n = 1,2,\ldots,11$ için

$$[65] \quad m_{n-1} < m_n \Leftrightarrow \frac{p_n}{q_n} = m_n = 1;n$$

şeklinde bulunmuş olur.

Buna göre diğer dik üçgenlerin doğuranları sırasıyla şu şekilde bulunur:

$$[66] \quad \begin{aligned} m_9 &= 1;9 = 1 + \frac{9}{12} = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}, \\ m_8 &= 1;8 = 1 + \frac{8}{12} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}, \\ m_7 &= 1;7 = 1 + \frac{7}{12} = \frac{19}{12}, \\ m_6 &= 1;6 = 1 + \frac{6}{12} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \\ m_5 &= 1;5 = 1 + \frac{5}{12} = \frac{17}{12}, \\ m_4 &= 1;4 = 1 + \frac{4}{12} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}, \\ m_3 &= 1;3 = 1 + \frac{3}{12} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}, \\ m_2 &= 1;2 = 1 + \frac{2}{12} = 1 + \frac{1}{6} = \frac{7}{6}, \\ m_1 &= 1;1 = 1 + \frac{1}{12} = \frac{13}{12}. \end{aligned}$$

Öte yandan modüler aritmetikteki simetri kavramı nedeniyle [65]'te n yerine $12 - n$ konursa

$$[67] \quad \frac{p_n}{q_n} = m_n = 1;12 - n = 1 + \frac{12-n}{12} = 2 - \frac{n}{12}$$

çözümünden gene aynı doğuranlar bulunur. Bu durumda ilkin $n = 1$ alınırsa tabletimizdeki ilk dik üçgenin doğuranları ve sırasıyla diğer n değerleri için tabletimizdeki bütün dik üçgenlerin doğuranları bulunmuş olur.

Ayrıca bu dik üçgenlerin eğim açıları

$$[68] \quad \theta_n = Tan^{-1}\left(\frac{a_n}{h_n}\right) = Tan^{-1}\left(\frac{m_n - m_n^{-1}}{2}\right) = Tan^{-1}\left(\frac{1;12 - n - (1;12-n)^{-1}}{2}\right)$$

formülünden bulunduğuna göre, $n = 1,2,\dots,7$ için tabletimizdeki dik üçgenleri keşfeden ***John Maglio*** ve tam bir deşifresi ***Mathquake*** tarafından yapılan tablo şu şekilde ortaya çıkar:

$12-n$	n	(p_n, q_n)	(a_n, h_n, r_n)	θ_n
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
20	−8	(8,3)	(55,48,73)	48°53′16.47″
19	−7	(31,12)	(817,744,1105)	47°40′38.93″
18	−6	(5,2)	(21,20,29)	46°23′49.85″
17	−5	(29,12)	(697,696,985)	45°02′28.07″
16	−4	(7,3)	(40,42,58)	43°36′10.15″
15	−3	(9,4)	(65,72,97)	42°04′30.08″
14	−2	(13,6)	(133,156,205)	40°26′58.99″
13	−1	(25,12)	(481,600,769)	38°43′04.76″
12	0	(2,1)	(3,4,5)	36°52′11.63″
11	1	(23,12)	(385,552,673)	34°53′39.76″
10	2	(11,6)	(85,132,157)	32°46′44.69″
9	3	(7,4)	(33,56,65)	30°30′36.85″
8	4	(5,3)	(16,30,34)	28°04′20.95″
7	5	(19,12)	(217,456,505)	25°26′55.36″
6	6	(3,2)	(5,12,13)	22°37′11.51″
5	7	(17,12)	(145,408,433)	19°33′53.30″
4	8	(4,3)	(7,24,25)	16°15′36.74″
3	9	(5,4)	(9,40,41)	12°40′49.38″
2	10	(7,6)	(13,84,85)	08°47′50.68″
1	11	(13,12)	(25,312,313)	04°34′52.39″
0	12	(1,1)	(0,2,2)	00°00′00.00″

Tablo 11. Tabletteki dik üçgenler sıralı olarak boyalı bölgede yer alır.

3.2. Sonuçlar. Aşağıdaki maddelerde yer alan sonuçlar tabletimiz hakkında elde ettiğim bilgilerdir.

1. $(30°, 60°, 90°)$'ne En Yakın Dik Üçgen. Şekil 4'teki GBX_9 dik üçgeninin eğim açısı $\theta_9 = 30°30'36.85''$ olması nedeniyle hipotenüsünün $(30°, 60°, 90°)$ dik üçgeninin (sarı renkli) hipotenüsünün yakınından geçtiği görülmektedir.

2. Doğuran Dik Üçgenlerin Eğimleri. [66]'ya göre ardışık doğuran dik üçgenin eğimleri arasında $\frac{1}{12}$ fark vardır:

$$[69] \quad m_{n+1} - m_n = \frac{1}{12}.$$

Eğer bu eşitlikte her 2 tarafın toplamını alırsak

$$m_n - m_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (m_{k+1} - m_k) = \frac{n}{12}$$

eşitliği elde edilir ve Tablo 11'deki son satırdaki doğuran dik üçgenin eğimi $m_0 = \frac{1}{1} = 1$ olduğundan n-inci doğuran dik üçgenin eğimi şöyle olur:

$$[70] \quad m_n = 1 + \frac{n}{12}.$$

3. Tek Sayıdaki Ardışık Doğuran Dik Üçgenlerin Eğimlerinin Aritmetik Ortalaması Ortancanın Eğime Eşittir. Tabletimizdeki dik üçgenlerin doğuranları 12 tabanındaki bir seriden bulunduklarından, ardışık 3 doğuran dik üçgenin eğimleri için daima aritmetik ortalama kuralı (2) geçerli olur:

$$[71] \quad m_{n+1} = \frac{m_{n+2} + m_n}{2}.$$

Çünkü bu kural ardışık 3 doğuran dik üçgenin m_n, m_{n+1}, m_{n+2} eğimlerinin aritmetik ortalaması ortancanın eğimi verir:

$$[72] \quad \frac{m_n + m_{n+1} + m_{n+2}}{3} = m_{n+1}.$$

Fakat bu durum tek sayıdaki ardışık dik üçgenlerin eğimleri için genel bir kuraldır. Örneğin ardışık 5 doğuran dik üçgenin $m_n, m_{n+1}, m_{n+2}, m_{n+3}, m_{n+4}$ eğimlerinin aritmetik ortalaması yine ortancanın eğimi verir:

(2) Bu kural Plimpton 322 no'lu tablette bir yaklaşım olarak geçerlidir, dolayısıyla bu da orada kullanılan metodun farklı olduğunu gösterir.

$$[73]\quad \frac{m_n + m_{n+1} + m_{n+2} + m_{n+3} + m_{n+4}}{5} = m_{n+2}.$$

Şu hâlde t tek bir sayı olmak üzere, ardışık t tane doğuran dik üçgenin eğimlerinin aritmetik ortalaması ortancanın eğime eşit olur:

$$[74]\quad \frac{1}{t}\sum_{k=0}^{t-1} m_{n+k} = m_{n+\frac{t-1}{2}}.$$

Buna göre Tablo 11'deki boyalı bölgedeki yani tabletteki dik üçgenleri doğuran tüm dik üçgenlerin eğimlerinin aritmetik ortalaması ya da ortancanın eğimini çıkarır ve geri kalan 10 eğimi göz önüne alır ve bunların aritmetik ortalaması alırsak yine ortancanın eğimi yani $m_6 = \frac{3}{2}$'yi buluruz. Bu nedenle t tane ardışık doğuran dik üçgenlerin eğimlerinden ortancanın eğimi çıkarır ve geri kalanların aritmetik ortalamasını alırsak yine ortancanın eğime eşit olur:

$$[75]\quad \frac{m_n + m_{n+1} + \cdots + m_{n+\frac{t-3}{2}} + m_{n+\frac{t+1}{2}} + \cdots + m_{n+t-2} + m_{n+t-1}}{t-1} = m_{n+\frac{t-1}{2}}.$$

Ancak bu özelliğe rağmen tabletimiz astronomik gözlem amacıyla Plimpton 322 no'lu tabletine göre çok daha kötü bir şekilde üretilmiş âlet olarak gözükür. Neden?

4. Tabletin Tamamlanması. Tabletimiz diğer tabletler birlikte mağarada altı kırık bir şekilde bulunduğunda yalnızca Tablo 11'deki $n = 1,2,\ldots,7$-inci satırlardaki dik üçgenlerin a_n genişliklerini ve r_n hipotenüslerini içermekteydi. Bu nedenle Amerikan Bölgeler Matematik Ligi'nde Problem-Yazma Kürsüsü'ndeki ***Donald T. Barry*** başkanlığında bir sınıf öğrenciyle birlikte 3 gün süren araştırma sonucunda tabletimizin 3'te 1'inin kayıp olduğu sonucuna varıldı ama şimdi burada verdiğim çözümle tabletimizin tamamını görmekteyiz. Demek ki eğer tabletimiz tek parça halinde keşfedilseydi Tablo 11'den de görüleceği gibi 11 tane dik üçgeni içerdiği görülecekti!

Şimdi yukarıda yaptığım çalışmayla hatalarından arındırılmış bir şekilde ve kayıp parçayı da yerine monte ederek bu tableti aşağıda tek parça halinde görme şansına sahibiz:

Resim 2. ***Donald T. Barry***'nin sınıfındaki öğrenciler 3 gün süren araştırma sonunda Resim 1'deki kırık tableti tamamlayamadı, çünkü ***Donald T. Barry***'nin açıklamasına göre *"Tabletin eksik alt tarafındaki üçte birlik kısmındaki girişleri belirlemek için zamanımız yoktu"*. Bu açıklamadaki girişler yukarıda tamamlanmış tabletin son 4 satırındaki sayılardır.

5. Tabletin Keşif ve Çözüm Hikâyesi. Şimdiye kadar kadim Babil tabletlerinden YBC 7289 no'lu tablette başarıya ulaşmış ve tam bir deşifresini *"Hesabın Destanında İlk Gerçek Algoritma: YBC 7289 no'lu Tabletindeki Babil Algoritması, 1. Baskı: 20.04.2006, 17:00:00"* çalışmasıyla (ki linkin orijinali http://members.lycos.co.uk/gizapyramids/YBC7289/index.html idi) sitemde yayımlamıştım. Daha sonra Plimpton 322 no'lu tablet hakkında araştırmalarıma başladım. Tabii ki bu tabletin deşifresi zor olduğundan birçok kadim Babil tabletini çalışmalarıyla birlikte inceliyordum. Yine internette bir gün, 07.05.2006'da saat 4 sıralarında Plimpton 322 no'lu tablet hakkında araştırma yaparken şimdi burada tüm yönleriyle incelediğim tabletimiz ile ilgili *"Mathematics in Search of History"* makalesini Google arama motoruyla elde ettikten sonra çok şaşırdığımı hatırlıyorum. Çünkü böyle bir olay ilk kez başıma geliyordu ve bunun doğru olup olmadığını derhal araştırmaya başladım. Fakat o da ne? En azından Plimpton 322 no'lu tabletindeki gibi tabletimiz hakkında hiç olmazsa bir iki yerde bilgi olmalıydı, değil mi? Ama yoktu!

Açıkçası şok geçiriyordum ve bu şaşkınlık içinde ilkin **"Mısır Piramitleri"** adlı grubumuzda tabletimiz hakkında

806	**Yine Bir Mathquake Şoku: Pisagor Teoremi için Yeni Bir Tablet (Bu tablet yurdumuzda keşfedildi!)-1** Türkiye'nin güneyindeki Neolit...	**Mathquake**	07/05/06 04:21

807	**Yine Bir Mathquake Şoku: Pisagor Teoremi için Yeni Bir Tablet (Bu tablet yurdumuzda keşfedildi!)-2** Uyarı: 1) Herhalde yurdumuz...	**Mathquake**	07/05/06 04:38

şeklinde ilk bilgilendirici mesajlarımı yayımladım ve gün boyu internetten araştırma yaptım. Sonuç tahmin edeceğiniz gibi. Tabii ki ben de zorunlu olarak anılan makaledeki bilgilerden hareketle (ki bu makalede Plimpton 322 no'lu tablet örnek verilerek tabletimizdeki dik üçgenler için *"Ne yazık ki, tableti daha fazla incelemek için zamanımız yoktu ve tabletteki Pisagor üçlülerinin rastgele mi yoksa sıralı bir koleksiyonu mu olduğunu düşünemedik"* bilgileri harekete geçmem için yeter nedenlerdi) tabletimizle ilgilenmeye başladım.

Çözüm Yüzeydeydi!

Daha ilk analizimde, Plimpton 322 no'lu tabletindeki ***Neugebauer***'in çözüm prosedürünü tabletimize uygular uygulamaz derhal çözüme eriştim. Çünkü çözüm gerçekten de yüzeydeydi ve çok basitti. Hemen bu müjdeli haberi derhal

810	**ŞOK´un Babası: Alt tarafı kayıp tablet deşifre edildi!** Evet arkadaşlar. Son mesajlar...	**Mathquake**	07/05/06 17:49

mesajıyla grubumuza ilettikten sonra daha rahat bir ortamda okuyabilmeleri için, grubumuz adına kurulmuş http://www.piramitim.com sitesinde şu mesajımı yayımladım:

Pisagor Teoremi İçin Yurdumuzda Keşfedilen Yeni Bir Tabletin Deşifresi
Yazar Derya PAMUK TULUM
Sunday, 07 May 2006
Yine Bir Mathquake Şoku: Pisagor Teoremi için Yeni Bir Tablet (Bu tablet yurdumuzda keşfedildi!)

6. *Donald T. Barry*'nin Makalesi Hakkında. Öncelikle "*Mathematics in Search of History*" makalesinde Çatalhöyük tableti için verilen adresin sırıtması nedeniyle bu makalenin bir senaryo olduğu açıktı. Makalenin yazarı ***Donald T. Barry*** bu durumu makalenin başında açıklar ama senaryoya geçtiğinde, kendisini olayın gerçekliğine kaptırdığından olsa gerek, anlatımda gerçekliğe başvurur.

Makalenin girişinde şu bilgiler verilir (Bkz. S. 647. Bu giriş 647. sayfadan 648. sayfanın başındaki **"My Students' Response (Öğrencilerimin Yanıtı)"**na kadardır):

"Matematik tarihi bir sınıfı canlandırmak ve bir derse anlam kazandırmak için çeşitli şekillerde kullanılır. Anekdotlar anlatırız, öğrencilerin matematikçilerin hayatlarını araştırmasını gerektirir, öğrencileri tarihsel ilgi çeken problemleri çözme girişimlerini incelemeye teşvik ederiz ve öğrencilerin bilimin tarihsel gelişimi ile matematiğin gelişimi arasındaki bağlantıları keşfetmelerini öneririz. Ancak, matematik tarihini esas olarak yalnızca bir dizi olgudan oluşan sabit bir varlık olarak ele aldığımızdan endişeleniyorum, içinde canlı tartışmaların yaşandığı ve zaman içinde değişimin vurgulandığı akışkan bir alan olarak değil. Bu eğilime karşı koymak için, eski bir belge biçiminde bir matematik problemi yarattım!

Çözüm bir bilim insanları topluluğunun yani öğrencilerin belirsizlikleri ve tutarsızlıkları çözmek için birlikte çalışmasını ve topluluğun bir bütün olarak makul derecede rahat olduğu bir problem yorumuna ulaşmasını gerektirir. Bu problemi aklımda iki önemli hedefle İleri Yerleştirme Hesaplama sınıfıma veriyorum:

- *İleri Yerleştirme sınavından sonra onlara matematiksel olarak ilginç bir meydan okuma sunmak.*

- *Matematik tarihinin gerçekte nasıl geliştirildiğini simüle etmek.*

O yıl gerçekleşen sınıf tartışmalarından heyecan duydum. Bu makalenin geri kalanında sorun ve sınıfın belgeyi anlamlandırmak için mücadele ederken izlediği yol sunulmaktadır. Matematik tarihinin bu şekilde kullanılmasının değerli olduğunu kanıtlamayı umuyorum.

SORUN

'Arkeoloji ve Dil: Hint-Avrupa Kökenlerinin Bulmacası' *adlı eserinde* ***Colin Renfrew (1987)****, Hint-Avrupa dillerinin ana dilinin MÖ 8000 civarında Orta Anadolu'da gelişen tarım topluluklarından kaynaklandığını ileri sürmektedir. Dilin yayılmasını ve farklılaşmasını tarımın yayılmasıyla eş zamanlı olduğunu savunmaktadır, çünkü aileler sadece tarım teknikleriyle değil bakir topraklara taşınmıştır.*

Şans eseri, güney orta Türkiye'deki iyi bilinen Neolitik Çatalhöyük köyünden çok da uzak olmayan, Olmazköy köyü yakınlarında, İmkânsız dere kıyısında, bir çoban yakın zamanda antik kil tabletlerle dolu bir mağara keşfetti. Tabletlerdeki yazı ne Hurrice, Hattice, Frigce, Minos Linear A ne de bilinen başka bir antik dildir. Tüm Hint-Avrupa dillerinin ana dili olabilir.

Tabletlerin bazılarında matematiksel yazılar var gibi görünüyor. Şekil 1'de (Resim 1) gösterilen, belki de en ilginç ve heyecan verici tabletin bir tıpkıbasımıdır.

Sayısal bilgi olması gereken 7 satırlık 3 sütundan oluşur. Ne yazık ki tablet alttan kırılmış ve diğer kısmı henüz bulunamamıştır. Eksik parça hala mağarada bulunabilir, ancak şu anda gösterişli bir New York City dairesinde kitap ayracı olması da aynı derecede olasıdır. Bu tablet diğer tabletlerle aynı boyuttaysa, onun en üstteki üçte ikisine sahibiz.

Göreviniz, tabi kabul etmeyi seçerseniz, tableti çözmektir. Sütunlardaki ve satırlardaki sayıları belirleyin ve sayısal bilgilerin bir yorumunu geliştirin. Yorumunuza dayanarak tabletin eksik üçte birinin içeriğini belirleyin."

Makalenin sonunda ise şu bilgiler verilir (Bkz. S. 650):

*"**John**'un keşifleri dersin son gününde geldi. Bu bilgin topluluğu, tablo için uygulanabilir, düzeltilmiş bir giriş seti bulduğuna inanarak, analizini yüksek bir notla sonlandırdı. Öğrencilerim 34 yerine 46'nın neden göründüğüne dair makul bir açıklamaya ulaştıklarını düşündüler ve bir önceki sütundaki tüm girişlerin tek olmak zorunda olmadığına ikna oldular. 398'in 408 yerine nasıl yazıldığına dair açıklamalarından memnun değillerdi, ancak 408 ve 433'ün doğru olduğuna kuvvetle inanıyorlardı. Ne yazık ki tableti daha fazla incelemek için zamanımız yoktu ve tabletin Pisagor üçlülerinin rastgele mi yoksa sıralı bir koleksiyonu mu olduğunu düşünemedik. Tabletin eksik alt üçte birlik kısmındaki girişleri belirlemek için de zamanımız yoktu.*

*Bu önemli görevi okuyucuya ve diğer sınıf bilim insanları topluluklarına bırakıyoruz. Bu sınıfın izlediği yolu düşünürken, bunun MÖ 1800 civarına tarihlenen bir Babil tableti olan Plimpton 322'nin anlamının keşfine ne kadar benzediğine şaşırdım. Ne yazık ki Plimpton 322 genellikle 15 Pisagor üçlüsünün ardışık bir düzenlemesi olarak sunulur, **Neugebauer** (1957) ve **Bruins**'in (1949, 1957) farklı yorumlarına ulaşılana kadar bilim insanlarını varsayımlar labirentinde sürükleyen zorlukları ve belirsizlikleri olan bir belge olarak değil. **Neugebauer** ve **Bruins** yorumlarını geliştirirken Babil matematiğinin tarihini oluşturmak için (modern) matematiği kullandılar.*

Benzer şekilde öğrencilerim bir tabletin yorumunu oluşturmak için matematiksel bilgilerini kullanırken, sadece tarih hakkında konuşmak yerine tarih yazıyor veya oluşturuyorlar. Bu tablette geçirdiğimiz 3 günün, onlara matematik tarihinin geliştirilmesinde yer alan düşünce, macera dolu keşifler ve topluluk çabalarını göstermiş olmasını umuyorum."

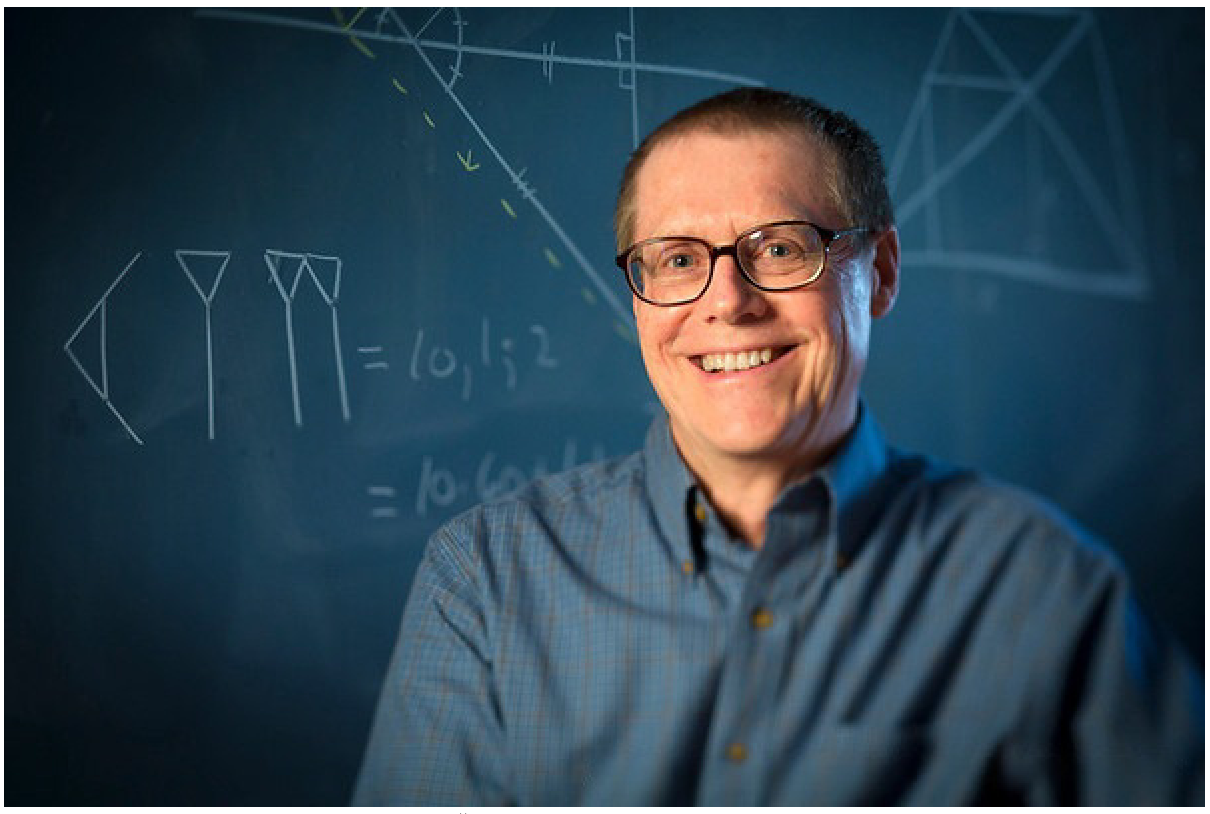
Bu açıklamalardan ***Donald T. Barry***'e göre matematik tarihi bir dizi olgudan oluşan sabit varlık yani içinde canlı tartışmaların yaşandığı ve zamanla değişimin vurgulandığı bir akışkan alan değildir ve bu yüzden adına "Çatalhöyük Tableti" dediğim tableti Plimpton 322 no'lu tablete benzeterek (bir önceki sayfada kırmızı renkle vurguladığım yerde) bir matematik belgesi yarattığını söyler.

İşte bu ikiliği gidermek adına yani "tableti oluşturma" ve "senaryodaki canlı anlatım" arasındaki uyuşmazlığı çözmek için ***Donald T. Barry***'e 15 Temmuz 2006 Cumartesi, 00:48:56 tarihinde bir mesaj gönderdim ve bana gönderdiği mesajı şimdi hayal meyal hatırlıyorum (ki o mesajın kayıtlı olduğu dosya 16 Temmuz 2006 Pazar, 04:20:14 tarihli "mesaj.doc" idi ama virüslü olduğu için bozuldu. Sonrasında dosyayı "mesaj.rtf" formatında kurtarmaya çalıştığımda boyutu şişerek 50.6 MB oldu, ancak bu sefer de karakterler bozuldu). Bu konuda aşağıdaki makaledeki bazı bilgiler bana oldukça yardımcı oldu. Örneğin o mesajda Türkiye'de (Tarsus Amerikan Lisesi ve Robert Kolej) 7 yıl matematik öğretmeni olarak görev yaptığını söylemişti.

"Donald Barry, Andover Müfredatında Felsefe, Tarih ve Matematiği Dengeliyor!

Rebecca Wagman, 02.02.2012.

*Matematik Eğitmeni **Donald Barry**, ünlü bir Mısırlı matematikçinin keşif hikayesini sınıflarına anlatıyor ve modern bir dersin materyallerini antik kökenlerine bağlıyor. Phillips Academy'sinin Matematik Bölümü'nde 32 yıldır çalışmasına rağmen **Barry**, kariyerini matematiğe adamaya karar vermeden önce papaz olmayı hedeflemiş ve Yale İlahiyat Fakültesi'ne gitmiştir. Cedar Rapids/Iowa'da büyüyen **Barry**, yerel bir liseye devam etti ve ardından Carleton College'deki felsefe bölümünden mezun oldu. Rockefeller Bursu ile Yale İlahiyat Okulu'na devam etti. Yale'de geçirdiği süre zarfında **Barry**, Yaz Fırsatları Direktörü olan eşi **Roxanne Barry** ile tanıştı ve çift bir yıl sonra evlendi. **Roxanne Barry**, Türkiye'de 2 Amerikalı öğretmenin kızı olarak büyümüştür, bu nedenle **Barry**ler 1973-1980 yılları arasında Türkiye'de bir Türk erkek lisesi olan Tarsus Amerikan Lisesi'nde ve İstanbul'daki bir başka lise olan Robert Kolej'de öğretmenlik yapmaya karar vermişlerdir. **Barry**'ye göre, o dönemde Türkiye'de bakanlar için uygun bir iş yoktu, bu nedenle her zaman tutkuyla bağlı olduğu matematik alanında sertifika almak için gece okuluna ve yaz okuluna katıldı. **Barry**, matematiğe olan ilgisinin 11. sınıftan sonraki yaz Kuzey Güney Vakfı (NSF) tarafından desteklenen bir matematik programında arttığını söyledi: **'New York/New Jersey bölgesinden bazı muazzam matematik öğrencileriyle tanıştım. Ne kadar yaratıcı olduklarını görünce şaşırdım. Matematiğin mekanik kısmında iyiydim ama matematikte bu kadar yaratıcı olunabileceğini hiç düşünmemiştim. Onlara nasıl bu kadar yaratıcı olabildiklerini sorduğumda hepsinin cevabı aynıydı: Matematik yarışmaları'**. **Barry**, The Phillipian'a gönderdiği e-postada şöyle yazıyor: '**Barry** önce Türk öğrencileri için, ardından da New England'daki eyalet ve bölge yarışmaları için matematik yarışması soruları yazmaya başladı. Sonunda 1995'ten 2008'e kadar Amerikan Bölgesi Matematik Ligi'nin (ARML) baş yazarı oldu.'*



Donald Barry, Phillips Akademisi, Matematik Öğretmeni 1980-2014. Tahtadaki Babil rakamları ve şekiller dikkat çekiyor!

***Barry** şunları söyledi: **'Öğrencilerin kendi yaratıcılıklarını deneyimlemelerine yardımcı olacak ilginç problemler geliştirmenin zorluğundan gerçekten keyif aldım. Çok zaman alıyor, pek çok çıkmaz sokağa giriyorum ama arada bir yaratmış olmaktan büyük keyif aldığım bir problemle karşılaşıyorum'**. Öğretim*

Görevlisi ve Matematik Bölüm Başkanı ***Patrick Farrell****, '****Bay Barry, bölümdeki en iyi soru yazarı ve kelimenin tam anlamıyla ülkedeki en iyilerden biri****' dedi.* ***Barry****'ye göre Andover'da çalışmak, matematiğin tarihini ve uygulamalarını daha iyi keşfetmesini sağladı.* ***Barry****, 1980 yılında Andover Matematik Bölümü'ne katıldığından beri Andover Davetli Matematik Yarışması'nı yarattı ve Phillips Academy'de Model Birleşmiş Milletler kulübünün kurucularından biri oldu. Matematik kulübüne 20 yıl boyunca fakülte danışmanı olarak hizmet vermiş ve görev süresinin büyük bir bölümünde Model BM danışmanı olarak görev yapmıştır.* ***Barry*** *ayrıca Pisagor Teoremi'nin eski uygarlıklardaki erken tarihi üzerine 250 sayfadan fazla bir kitap yazmıştır. Henüz tamamlanmamış olmasına rağmen* ***Barry****, derslerinde müfredatı desteklemek için sürekli olarak taslağından yararlandığını söyledi.* ***Barry****, derslerinde hem problem çözmeyi hem de problem kurmayı vurguladığını da sözlerine ekledi.*

Barry*, The Phillipian'a gönderdiği e-postada, '****Öğrencilerimin derslerimden matematikte yetkin olduklarını bilerek çıkmalarını ve yeteneklerine o kadar güvenmelerini isterim ki matematikten korktukları için üniversitedeki fırsatlara asla kapılarını kapatmasınlar****' dedi.* ***Barry****'nin Andover'daki uzun geçmişinde bir öğrenci,* ***Isaac Opper****'in daha önce özel olan 15 dik üçgeni olağanüstü bir şekilde keşfetmesi nedeniyle öne çıkıyor.* ***Opper****, 3. sınıftayken fikirlerini* ***Barry****'ye göstermiş ve ikili* ***Opper****'in bulgularını 2004 yılında New England Matematik Öğretmenleri Derneği'ne sunmuştur.* ***Barry*** *sınıf dışında da koç ve ev danışmanı olarak görev almıştır. Varsity ve JV golf, JV2 Boys Basketball, hem Boys hem de Girls Cross Country ve Ultimate Frisbee'ye benzer bir spor olan speedball koçluğu yapmıştır. Kendisi ve eşi aynı zamanda West Quad South'taki Taylor Hall'da ev danışmanlığı yapmıştır."*

Bu makaledeki bilgilere göre ***Donald T. Barry*** bana Fransız matematik öğretmeni ***Jean Brette***'yi hatırlattı. O da Paris'teki Palais de la découverte'de 40 yıl (1964-2004) matematik öğretmenliği yapmıştı (Bkz. *"Babil ve Mısır П'si"*, S. 7-13).

Bununla birlikte "Çatalhöyük Tableti" hakkında da şu makaleye bakmanızda fayda görüyorum:

"Donald Barry Kalkülüs Dersi ile Antik Tablet Çözümü Hakkında Makale Yayınladı!

Phoebe Gould, 07.02.2013.

Matematik Eğitmeni ***Donald Barry****, 'Matematik Tarihinin Peşinde' başlıklı makalesinde, Antik Hesaplama (BC Calculus) sınıfının eski bir Türk kil tabletini çözme mücadelesini anlattı.*

Barry *'****Bir grup Phillips Academy öğrencisinin ne yaptığını, tablete nasıl yaklaştıklarını ve benim rolümün ne olduğunu anlattım. Ben artık cevap veren adam değildim. Soruları olduğunda, bunu çözmek zorundaydılar****' diyor.*

İlk olarak 2000 yılında Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi'nin aylık dergisi 'The Mathematics Teacher'da yayınlanan makale, Ekim 2012'de finans ve ölçme alanındaki matematiksel uygulamaların online antolojisi olan 'Real Math'da yeniden yayınlandı.

Barry*'nin makalesinde yer alan tablet, 1990'larda Türkiye'nin güneyindeki bir mağarada, bilinen bir Neolitik köyün arkeolojik alanının yakınında keşfedilen çok sayıda antik kil tabletten biriydi. Ancak kil tabletin kökeni bilinmemektedir.*

O dönemde tabletin sadece üçte ikisi keşfedildiği için ***Barry****, öğrencilerinden sütun ve satırlardaki sayıları tahmin ederek tabletin metnini çözmelerini isteyen bir matematik problemi yarattı. Daha sonra öğrenciler, tabletin eksik olan üçte birlik kısmının metnini belirlemek için sayısal bilgilerin bir yorumunu geliştirdiler.*

Barry *makalesinde, '****Çözüm, bir akademisyenler topluluğunun, yani öğrencilerin, belirsizlikleri ve tutarsızlıkları gidermek için birlikte çalışarak, sorunun bir bütün olarak makul ölçüde rahat olduğu bir yorumuna ulaşmasını gerektiriyor****' diye yazdı.*

Barry *tableti 1994'ten bu yana İleri Düzey Yerleştirme Sınavından sonra diğer BC sınıflarına da sunuyor. Ancak makale, 1998-99 öğretim yılında verdiği özel bir BC Calculus dersine odaklanıyor.*

*'****Sadece sınıfımın ne yaptığını kaydettim. Probleme nasıl yaklaştıklarını, nerede doğru nerede yanlış yöne gittiklerini gözlemledim****' diyor,* ***Barry****.*

Makalede ***Barry****, '****O yıl gerçekleşen sınıf tartışmaları beni çok heyecanlandırdı****' dedi. '****Matematik tarihinin bu şekilde kullanılmasının değerli olduğunu göstermeyi umuyordum****'.*

Barry*, alıştırma sırasında önemli olanın sonuçtan ziyade problem çözme deneyimi olduğunu söyledi.*

*'****Bu problem üzerinde kullanabilecekleri her türlü matematiksel aracı kullanarak tarihi yeniden inşa ediyorlar. Eski bir uygarlığın matematiksel bilgisini yeniden inşa ediyorlar, bu da onları arkeolojinin belli bir yönünü yapmaya mümkün olduğunca yaklaştırdığım anlamına geliyor****' diyor,* ***Barry****.*

*'****Sadece tökezlemelerine ve mücadele etmelerine izin veriyorum. Kimse bir arkeoloğa cevabın bu olduğunu söyleyemez. Sahip olduğunuz şey, aynı bilgiye bakarak bunun ne olduğunu anlamaya çalışan bir arkeologlar topluluğudur ve en sonunda az ya da çok, üzerinde anlaşmaya varılmış bazı sonuçlar vardır****' diye devam etti.*

Barry *1980 yılında Andover'a gelmeden önce 7 yıl Türkiye'de yaşadı. Tarsus ve İstanbul'da Türk öğrencilere İngilizce lise matematiği öğretti.*

*'****Türkiye'de yaşayıp da antik geçmişe ilgi duymamak mümkün değil, çünkü geçmiş her yerde karşınıza çıkıyor****' diyor. '****Bu yüzden arkeolojiye, arkeolojik keşiflere, arkeologların kullandığı düşünce tarzına, başka türlü olamayacağından çok daha fazla ilgi gösterdim. Bu beni büyülüyor ve bunu öğrencilerimle paylaşmak istiyorum****' diyor,* ***Barry****.*

Barry*, tableti bu bahar AP Sınavından sonra matematik sınıfına vermeyi planladığını söyledi. '****Onlara farklı bir matematiksel deneyim sunuyor. Bu bir bulmaca****' diyor,* ***Barry****."*

Şimdi "Çatalhöyük Tableti"ni bir egzersiz olarak inceledikten sonra Plimpton 322 no'lu tabletine geçebiliriz!

4. Plimpton 322 No'lu Tablet. Bu tablet günümüze ulaşmasındaki hikâyesi ilginç olmakla birlikte ***Otto Neugebauer (1899-1990)*** ve ***Abraham Joseph Sachs (1914-1983)*** tarafından "Matematiksel Çivi Yazıtları (Mathematical Cuneiform Texts), New Heaven, Conn., 1945" ortak çalışmasıyla 1 Ocak 1945'te tüm dünyanın dikkatine sunuldu.

Neugebauer yandaki tablet hakkında şunları söyler (Bkz. "Otto Neugebauer: The Exact Sciences in Antiquity (1951,1957,1969), 2nd ed./Princeton, NJ: Brown University Press; reprint ed./New York: Dover, 1969", S. 36-37): *"Sol taraftaki kırılmadan da anlaşılacağı üzere, bu tablet başlangıçta daha büyüktü; ve kırılmanın üzerindeki modern tutkalın varlığı, diğer kısmın tablet kazıldıktan sonra kaybolduğunu göstermektedir. Her zamanki gibi soldan sağa (sağdan sola) doğru sayılmak üzere 4 sütun korunmuştur. Her sütunun bir başlığı vardır. Son başlık* ***'adı'*** *olup, altındaki sayı sütununun 1'den 15'e kadar olan satır sayısını basitçe saymasından da anlaşılacağı üzere, sadece* ***'mevcut sayı'*** *anlamına gelmektedir. Dolayısıyla bu son sütunun matematiksel bir önemi yoktur. II. ve III. sütunların başında sırasıyla* ***'genişliğin çözüm sayısı'*** *ve* ***'köşegenin çözüm sayısı'*** *olarak tercüme edilebilecek kelimeler yer almaktadır.* ***'Çözüm sayısı'****, karekök ve benzeri işlemlerle bağlantılı olarak kullanılan ve modern terminolojimizde tam bir karşılığı olmayan bir terim için oldukça tatmin edici olmayan bir ifadedir. Bu 2 başlığı sırasıyla basitçe 'b' ve 'd' ile değiştireceğiz.* ***'Köşegen'*** *kelimesi ilk sütunun başlığında da geçmektedir, ancak geri kalan kelimelerin tam anlamı bizden kaçmaktadır.*

Resim 3. Plimpton 322 No'lu Tablet (M.Ö. 1900-1600, Eski Babilonya çivi yazılı metni (Plimpton Kütüphanesi, Columbia Üniversitesi, New York)): En×Boy×Yüksekliği: 12.5 $CM \times 8.8\ CM \times 2\ CM$ boyutlarında olan bu kil tabletteki metin, sağdan sola doğru 4 sütunda yazılmış $n = 1,2,\dots,15$ için (a_n, h_n, r_n) tam sayılı dik üçgenlerin bir listesini içermektedir. Bu tabletin sol tarafı boydan boya kırıktır ve resimden de görüleceği gibi, 2 büyük ve 1 küçük tahribatla birlikte çeşitli yerlerinde ufak tefek tahribatların mevcut olduğu görülmektedir. Sağlam kalmış olan yerlerine göre yapılan okumada sütunlar şu şekilde ortaya çıkmıştır: İlk sütun (sağdaki), $n = 1$'den $n = 15$'e kadar dik üçgenlerin bulundukları satır numaralarını gösterir. Bundan sonraki 2 sütun dik üçgenlerin sırasıyla r_n «köşegen (hipotenüs)»leri ve a_n «en (taban)»lerini tam sayılar olarak verir. Son sütun ise büyükten küçüğe doğru $(r_n/h_n)^2$ oranlarını içerir.

Sütun I, II ve III'teki sayılar aşağıdaki listede (aşağıdaki Tablo 12) çevrilmiş ve [] içindeki sayılar restore edilmiştir. 4. sütundaki '[1]' başlangıç rakamları, fotoğraftan da açıkça görüldüğü gibi (PI. 7a) yarı yarıya korunmuştur. 14. satırda '1' tamamen korunmuştur. Çeviride gerekli yerlere sıfırlar ekledim; bunlar metnin kendisinde belirtilmemiştir."

Kısa (En) kare kenarı olan karenin alanına 1 br^2 eklenilmesiyle köşegen kare kenarı olan karenin alanıdır ([ta]-ki-il-ti şi-li-ip-tim [ša 1 in]-na-as-sà-hu-ma SAG i-il-lu-ú)	En Kare Kenarı (ÍB.SI SAG)	Köşegen Kare Kenarı (ÍB.SI şi-li-ip-tim)	Adı (MU.BI.IM)
$1 + (a_n/h_n)^2 = (r_n/h_n)^2$	a_n	r_n	n
2;0	1	1;24,51,10	0
[1;59,0,]15	1,59	2,49	1
[1;56,56,]58,14,50,6,15	56,7	3,12,1 [1,20,25]	2
[1,55,7,]41,15,33,45	1,16,41	1,50,49	3
[1;]5[3,1]0,29,32,52,16	3,31,49	5,9,1	4
[1;]48,54,1,40	1,5	1,37	5
[1;]47,6,41,40	5,19	8,1	6
[1;]43,11,56,28,26,40	38,11	59,1	7
[1;]41,33,59[45,14],3,45	13,19	20,49	8
[1;]38,33,36,36	9[8],1	12,49	9
[1;]35,10,2,28,27,24,26,40	1,22,41	2,16,1	10
[1;]33,45	45	1,15	11
[1;]29,21,54,2,15	27,59	48,49	12
[1;]27,0,3,45	7,12,1 [2,41]	4,49	13
[1;]25,48,51,35,6,40	29,31	53,49	14
[1;]23,13,46,40	56	53 [1,46]	15
…	…	…	16
1;20	1	2	17

Tablo 12. Resim 3'teki Plimpton 322 no'lu tabletin çevirisi. İlk sütunda satır numaraları, 2. sütunda dikdörtgenin (ya da dik üçgenin) köşegeni (hipotenüsü), 3. sütunda genişliği (tabanı) ve 4. sütunda köşegenin yüksekliğe oranının karesi olarak yazılmış ve bu sütun başında genişliğin yüksekliğe oranının karesinin 1 fazlası olarak verilmiştir, ancak sütun başındaki "1"in olduğu yerde hasar olduğundan satırlardaki "1" ler okunamamaktadır ve bu yüzden bir tartışma başlamıştır.

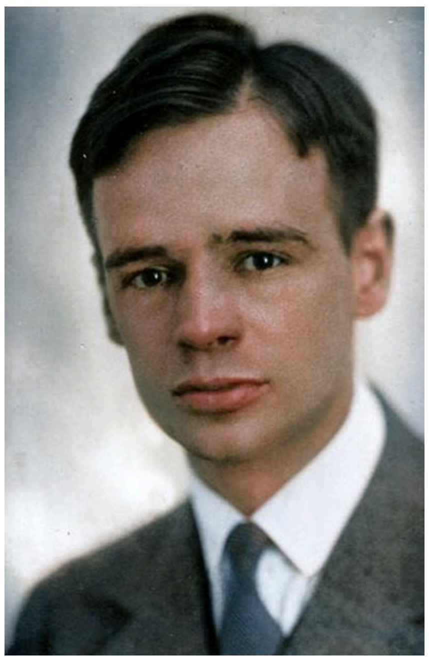
Bu tablete kazınan sayıların aynı basamaklarında yer alan 60 tabanlı Babil rakamlarının aynı sütunlara denk gelecek şekilde Tablo 12'deki gibi yazıldıkları görülmektedir. Bu bakımdan 13. Satır-4. Sütun'daki sayının kesir kısmındaki 2. basamakta "0" rakamının mevcut olduğu görülürken 1. Satır-4. Sütun'daki sayının aynı basamağında "0" rakamının bulunduğu yer tahribatlı yere denk geldiğinden, buradaki "0" rakamı okunamamaktadır. Bu nedenle tablet tahribatlı şekilde kazı sırasında çıkarıldığından tablodaki gri renkteki köşeli parantezler içinde verilen sayılar okunamamaktadır. Bunun yanı sıra kırmızı renkteki sayılar da tablet incelendikten sonra tablete hatalı bir şekilde kazındığı anlaşıldı. Bu hatalar için *"taşa bu sayıları kazıyan yapmış olabilir"* düşüncesi yaygındır ve düzeltilmişleri kahve renkli köşeli parantezler içinde verilmiştir. Fakat tablodaki sayıların rastgele olmayışları bu hataları düzeltmeye yetmiştir. Ayrıca tabletteki dik üçgenler $(30°, 45°)$ aralığında yazıldıklarından, tablodaki ilk satır YBC 7289 no'lu tablet kaynaklı $(45°, 45°, 90°)$ dik üçgenine göre ve son satır da $(30°, 60°, 90°)$ dik üçgenine göre yazılmıştır (Bkz. "*YBC 7289 No'lu Tablet*").

Şimdi bu tabloyu (a_n, h_n, r_n) dik üçgenlerinin (p_n, q_n) doğuranlarına, a_n, h_n, r_n kenarlarına ve θ_n eğim açılarına göre düzenlersek şu ilginç tabloyla karşılaşırız:

n	p_n	q_n	a_n	h_n	r_n	$\theta_n = Sec^{-1}\left(\frac{r_n}{h_n}\right)$
1	12	5	119	120	169	$44^\circ 45' 37''$
2	64	27	3367	11018 [3456]	11521 [4825]	$44^\circ 15' 10''$
3	75	32	4601	4800	6649	$43^\circ 47' 14''$
4	125	54	12709	13500	18541	$43^\circ 16' 17''$
5	9	4	65	72	97	$42^\circ 04' 30''$
6	20	9	319	360	481	$41^\circ 32' 40''$
7	54	25	2291	2700	3541	$40^\circ 18' 55''$
8	32	15	799	960	1249	$39^\circ 46' 13''$
9	25	12	541 [481]	546 [600]	769	$38^\circ 43' 05''$
10	81	40	4961	6480	8161	$37^\circ 26' 14''$
11	2 (60)	1 (30)	45	60	75	$36^\circ 52' 12''$
12	48	25	1679	2400	2929	$34^\circ 58' 34''$
13	15	8	25921 [161]	240	289	$33^\circ 51' 18''$
14	50	27	1771	2700	3229	$33^\circ 15' 43''$
15	9	5	56	90	53 [106]	$31^\circ 53' 27''$

Tablo 13

Peki bu sayılar nasıl bulunmuştur ve hangi kurallara göre sıralanmışlardır?



Resim 4. *B.L. van der Waerden (1903-1996)*. Yandaki ***Neugebauer***'in çözümünü açık şekle getirir (Bkz. "*Bilimin Uyanışı*", S. 79).

Bu konuda çok çeşitli tahminler mevcuttur ama tüm tahminler (***O. Neugebauer*** ve ***A. Sachs***, ***B.L. Van der Waerden***, ***E. M. Bruins***, vd.) **"Babil Metodu"** olarak anılan metodu göstermektedir. O halde bu metoda göre

$$[76] \quad a_n^2 + h_n^2 = r_n^2$$

eşitliğinden birbirinin tersi olan oranlar

$$a_n^2 + h_n^2 = r_n^2 \Rightarrow 1 = \underbrace{\frac{r_n - a_n}{h_n}}_{m_n^{-1}=\frac{q_n}{p_n}} . \underbrace{\frac{r_n + a_n}{h_n}}_{m_n=\frac{p_n}{q_n}} \Rightarrow \frac{a_n}{h_n} = \frac{m_n - m_n^{-1}}{2}, \frac{r_n}{h_n} = \frac{m_n + m_n^{-1}}{2}$$

eşitliklerine göre

$$[77] \quad \frac{a_n}{h_n} = \frac{m_n - m_n^{-1}}{2}, \frac{r_n}{h_n} = \frac{m_n + m_n^{-1}}{2}$$

şeklinde seçilirse problem $\left(\frac{a_n}{h_n}, 1, \frac{r_n}{h_n}\right)$ dik üçgenlerinin inşa edilmesine dönüşür. Burada (p_n, q_n) doğuranlarına göre (a_n, h_n, r_n) dik üçgenlerinin kenarlarının uzunlukları [58]'den bulunmaktadır.

Bu metodu destekleyen bir delil Tablo 12 (13)'deki 11. satırın olduğu gibi muhafaza edilmiş olmasıdır. Eğer biraz daha ileriye gidersek, onlardan daha basit olan $(0;45,1,1;15) = \left(\frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}\right)$ dik üçgeninin $2p_{11}q_{11} = 4$ katı alınmış olsaydı, $(3,4,5)$ dik üçgeni elde edilmiş olurdu!

O. Neugebauer ve ***A. Sachs***, m_n ve m_n^{-1} oranlarının doğrudan doğruya bir "Ters Sayılar Cetveli"nden alınmış olmayıp, gerçekten p_n ve q_n sayıları basit (düzgün) sayılar olmak üzere $m_n = \frac{p_n}{q_n} = p_n q_n^{-1}$ ve $m_n^{-1} = \left(\frac{p_n}{q_n}\right)^{-1} = p_n^{-1} q_n$ şeklinde hesaplanmış olmaları gerektiğine işaret etmişlerdir!

4.1. Dik Üçgendeki Metrik Bağıntı: Pisagor Teoremi

Günümüzde "Pisagor Teoremi" olarak bilinen teoremin hem Eski Babil çağından kalma matematiksel ifadeler ve hesaplamalar içeren tabletlerden hem de Mısır Piramitleri'nden ***Pisagor***'dan çok çok önceleri bilindiği ortaya çıkmıştır (Bkz. Testo 5.6, Not 5.6.13). ***Pisagor***'un bu bağıntıyı Mezopotamyalılardan öğrenerek zamanın modası nedeniyle İskenderiye'deki matematik bilen rahiplere kendi buluşu olarak anlattığı ve daha sonra İtalya'ya göç ettiğinde dostluk üzerine kurduğu tarikatta incelediği anlaşılmaktadır. Bu tarikatın inancına göre evrende her şey sayılarla idare ediliyordu ve sayılarla izah edilebilirdi. Bu yüzden ilk önce sayıları incelemeye başladılar. Fakat daha ilk adımda onları büyük bir sürpriz beklemekteydi: Dik kenarlarının uzunlukları 1 birim olan dik üçgenin hipotenüs uzunluğu

$\sqrt{2}$ birim idi ve onların sayı kavramına göre $\sqrt{2}$ sayısı rasyonel olarak yazılamayınca, bu durum tarikatta büyük bir heyecan yarattı. Bu olay onlarda o kadar büyük bir heyecan yarattı ki bu konu iyice anlaşılıncaya kadar tarikat dışında konuşulmaması kararını aldılar!

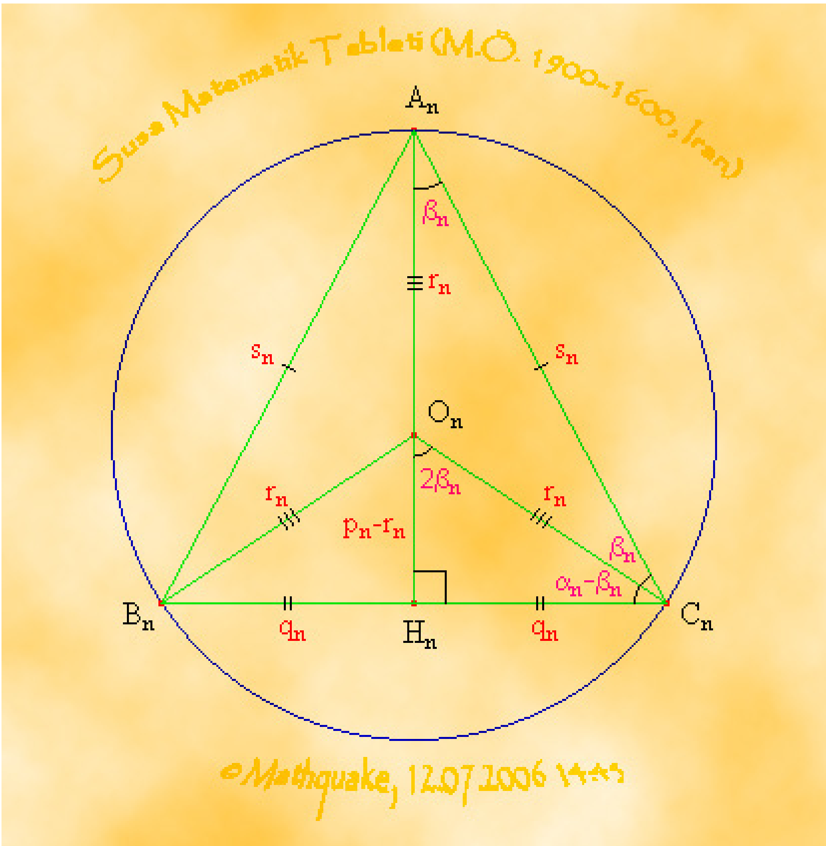
Plutarkos, ***Vitruvius*** ve ***Proklos***'un ifadelerine göre, **"Pisagor Teoremi"**nde alan uygulaması yöntemiyle bulunan $\sqrt{2}$ sayısı ***Pisagor***'un kişisel keşfidir ve o, bu buluşu nedeniyle bir boğa kurban etmiştir!

Oysa Plimpton 322 no'lu tabletinin kardeşi YBC 7289 no'lu tablette $\sqrt{2}$ sayısı için $\sqrt{2} > 1;24,51,10 = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = \frac{30547}{21600} = 1.41421(2963\ldots)$ rasyonel yaklaşıklığı verilmişti!

Bu durumdan da anlaşılıyor ki, Grekler, Babilliler'den istifade etmişler ve edindikleri bilgileri kendilerine mâl etmişlerdir!!!

Şimdi (a_n, h_n, r_n) dik üçgeninin belirlenmesinde rol oynayan p_n ve q_n parametrelerin cebirden başka geometrinin de işe karıştığı ve böylece kökeninin geometriye dayandığı gösteren bir örnek üzerinde duralım.

Babil Geometrisi'nde çok önemli bir yer teşkil eden ve Plimpton 322 no'lu tablet, YBC 7289 no'lu tablet ve Tell Dhibayi tabletiyle aynı döneme ait Susa tabletinde çevrel çemberi verilen bir ikizkenar üçgenden [58]'deki çözüme şu şekilde erişilmektedir:



Şekil 5. Susa matematik tabletinde (TMS No. 1) $A_nB_nC_n$ ikizkenar üçgeninde $|A_nB_n| = 50 = |A_nC_n|$ ve $|B_nC_n| = 60$ verilmiş olup çevrel çemberin yarıçapı soruluyor (Bkz. "*New Angles on Ancient Babylonian Geometry (Part 2)*" ve "*E.M. Bruins et M. Rutten: Textes mathématiques de Suse, Ed. P.Geuthner, Paris-1961*").

Plimpton 322 no'lu tabletindeki (a_n, h_n, r_n) sıralı üçlüsüyle belirtilen dik üçgenlerin bulunmasında kaynak olan bu şekilde dik kenar uzunlukları p_n ve q_n olan $A_nH_nC_n$ dik üçgeni yardımıyla $O_nH_nC_n$ dik üçgeninin elde edildiği görülmektedir. Diğer bir deyişle, $O_nH_nC_n$ dik üçgeni $A_nH_nC_n$ dik üçgeni tarafından doğurulmaktadır.

Ayrıca bu tabletin, üzerinde barındırdığı şekil nedeniyle, birçok geometrik açılıma sahip olduğu anlaşılmaktadır. Örneğin *"Aynı yayı gören çevre açının ölçüsü merkez açının ölçüsünün yarısıdır"* bilgisine göre $O_nH_nC_n$ dik üçgeninin tepe açısının yarısı $A_nH_nC_n$ doğuran dik üçgeninin tepe açısıdır. Buna göre $A_nH_nC_n$ doğuran dik üçgeninin eğim açısının ölçüsü α_n ise $O_nH_nC_n$ doğurulan dik üçgeninin eğim açısının ölçüsü $\alpha_n - \beta_n$ olur.

Örneğin Susa tabletindeki probleme göre, $A_nH_nC_n$ dik üçgeni $(30,40,50) = 10(3,4,5)$ sıralı üçlüsüyle verilmişti. Buradan doğuran dik üçgenin dar açılarının ölçüleri $\alpha_n = Tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \cong 53°7'48''$ ve $\beta_n = Tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \cong 90° - 53°7'48'' = 36°52'12''$ olduğundan doğurulan $O_nH_nC_n$ dik üçgeninin eğim açısının ölçüsü $\alpha_n - \beta_n \cong 16°15'37''$ olarak elde edilir ki, eğer Plimpton 322 no'lu tabletindeki dik üçgenleri bulma işlemi devam ettirilseydi, eğim açısının ölçüsü $\alpha_n - \beta_n \cong 16°15'37''$ olan bu dik üçgeni $(7,24,25)$ sıralı üçlüsüyle görecektik ve bu dik üçgenin eğim açılarının ölçüleri $(15°, 30°)$ arasında değişen dik üçgenlerin bulunduğu 2. paketteki son dik üçgen olarak yer alacaktı. Çünkü bu konuda yaptığımız araştırmalar bu sonucu göstermektedir.

Şu hâlde orijinal problemden hareket edersek $O_nH_nC_n$ dik üçgeninin hipotenüs uzunluğu

$$(p_n - r_n)^2 + q_n^2 = r_n^2 \Rightarrow p_n^2 - 2p_nr_n + r_n^2 + q_n^2 = r_n^2 \Rightarrow p_n^2 + q_n^2 = 2p_nr_n \Rightarrow r_n = \frac{p_n^2 + q_n^2}{2p_n}$$

eşitliklerinden

$$[78] \quad r_n = \frac{p_n^2 + q_n^2}{2p_n}$$

olarak bulunur ve artık buradan da $O_nH_nC_n$ dik üçgeninde hipotenüsün yüksekliğe oranı

$$[79] \quad \frac{r_n}{q_n} = \frac{p_n^2 + q_n^2}{2p_nq_n} = \frac{m_n + m_n^{-1}}{2}$$

ve tabanın yüksekliğe oranı

$$[80]\quad \frac{p_n - r_n}{q_n} = \frac{p_n^2 - q_n^2}{2p_nq_n} = \frac{m_n - m_n^{-1}}{2}$$

olarak elde edilirler. Bu formüller p_n ve q_n çifte parametresiyle ifade edilebildiği gibi, m_n eğimine bağlı tek parametreye indirgenmiş olarak da yazılabilmektedir (ki burada m_n eğimi şekildeki $A_nH_nC_n$ dik üçgenine benzer dik üçgenlerden kolaylıkla görüleceği gibi "benzerlik katsayısı" olarak ortaya çıkmaktadır). Eski Grek geleneğinde dik üçgenlerin tek parametreli çözüme göre bulunması hali ***Pisagor*** ve ***Platon***'un adlarına bağlanmıştır.

Sonuçta Plimpton 322 no'lu tabletindeki (a_n, h_n, r_n) dik üçgenleri

$$[81]\quad (a_n, h_n, r_n) = 2p_nq_n\left(\frac{p_n^2 - q_n^2}{2p_nq_n}, 1, \frac{p_n^2 + q_n^2}{2p_nq_n}\right) = (p_n^2 - q_n^2, 2p_nq_n, p_n^2 + q_n^2)$$

eşitliğinden bulunmuş oluyorlardı ve Babilliler bu sıralı üçlüleri bulurken

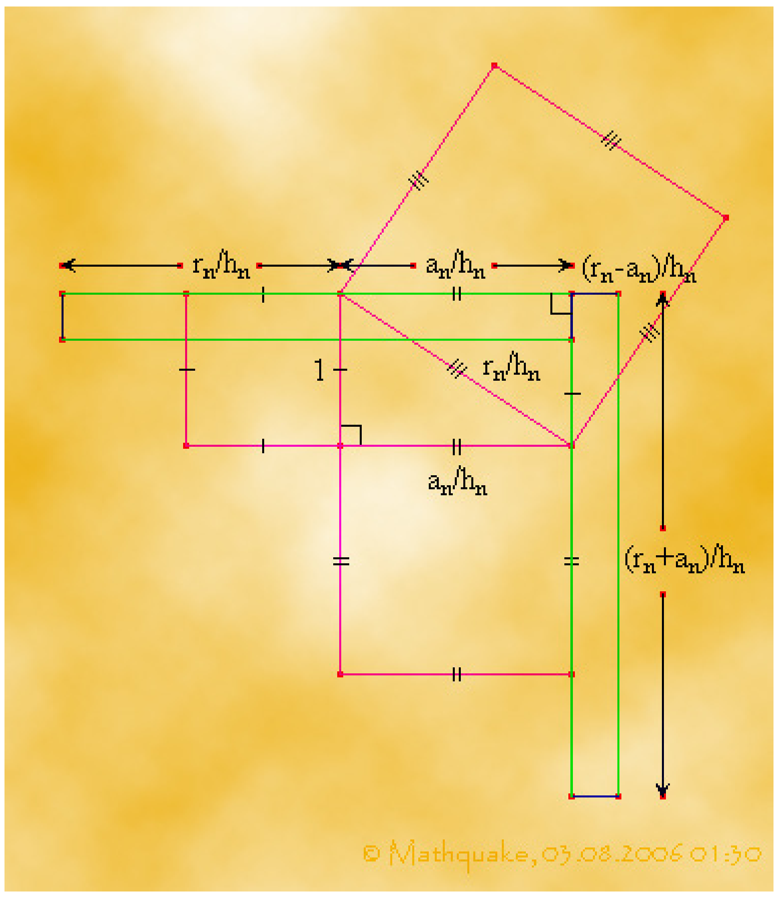
$$[82]\quad \begin{aligned} p_n^2 - q_n^2 &= (p_n - q_n)(p_n + q_n) \\ p_n^2 + q_n^2 &= (p_n + q_n)^2 - 2p_nq_n \end{aligned}$$

özdeşliklerini kullanılıyorlardı. Buradaki ilk özdeşliğin bilindiğini BM 85194 no'lu tabletinden çok açık bir şekilde bilmekteyiz. Aynı şekilde ikinci özdeşliğin de bilindiğine ilişkin birçok tablet mevcut olmakla birlikte (örneğin Tell Dhibayi tableti) Tablo 12'deki 2. Satır-2. Sütun'da yapılan hatanın nasıl oluştuğunu ***R. J. Gillings*** keşfettikten sonra bu özdeşliğin bu tablette de kullanıldığı ortaya çıktı!

Peki m_n ve m_n^{-1} sayılarıyla (a_n, h_n, r_n) dik üçgenlerinin bulunması (Babil) metodu nereden gelmektedir?

Bu soruya yanıt için aşağıda 2 tablet örneği ele alacağım.

1. YBC 6967 No'lu Tabletine Göre Babil Metodunun Geometrik Yorumu.



Şekil 6

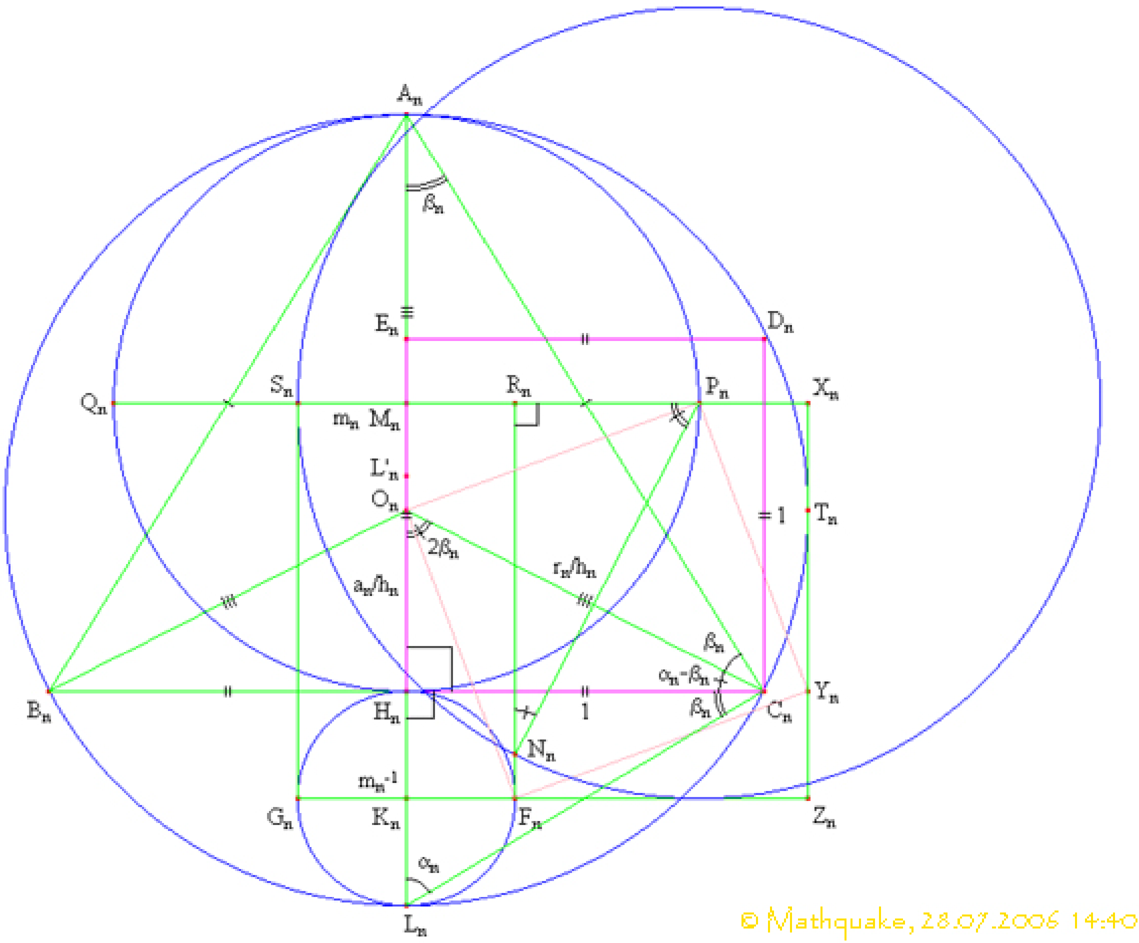
MÖ 1900-1800 tarihli olarak Larsa'da keşfedilen YBC 6967 no'lu tableti, Plimpton 322 no'lu tabletindeki ilk dik üçgenin doğuranları olan $p_1 = 12 \leftrightarrow 5 = q_1$'in birbirinin tersleri olduğuna dair bir metot içerir.

Yukarıdaki şekilden görüleceği gibi bu metot şu şekilde işler: Eğer (a_n, h_n, r_n) dik üçgeninin kenarlarının uzunlukları biliniyorsa, 1 br^2 olan birim karenin alanına bir kenar uzunluğu $\frac{a_n}{h_n}$ br olan karenin alanı eklenirse, $\left(\frac{a_n}{h_n}, 1, \frac{r_n}{h_n}\right)$ dik üçgeninin hipotenüsü üzerindeki karenin alanı elde edilir ve bu karenin bir kenar uzunluğu $\frac{r_n}{h_n}$ br olur.

Şimdi $\frac{r_n}{h_n}$ br uzunluğundaki hipotenüs tepe noktası etrafında bir kez sola ve sağa doğru döndürülür ve $\left(\frac{a_n}{h_n}, 1, \frac{r_n}{h_n}\right)$ dik üçgeninin dik kenarlarına paralel hale getirilirse, alt ve üst tabanları bu dik üçgenin tabanıyla paralel olan dikdörtgenin uzun kenarı $\frac{r_n}{h_n} + \frac{a_n}{h_n} = \frac{r_n + a_n}{h_n}$ br ve kısa kenarı da $\frac{r_n}{h_n} - \frac{a_n}{h_n} = \frac{r_n - a_n}{h_n}$ br olan doğru parçası dik açı olan köşe etrafında saat yönünde (negatif yönde) 90° döndürülerek elde edilmiş olurlar. Söz konusu bu dikdörtgenin alanı birim karenin alanına yani 1 br^2'ye eşittir.

Benzer şekilde bu dikdörtgenin üst tabanı dik açı olan köşe etrafında pozitif yönde 90° döndürülürse, tabanları bu dikdörtgene dik ve kendisine özdeş olan bir dikdörtgen daha bulunur ve böylece ters "L" şeklindeki özdeş dikdörtgenlerin uzun kenarları $\frac{r_n + a_n}{h_n} = \frac{p_n}{q_n} = m_n$ ve kısa kenarları da $\frac{r_n - a_n}{h_n} = \frac{q_n}{p_n} = m_n^{-1}$ olan [76] denklemindeki ters oranları verirler. Bu ise "Babil Metodu"nun bilinen en eski şeklini gösterir!

2. Susa Tabletine Göre Babil Metodunun Geometrik Yorumu ve Diğer Geometrik İlişkiler.



Şekil 7

Susa tabletinde m_n ve m_n^{-1} ters sayılarıyla (a_n, h_n, r_n) dik üçgenlerinin geometrik metotla bulunabilmesi için, yukarıdaki şekilde Babilonya Metodu'na göre $A_nH_nC_n$ $(O_nH_nC_n)$ dik üçgeninin bir dik kenarının uzunluğu yani $|H_nC_n| = 1$ birim olarak alınırsa, kenar uzunluklarına göre $O_nH_nC_n$ dik üçgeni $\left(\frac{a_n}{h_n}, 1, \frac{r_n}{h_n}\right)$ ve $A_nH_nC_n$ doğuran dik üçgeni de $\left(m_n, 1, \sqrt{m_n^2+1}\right)$ sıralı üçlülerle gösterilmiş olur. O halde $A_nB_nC_n$ ikizkenar üçgeninin çevrel çemberi (O_n merkezli ve $\frac{r_n}{h_n}$ birim yarıçaplı çember) ile $[A_nH_n]$ doğru parçasının uzantısı L_n noktasında kesiştiğinden, $A_nH_nC_n \sim C_nH_nL_n$ benzer üçgenleri oluşur ve buradan $C_nH_nL_n$ dik üçgeni $m_n^{-1}\left(m_n, 1, \sqrt{m_n^2+1}\right) = \left(1, m_n^{-1}, \sqrt{m_n^{-2}+1}\right)$ sıralı üçlüsüyle bulunmuş olur (ki günümüzde **"2. Thales Teoremi"** olarak geçen **"Benzer Üçgenler Teoremi"** Babilliler tarafından biliniyordu. Örneğin Tell Harmal'da bulunmuş olan Eski Babil çağına ait bir tablet ***Taha Baqir*** tarafından yayımlanan makalede, tabletteki problemin çözümüne göre, bir dik üçgenin dik açısının bulunduğu tepe noktasından hipotenüse indirilen dikmeyle meydana gelen 2 dik üçgenin asıl dik üçgene benzer üçgenler oldukları bilgisinden faydalanılmış olduğu anlaşılmaktadır. ***Taha Baqir***'e göre, bu tablet ***Öklit***'ten 17 asır kadar öncesine aittir ve problem metinlerinin en eskileri arasında bulunmaktadır. Bkz. "*Taha Baqir:* An Important Mathematical Problem Text from Tell Harmal, Sumer, Cilt 6, 1950, Sayfa: 39-55").

Eğer bu bilgiyi şeklimizde değerlendirirsek $A_nC_nL_n$ asıl dik üçgeninin $[A_nL_n]$ hipotenüsüne indirilen $[C_nH_n]$ dikmesiyle $A_nH_nC_n$ ve $C_nH_nL_n$ dik üçgenleri meydana gelmiş olur ve Tell Harmal tableti'ne (IM 55357) göre $A_nC_nL_n \sim A_nH_nC_n \sim C_nH_nL_n$ şeklinde bu dik üçgenler arasında benzerliklerin mevcut olduğu sonucu çıkar.

Bunun gibi diğer sonuçlar aşağıya çıkarılmıştır:

1. $A_nC_nL_n$ bir dik üçgendir. Çünkü $A_nB_nC_n$ ikizkenar üçgeninin çevrel çemberinin çapını gören $\angle(A_nC_nL_n)$ açısı diktir (yani *"Çapı gören çevre açı diktir"* bilgisi de biliniyordu. Oysa çapı gören çevre açının dik olduğu ilk kez ***Thales*** tarafından bilindiği veya keşfedildiği kabul ediliyordu. Ancak bu bilginin bulunduğu bir tabletin gün ışığına çıkmasıyla bu teoremin ***Thales***'ten çok önceleri bilinmiş olduğu anlaşıldı).
2. $m_n.m_n^{-1} = 1$'dir. Çünkü $A_nC_nL_n$ dik üçgenindeki ***Öklit***'in yükseklik bağıntısı veya $A_nC_nL_n \sim A_nH_nC_n \sim C_nH_nL_n$ bağıntıları nedeniyle $m_n.m_n^{-1} = 1$ olduğu görülür. Aynı şekilde bu 3 dik üçgen arasındaki benzerlikler nedeniyle $A_nC_nL_n$ dik üçgenindeki diğer Öklit bağıntılarını sorgulamıyoruz bile (!)
3. $A_nB_nC_n$ ikizkenar üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapının uzunluğu, geometrik olarak, $\frac{r_n}{h_n} = \frac{|A_nL_n|}{2} = \frac{m_n+m_n^{-1}}{2}$ şeklinde belirlenmiş olur.
4. $M_nK_nZ_nX_n$ ile $O_nF_nY_nP_n$ kareleri arasında kalan 4 dik üçgen benzer olduklarından $|M_nO_n| = \frac{m_n^{-1}}{2}$ sonucu çıkar ve buradan da $\frac{a_n}{h_n} = |O_nH_n| = \frac{m_n-m_n^{-1}}{2}$ geometrik sonucu elde edilir (ki burada $M_nK_nZ_nX_n$ ile $O_nF_nY_nP_n$ kareleri ve aralarındaki dik üçgenlerle daha sonra Çinli ***Choupei*** ve ***Sabit bin Kurra (826-901)*** tarafından yapılmış Pisagor teoremine ait ispat ortaya çıkmaktadır. Bu çizimi eski Babil tabletlerinde görmek mümkündür. Ayrıca burada $M_nK_nZ_nX_n$ karesinin $[Z_nX_n]$ kenarı çevrel çembere daima T_n noktasında teğettir (ki T_n noktası aynı zamanda O_n noktasından bu karenin $[K_nZ_n]$ kenarına çizilen paralel doğrunun çevrel çemberi kestiği noktadır)).
5. $O_nH_nC_n \cong P_nR_nN_n$ eş üçgenleri mevcuttur: İlkin M_n merkezli ve m_n birim çaplı çember ile K_n merkezli ve m_n^{-1} birim çaplı çemberi çizilirse, F_n noktasından $[P_nQ_n]$ çapına indirilen dikmenin kestiği nokta R_n ise $\frac{a_n}{h_n} = |P_nR_n| = \frac{m_n-m_n^{-1}}{2}$ olarak bulunur. İkinci olarak $[M_nK_n]$ sabit olmak üzere $M_nK_nF_nR_n$ dikdörtgeni sola doğru katlanırsa, $|P_nS_n| = \frac{r_n}{h_n}$ (çevrel çemberin yarıçap uzunluğu) olduğundan P_n merkezli ve $\frac{r_n}{h_n}$ birim yarıçaplı çemberin $[R_nN_n]$ doğru parçasını kestiği N_n noktası ile P_n noktası birleştirilirse, $O_nH_nC_n \cong P_nR_nN_n$ eş üçgenleri ortaya çıkar.

Son olarak E_n ve L'_n noktalarının $A_n, M_n, O_n, H_n \in [A_nH_n]$ noktalarıyla çakışmalarına ait sonuçları aşağıda verirken, bu durumlara ilişkin çizimlerin birer matematik-sanat şaheseri olduklarını belirtmem gerekir (ki L'_n noktası, $[C_nH_n]$ sabit olmak üzere $C_nH_nL_n$ dik üçgeninin $A_nB_nC_n$ dik üçgeninin içine doğru katlanmasıyla $[A_nH_n]$ doğru parçasında L_n noktasına karşılık gelen nokta ya da L_n noktasının H_n noktasına göre simetrik olan noktadır. Ayrıca aşağıdaki durumlarda $k \in \mathbb{R}^+$ olarak geçer):

1. $E_n, L'_n = A_n$ ise: $\alpha_n = 45°$ ve $m_n = 1$ olduğundan $\frac{a_n}{h_n} = \frac{m_n - m_n^{-1}}{2} = \frac{1-1^{-1}}{2} = 0$ ve $\frac{r_n}{h_n} = \frac{m_n + m_n^{-1}}{2} = \frac{1+1^{-1}}{2} = 1$ eşitliklerinden $(a_n, h_n, r_n) = k(0,1,1)$ elde edilir.
2. $L'_n = M_n$ ise: $\alpha_n = Tan^{-1}(\sqrt{2}) \cong 54°44'08''$ ve $m_n = \sqrt{2}$ olduğundan $\frac{a_n}{h_n} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}^{-1}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ ve $\frac{r_n}{h_n} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}^{-1}}{2} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$ eşitliklerinden $(a_n, h_n, r_n) = k(1,2\sqrt{2},3)$ elde edilir.
3. $L'_n = O_n$ ise: $\alpha_n = 60°$ ve $m_n = \sqrt{3}$ olduğundan $\frac{a_n}{h_n} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}^{-1}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ve $\frac{r_n}{h_n} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}^{-1}}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ eşitliklerinden $(a_n, h_n, r_n) = k(1,\sqrt{3},2)$ elde edilir.
4. $E_n = M_n$ ise: $\alpha_n = Tan^{-1}(2) \cong 63°26'06''$ ve $m_n = 2$ olduğundan $\frac{a_n}{h_n} = \frac{2-2^{-1}}{2} = \frac{3}{4}$ ve $\frac{r_n}{h_n} = \frac{2+2^{-1}}{2} = \frac{5}{4}$ eşitliklerinden $(a_n, h_n, r_n) = k(3,4,5)$ elde edilir.
5. $E_n = O_n$ ise: $\alpha_n = 67°30'$ ve $m_n = 1+\sqrt{2}$ olduğundan $\frac{a_n}{h_n} = \frac{(\sqrt{2}+1)-(\sqrt{2}+1)^{-1}}{2} = 1$ ve $\frac{r_n}{h_n} = \frac{(\sqrt{2}+1)+(\sqrt{2}+1)^{-1}}{2} = \sqrt{2}$ eşitliklerinden $(a_n, h_n, r_n) = k(1,1,\sqrt{2})$ elde edilir.
6. $E_n, L'_n = H_n$ ise: $\alpha_n = Tan^{-1}(\infty) \cong 90°$ ve $m_n = \infty$ olduğundan $\frac{a_n}{h_n} = \frac{m_n}{2} = \frac{r_n}{h_n}$ eşitliklerinden $h_n = 0$ ve a_n ile r_n sonsuz büyüklükte olarak elde edilirler.

4.2. Plimpton 322 No'lu Tabletin Matematiksel-Astronomik Çözümü

Neugebauer ve ***Sachs***'ın "Matematiksel Çivi Yazıtları (Mathematical Cuneiform Texts), New Heaven, Conn., 1945" kitabında dünyaya duyurulduğu andan itibaren tüm dikkatler bu tabletin çözümünün ters sayılar ile **"Babil Metodu"** kullanılarak bulunacağı yönündeydi.

Bu konuda bazı bilim adamların görüşleri özetle şöyledir:

1. ***O. Neugebauer*** ve ***A. J. Sachs***'a göre Tablo 12'nin tertibi ve sütunlardaki sayıların hesaplanması şu şekilde olmuştur: Tablo 12'deki (a_n, h_n, r_n) dik üçgenlerinin p_n ve q_n doğuranları hesaplandıklarında, bunların **"Standart Ters Sayılar Cetvelleri"**ndeki sayılara uydukları görülmektedir. Demek ki (a_n, h_n, r_n) dik üçgenleri Babil metoduna dayanılarak ters (makûs) değerler cetvelindeki bazı sayılara göre düzenlenmiş olması ihtimali olduğu söylenebilir.

   Neugebauer, tam sayı kenarlı dik üçgenlerin bulunmasında kullanılan bu yöntemin Helenistik çağda çok iyi bilinen bir yöntem olduğuna dikkat çeker. Babil gelenekleriyle yakın temasa açık olarak bilinen ***Diofant***'ın bu yöntemi sık sık kullanmış olduğunu, Hint matematikçilerinden 9. yüzyılda yaşamış olan ***Mahavira*** ile 12. yüzyılda yaşamış olan ***Bhaşkara***'nın da bu yönteme başvurmuş olduklarını eklemektedir.

2. ***B.L. Van der Waerden*** ise Tablo 12'deki sayıların hesaplanmasının şu şekilde olmuş olabileceğini tahmin eder: (a_n, h_n, r_n) dik üçgenleri Babil metoduna dayanılarak ters sayılar aracılığıyla bulunmuştur. ***Van der Waerden*** böyle bir yöntemin Babilliler için tipik sayılabileceğini ve bu yöntemin ***Diofant*** tarafından da kullanılmış olduğunu söyler.

   Neugebauer, ***Sachs*** ve ***Van der Waerden*** bu tip problemlerin, Grek Aritmetiği ile, özellikle Pisagorcular'ın uğraştıkları teorik aritmetikle büyük benzerlik ve yakınlık gösterdiğine önemle işaret ederler. Demek ki burada Pisagorcular üzerinde açık ve önemli bir Babil etkisiyle karşılaşıyoruz.

3. ***E. M. Bruins*** gerek bu tabletteki (a_n, h_n, r_n) dik üçgenlerin listesi ve gerekse bu sayıların Babilliler tarafından hesaplanma tarzları hakkında yukarıda söz konusu edilen tahminleri tamamen tatmin edici bulmaz. Ona göre hesaplama şu şekilde yapılmış olmalıdır: Tabletteki (a_n, h_n, r_n) dik üçgenler Babil metoduna dayanılarak bulunurken m_n'nin düzgün sayılardan seçilmesi, yani m_n ile m_n^{-1}'in **"Standart Ters Sayılar Cetvelleri"**nden alınmış olması gerekmektedir. Başka bir deyimle, ***Bruins***'a göre de (a_n, h_n, r_n) dik üçgenleri bulunurken Babilliler m_n'yi yalnızca düzgün sayılar olarak seçmekteydiler. Aynı zamanda ileri sürdüğü bu hesaplama yönteminin çiviyazılı tabletlerdeki veriler ve ayrıntılı hesaplama ile doğrulanmakta olduğunu ifade eder.

Bruins, ayrıca Babillilerce bilinen (a_n, h_n, r_n) sıralı üçlülerinin, p_n ile q_n tam ve düzgün sayılar olmak şartıyla, [58]'deki gibi olduğuna, hiç olmazsa bir dik kenara karşılık gelen sayının yani burada h_n'nin "düzgün" çıktığına işaret eder. ***Bruins***, burada $\left(\frac{a_n}{h_n}, 1, \frac{r_n}{h_n}\right)$ sıralı üçlüsüne karşılık gelen $(m_n^2 - 1, 2m_n, m_n^2 + 1)$ tek parametreli çözümün, ***Proklos***'a (M.S. 410-485) göre, ***Platon***'un dik üçgen kenar değerlerini bulma yöntemine denk düştüğünü ekler.

Gerçekten de yukarıdaki tüm tahminler tabletteki (a_n, h_n, r_n) dik üçgenlerinin bulunmasında önemli bir rol oynayan m_n ile m_n^{-1}'in **"Standart Ters Sayılar Cetvelleri"**nden alınmış olmasını işaret etmektedir. Çünkü eğim açıları $(30°, 45°)$ aralığında olan (a_n, h_n, r_n) dik üçgenlerinin eğimleri

$$[83] \quad \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{a_{17}}{h_{17}} < \cdots < \frac{a_{15}}{h_{15}} < \frac{a_{14}}{h_{14}} < \cdots < \frac{a_2}{h_2} < \frac{a_1}{h_1} < \frac{a_0}{h_0} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

ve bu dik üçgenleri doğuran dik üçgenlerin $m_n = \frac{p_n}{q_n}$ eğimleri de

$$[84] \quad 1;43,55,22,\ldots = \sqrt{3} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{p_{17}}{q_{17}} = m_{17} < \cdots < \frac{p_{15}}{q_{15}} = m_{15} < m_{14} = \frac{p_{14}}{q_{14}} < \cdots < m_2 = \frac{p_2}{q_2} < m_1 = \frac{p_1}{q_1} < m_0 = \frac{p_0}{q_0} = \frac{\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}}{\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}} = 1+\sqrt{2} = 2;24,51,10,\ldots$$

olurlar.

Burada ayrıca simetri kavramı nedeniyle doğuran dik üçgenlerin tepe açılarını birer eğim açısı olarak kabul eden dik üçgenlerin $m_n^{-1} = \frac{q_n}{p_n}$ eğimleri ise

$$[85] \quad 0;18,32,27,\ldots = \sqrt{2} - 1 = \frac{q_0}{p_0} = m_0^{-1} < m_1^{-1} = \frac{q_1}{p_1} < m_2^{-1} = \frac{q_2}{p_2} < \cdots < m_{14}^{-1} = \frac{q_{14}}{p_{14}} < m_{15}^{-1} = \frac{q_{15}}{p_{15}} < \cdots < m_{17}^{-1} = \frac{q_{17}}{p_{17}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0;34,38,27,\ldots$$

olarak elde edilir.

Şu hâlde [84]'e göre

$$[86]\quad m_1 = 2;24,\ m_5 = 2;15,\ m_8 = 2;8,\ m_9 = 2;5,\ m_{11} = 2;0,\ m_{15} = 1;48$$

ve [85]'e göre

$$[87]\quad m_1^{-1} = 0;25,\ m_6^{-1} = 0;27,\ m_{11}^{-1} = 0;30,\ m_{13}^{-1} = 0;32$$

elde edilen sayıları **"Standart Ters Sayılar Cetvelleri"**ne uygun düşmekle birlikte Tablo 13'teki (a_n, h_n, r_n) dik üçgenlerinden 7 tanesini gösterir. Oysa (cambazlığa girmeden) geriye kalan 8 dik üçgenin bulunması ve bu 15 dik üçgenin Tablo 13'teki gibi sıralanması için en azından iyi bir açıklamanın yapılması gerekirdi. Maalesef bu yapılamamıştır. Bu açıklama yapılamadığı gibi, Babil Matematiği'ni kötülemek için fırsatçılara da gün doğmuştur. Bu da tabletin çözümü için ta en başından beri aşırı benzerlikten dolayı yanılmayı ve bu yanılgı içinde maalesef geçmişte yaşanmış kötü olayları gösterir. Ajan ***Smith***'in de layıkıyla belirttiği gibi, bu yol **"Çıkmaz Sokak"** demektir. Çünkü Plimpton 322 no'lu tabletinin çözümünden hareketle şunu rahatlıkla söyleyebilirim: Bu tabletin çözümü için cebrik ve geometrik yaklaşımlar yapılabilir. Hatta buralardan elde edilecek metotlar ile çözümler de ortaya konulabilir. Ancak her şartta bu metotlardan istenilen sonuçlara ulaşılabilinmesi gerekir. Bu ise Plimpton 322 no'lu tabletinin çözümüne aykırı düşer. Örneğin aşağıdaki metot böyle bir metot (türünün tek örneği) olup neredeyse bu tabletin çözümü gibi gözükür!

4.2.1. Çıkmaz Sokakta Karmaşık Bir Metot (*Mathquake*, İlk Aklıma Geldiği (Tahmin Ettiğim) An: 17.7.2006, 02:08:14, Tahminimin Doğrulandığı Keşif Anı: 17.7.2006, 16:04:01)

Bu metot tabletteki (a_n, h_n, r_n) dik üçgenlerini doğuran ardışık dik üçgenlerin $m_n = \frac{p_n}{q_n}$ eğimlerinin oranlarından elde edilen ve sanki bir ipucuymuş gibi algılanan bir bilgiden hareketle ortaya çıkmıştır.

4.2.1.1. Ardışık 2 Doğuran Dik Üçgene Ait Eğimler Oranı (*Mathquake*, 09.06.2006, 21:30). Plimpton 322 no'lu tabletindeki ardışık 2 doğuran dik üçgendeki

$$[88]\quad m_{n,n+1} = \frac{m_n}{m_{n+1}} = \frac{\frac{p_n}{q_n}}{\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}} = \frac{p_n}{q_n} \times \left(\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right)^{-1}$$

eğimler oranı göz önüne alınırsa Tablo 13'ten şu sonuçlar elde edilir (ki $(0°, 90°)$ aralığında tanjant fonksiyonu daima artan olduğundan $m_{n+1} < m_n$ eşitsizliği geçerli olur):

$$[89]\quad \begin{aligned} M_1 &:= m_{1,2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{\frac{p_1}{q_1}}{\frac{p_2}{q_2}} = \frac{\frac{12}{5}}{\frac{64}{27}} = \frac{12}{5} \times \frac{27}{64} = \frac{81}{80} = m_{3,4} = m_{5,6} = m_{7,8} = m_{10,11} = m_{13,14}, \\ M_2 &:= m_{2,3} = \frac{m_2}{m_3} = \frac{\frac{p_2}{q_2}}{\frac{p_3}{q_3}} = \frac{\frac{64}{27}}{\frac{75}{32}} = \frac{64}{27} \times \frac{32}{75} = \frac{2048}{2025}, \\ M_3 &:= m_{4,5} = \frac{m_4}{m_5} = \frac{\frac{p_4}{q_4}}{\frac{p_5}{q_5}} = \frac{\frac{125}{54}}{\frac{9}{4}} = \frac{125}{54} \times \frac{4}{9} = \frac{250}{243} = m_{6,7} = m_{9,10} = m_{14,15}, \\ M_4 &:= m_{8,9} = \frac{m_8}{m_9} = \frac{\frac{p_8}{q_8}}{\frac{p_9}{q_9}} = \frac{\frac{32}{15}}{\frac{25}{12}} = \frac{32}{15} \times \frac{12}{25} = \frac{128}{125} = m_{12,13}, \\ M_5 &:= m_{11,12} = \frac{m_{11}}{m_{12}} = \frac{\frac{p_{11}}{q_{11}}}{\frac{p_{12}}{q_{12}}} = \frac{\frac{2}{1}}{\frac{48}{25}} = \frac{2}{1} \times \frac{25}{48} = \frac{25}{24}. \end{aligned}$$

Şu hâlde bu 5 sonuçla ortaya çıkan

$$[90]\quad \begin{aligned} M_1 &= \frac{81}{80} \leftrightarrow \nabla(\gamma_1) \cong 30', \\ M_2 &= \frac{2048}{2025} \leftrightarrow \nabla(\gamma_2) \cong 30', \\ M_3 &= \frac{250}{243} \leftrightarrow \nabla(\gamma_3) \cong 1°15', \\ M_4 &= \frac{128}{125} \leftrightarrow \nabla(\gamma_4) \cong 1°, \\ M_5 &= \frac{25}{24} \leftrightarrow \nabla(\gamma_5) \cong 1°45' \end{aligned}$$

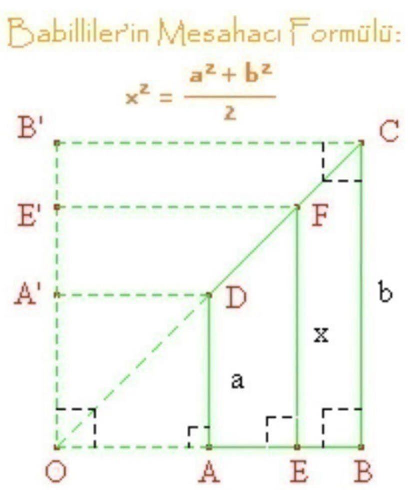
genel sonucu göz önüne alınırsa eğimler oranları arasındaki karakteristik ilişkiler şu şekilde ortaya çıkar:

$$\text{[91]}\quad \begin{aligned} &M_1M_2=\frac{81}{80}\times\frac{2048}{2025}=\frac{128}{125}=M_4\leftrightarrow \nabla(\gamma_1+\gamma_2)=\nabla(\gamma_1)+\nabla(\gamma_2)\cong 30'+30'=1^\circ\cong\nabla(\gamma_4),\\ &M_1M_3=\frac{81}{80}\times\frac{250}{243}=\frac{25}{24}=M_5\leftrightarrow \nabla(\gamma_1+\gamma_3)=\nabla(\gamma_1)+\nabla(\gamma_3)\cong 30'+1^\circ15'=1^\circ45'\cong\nabla(\gamma_5),\\ &M_2M_5=\frac{2048}{2025}\times\frac{25}{24}=\frac{256}{243}=\frac{250}{243}\times\frac{128}{125}=M_3M_4\leftrightarrow \nabla(\gamma_2+\gamma_5)=\nabla(\gamma_2)+\nabla(\gamma_5)\\ &\cong 30'+1^\circ45'=2^\circ15'=1^\circ15'+1^\circ\cong\nabla(\gamma_3)+\nabla(\gamma_4)=\nabla(\gamma_3+\gamma_4). \end{aligned}$$

Sonuçta tüm bu sonuçlara göre Plimpton 322 no’lu tabletindeki M_k eğim oranları için şu bağıntı ortaya çıkar:

$$\text{[92]}\quad M=\prod_{k=1}^{5}M_k^{n_k}\leftrightarrow\nabla(\gamma)=\sum_{k=1}^{5}n_k\nabla(\gamma_k)\quad\left(n_k\in\mathbb{R},\nabla(\gamma_k)=Tan^{-1}\left(\frac{a_kh_{k+1}-a_{k+1}h_k}{a_ka_{k+1}+h_kh_{k+1}}\right),\nabla(\gamma_k)\cong Log_{M_4}(M_k),m\cong\sqrt{M_4}\right).$$

Artık bu sonuçla esas problemimiz olan Babillilerin M_1,M_2,M_3,M_4,M_5 eğim oranlarına nasıl ulaştığına indirgenmiş olmaktadır. Bundan sonra ise problemin çözümü için akla gelen ilk metot ya da formül **“Mesahacı Formülü”** olacaktır.



4.2.1.2. Mesahacı Formülü

Arsaların ve coğrafi bölgelerin yüzölçümleri ve çeşitli geometrik şekillerin alanlarını hesaplamak için iyi bir yaklaşım sunan mesahacı formülü, 4-genin alanı için iyi bir yaklaşıklık ve yamuk, paralelkenar, dikdörtgen ve karenin alanları için ise tam sonuç verir. Örneğin YBC 4675 no’lu tabletinde bir 4-genin alanı için mesahacı formülünün genel şeklinin kullanılmış olduğu görülmektedir. ***Bruins***’a göre Babilliler aslında bir mesahacı (ölçüm yapan) formülündeki ilişkiden (a_n,h_n,r_n) dik üçgenlerinin bulunmasına benzer bir ilişkinin hesaplanması için de faydalanmaktaydılar.

Bir diğer Babil tabletinde ise bir yamuğun *a* ve *b* uzunluklarındaki tabanlarına paralel olan ve yamuğun alanını 2 eşit parçaya bölen kesenin yamuğun içinde kalan *x* uzunluğundaki parçasını veren ilginç bir formül vardır. Eğer bu formül için ABCD dik yamuğu göz önüne alınırsa, Babillilerin Analitik Geometri temelli çalışmasına geçildiğinde bu dik yamuk simetri kavramıyla kareye tamamlanarak karelerin alanlarından “Mesahacı Formülü” kolaylıkla bulanabilmektedir. Şöyle ki: ABCD dik yamuğu ve bu dik yamuğun alanını 2 eşit parçaya ayıran $[EF]$ kesen parçası verildiğinde, ABCD dik yamuğu $OBCB'$ karesine tamamlanırsa, $OBCB'$ karesinin içindeki şekiller $[OC]$ köşegenine göre simetrik olduğundan

$$\begin{aligned} Alan(AEFD)&=\frac{Alan(OEFE')-Alan(OADA')}{2}=\frac{x^2-a^2}{2}\\ Alan(EBCF)&=\frac{Alan(OBCB')-Alan(OEFE')}{2}=\frac{b^2-x^2}{2} \end{aligned}\Rightarrow Alan(AEFD)=Alan(EBCF)\Rightarrow\frac{x^2-a^2}{2}=\frac{b^2-x^2}{2}\Rightarrow x^2=\frac{a^2+b^2}{2}$$

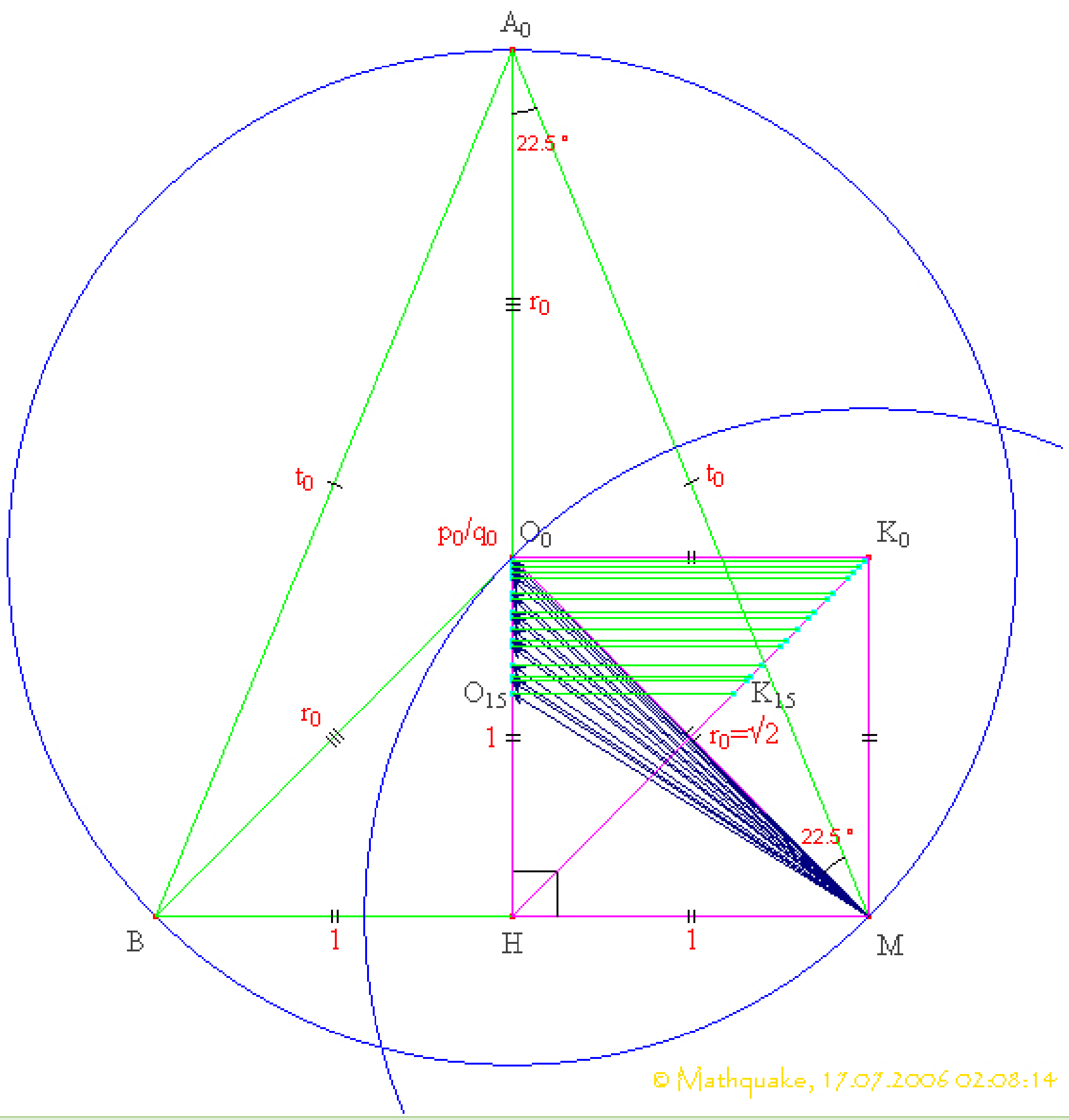
eşitliklerinden $Alan(AEFD)=Alan(EBCF)$ nedeniyle

$$\text{[93]}\quad x^2=\frac{a^2+b^2}{2}$$

şeklinde ABCD dik yamuğundaki mesahacı formülü bulunmuş oluyordu ve buradan $k\in\mathbb{R}^+$ için $Alan(AEFD)=kAlan(EBCF)$ olduğundan

$$\text{[94]}\quad x^2=\frac{a^2+kb^2}{1+k}$$

genel formülüne erişilmiş olunur.



Şekil 8

Şu hâlde Plimpton 322 no’lu tabletinde yer alan dik üçgenlerinin hepsi birden Şekil 3’teki birim karenin içinde alınırsa yandaki şekil ortaya çıkar. Bu şekilde Plimpton 322 no’lu tabletindeki (a_n,h_n,r_n) sıralı üçlüler O_nMH dik üçgenleriyle gösterilmiştir. O halde O_nMH dik üçgenlerinin O_n tepe noktalarından O_0HMK_0 birim karesinin $[HM]$ kenarına çizilen paralel doğruların $[HK_0]$ köşegenini kestiği noktalar K_n olarak alınırsa HK_0O_0 dik üçgeni içinde $n=0,1,\dots,14$ için $O_nO_{n+1}K_{n+1}K_n$ dik yamukları ortaya çıkar ve $|HO_n|=\frac{a_n}{h_n}=|O_nK_n|$ için HO_nK_n ikizkenar dik üçgenleri nedeniyle $O_nO_{n+1}K_{n+1}K_n$ ve $O_{n+1}O_{n+2}K_{n+2}K_{n+1}$ ardışık 2 dik yamuğunun alanları için [94]’teki mesahacı formülü uygulanırsa $Alan(O_{n+1}O_{n+2}K_{n+2}K_{n+1})=k_nAlan(O_nO_{n+1}K_{n+1}K_n)$ olduğundan

$$\text{[95]}\quad |O_{n+1}K_{n+1}|^2=\frac{|O_{n+2}K_{n+2}|^2+k_n|O_nK_n|^2}{1+k_n}$$

formülü elde edilmiş olur. Bu formülde (a_n, h_n, r_n) dik üçgenleri inşaa etme metoduna göre ilk 2 dik üçgenin $|O_nK_n|$ ve $|O_{n+1}K_{n+1}|$ eğimleri verildiği takdirde, 3. dik üçgenin eğimi olan $|O_{n+2}K_{n+2}|$

$$\frac{a_{n+2}}{h_{n+2}} = |O_{n+2}K_{n+2}| = \sqrt{(1+k_n)|O_{n+1}K_{n+1}|^2 - k_n|O_nK_n|^2} = \sqrt{(1+k_n)\left(\frac{a_{n+1}}{h_{n+1}}\right)^2 - k_n\left(\frac{a_n}{h_n}\right)^2}$$

eşitliklerinden

$$[96] \quad \frac{a_{n+2}}{h_{n+2}} = \sqrt{(1+k_n)\left(\frac{a_{n+1}}{h_{n+1}}\right)^2 - k_n\left(\frac{a_n}{h_n}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a_{n+1}}{h_{n+1}}\right)^2 - k_n\left(\left(\frac{a_n}{h_n}\right)^2 - \left(\frac{a_{n+1}}{h_{n+1}}\right)^2\right)} = \sqrt{\left(\frac{a_{n+1}}{h_{n+1}}\right)^2 - k_n\left(\frac{a_n}{h_n} - \frac{a_{n+1}}{h_{n+1}}\right)\left(\frac{a_n}{h_n} + \frac{a_{n+1}}{h_{n+1}}\right)}$$

şeklinde bulunmuş olur. Buradan da 3. dik üçgeni doğuran dik üçgenin m_{n+2} eğimi, [77]'den kareye tamamlama metoduyla

$$\frac{m_{n+2} - m_{n+2}^{-1}}{2} = \frac{a_{n+2}}{h_{n+2}} \Rightarrow m_{n+2}^2 - 2 \times \frac{a_{n+2}}{h_{n+2}} \times m_{n+2} - 1 = 0 \Rightarrow \left(m_{n+2} - \frac{a_{n+2}}{h_{n+2}}\right)^2 = 1 + \left(\frac{a_{n+2}}{h_{n+2}}\right)^2 \Rightarrow m_{n+2} = \frac{a_{n+2}}{h_{n+2}} + \sqrt{1 + \left(\frac{a_{n+2}}{h_{n+2}}\right)^2}$$

eşitliklerinden

$$[97] \quad m_{n+2} = \frac{a_{n+2}}{h_{n+2}} + \sqrt{1 + \left(\frac{a_{n+2}}{h_{n+2}}\right)^2} = \frac{a_{n+2}}{h_{n+2}} + \sqrt{\left(1 + \frac{a_{n+2}}{h_{n+2}}\right)^2 - 2 \times \frac{a_{n+2}}{h_{n+2}}}$$

olarak elde edilir.

Burada söz konusu olan k_n değerleri m_{n+2} için [96]'da bulunan $\frac{a_{n+2}}{h_{n+2}}$ yaklaşık değeri için [97]'den elde edilen yaklaşık değeriyle $m_{n+1,n+2} = \frac{m_{n+1}}{m_{n+2}}$ [89] nedeniyle [90]'daki uygun olan M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 değerlerinden birinin alınmasıyla belirlenmiş olur.

Ayrıca [96]'dan k_n'nin

$$[98] \quad k_n = \frac{Tan^2(\theta_{n+2}) - Tan^2(\theta_{n+1})}{Tan^2(\theta_{n+1}) - Tan^2(\theta_n)}$$

olması nedeniyle Tablo 13'e göre ortalama değer teoreminin geçerli olduğu

$$[99] \quad \begin{aligned} &\frac{7}{5} < \sqrt{2} < \frac{Tan(\theta_{n+1}) - Tan(\theta_n)}{\theta_{n+1} - \theta_n} < 2, \\ &\frac{281}{250} < \sqrt[4]{\varphi} < \frac{Tan(\theta_{n+1}) + Tan(\theta_n)}{\theta_{n+1} + \theta_n} < \sqrt{\varphi} \end{aligned}$$

ve

$$[100] \quad \begin{aligned} &\frac{Tan(\theta_{n+2}) - Tan(\theta_{n+1})}{Tan(\theta_{n+1}) - Tan(\theta_n)} < \frac{\theta_{n+2} - \theta_{n+1}}{\theta_{n+1} - \theta_n} = \frac{\nabla(\theta_{n+1})}{\nabla(\theta_n)}, \\ &\frac{Tan(\theta_{n+2}) + Tan(\theta_{n+1})}{Tan(\theta_{n+1}) + Tan(\theta_n)} < \frac{\theta_{n+2} + \theta_{n+1}}{\theta_{n+1} + \theta_n} < 1 \end{aligned}$$

sonuçları elde edilmektedir. O halde [98]'den

$$k_n = \frac{Tan^2(\theta_{n+2}) - Tan^2(\theta_{n+1})}{Tan^2(\theta_{n+1}) - Tan^2(\theta_n)} < \frac{\theta_{n+2}^2 - \theta_{n+1}^2}{\theta_{n+1}^2 - \theta_n^2} = \frac{\theta_{n+2} - \theta_{n+1}}{\theta_{n+1} - \theta_n} . \frac{\theta_{n+2} + \theta_{n+1}}{\theta_{n+1} + \theta_n} < \frac{\nabla(\theta_{n+1})}{\nabla(\theta_n)}$$

olduğundan

$$[101] \quad k_n < \frac{\nabla(\theta_{n+1})}{\nabla(\theta_n)}$$

temel eşitsizliği söz konusu olur.

Şu hâlde Tablo 13'teki θ_n açılarına göre Babillilerin k_n katsayılar tablosu düzgün sayılarla iyi bir yaklaşım için şu şekilde olmalıydı:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
k_n	$\frac{25}{12}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{54}{25}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{54}{25}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{25}{8}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{54}{25}$

Tablo 14

Şimdi bu tablodan hareketle Plimpton 322 no'lu tabletindeki ilk 3 dik üçgene nasıl erişildiğini göstereceğim ama burada çok daha güç hesapların döndüğünü belirtmeden geçemeyeceğim!

1. İlkin Şekil 8'e göre ilk eğimin değeri

$$[102]\quad \frac{p_1}{q_1} = m_1 < \frac{p_0}{q_0} = m_0 = 2;24,51,10 = 1;0 + 1;24,51,10 \lesssim \overline{m_0} = 1+\sqrt{2} \Rightarrow \frac{p_1}{q_1} = m_1 = 2;24 = 2 + \frac{24}{60} = 2 + \frac{2}{5} = \frac{12}{5}$$

olarak bulunur (ki burada $m_1 \lesssim \overline{m_0} = 1+\sqrt{2} < 1 + 1;25 = 2;25$ eşitsizliğine göre de $m_1 = 2;24$ alınabileceğine dikkat ediniz).

Burada söz konusu $1;24,51,10 \lesssim \sqrt{2}$ yaklaşık değeri yine 1945'te ***Neugebauer*** ve ***Sachs*** tarafından ilk kez okunan YBC 7289 no'lu tablettekinden gelir:

Resim 5. MÖ 1900-1600'e tarihlenen YBC 7289 no'lu tableti. Bu tabletteki karenin bir köşegeni üzerinde $\sqrt{2}$ için çivi yazısıyla 60 tabanında 3 atmışlığı doğru olan 1;24,51,10 ve onun altında karenin köşegen uzunluğunu gösteren 0;42,25,35 yaklaşıklıkları verilmiştir (Bkz. "*YBC 7289 No'lu Tablet*"). Sizce ***Pisagor***, kendisinden 1300 yıl önce verilen bu yaklaşıklığı görseydi kaç boğa kurban ederdi ya da tövbe edip imana mı gelirdi?

Şu hâlde O_0HMK_0 birim karesinde $|O_0H| = 1$ birim ve [77]'deki ilk eşitlikten

$$[103]\quad \begin{aligned} &\frac{a_0}{h_0} = 1;0, \\ &\frac{a_1}{h_1} = \frac{m_1 - m_1^{-1}}{2} = \frac{2;24 - 2;24^{-1}}{2} = \frac{2;24 - 0;25}{2} = \frac{1;59}{2} = 0;30 \times 1;59 = 0;59,30 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

2. Eğer [103]'teki değerler [96]'da yerlerine konulursalar

$$[104]\quad \frac{a_2}{h_2} = \sqrt{\left(\frac{a_1}{h_1}\right)^2 - k_0\left(\frac{a_0}{h_0} - \frac{a_1}{h_1}\right)\left(\frac{a_0}{h_0} + \frac{a_1}{h_1}\right)} = \sqrt{0;59,30^2 - \frac{25}{12} \times (1;0 - 0;59,30)(1;0 + 0;59,30)} = \sqrt{0;59,0,15 - \frac{25}{12} \times 0;0,30 \times 1;59,30}$$
$$= \sqrt{0;56,55,46,15} = 0;58,26,40$$

yaklaşıklığı elde edilir ve bu yaklaşıklıkla

$$[105]\quad m_2 = \frac{a_2}{h_2} + \sqrt{\left(1 + \frac{a_2}{h_2}\right)^2 - 2 \times \frac{a_2}{h_2}} = 0;58,26,40 + \sqrt{(1 + 0;58,26,40)^2 - 2 \times 0;58,26,40} = 0;58,26,40 + \sqrt{1;56,55,45,11,6,40}$$
$$= 0;58,26,40 + 1;23,45,36 = 2;22,12,16$$

elde edilen yaklaşıklığına göre

$$[106]\quad m_{1,2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{2;24}{2;22,12,16} = 1;0,45,27,\ldots > 1;0,45 = \frac{81}{80} = M_1 \Rightarrow m_2 = \frac{m_1}{M_1} = \frac{2;24}{1;0,45} = 2;22,13,20 = \frac{64}{27}$$

şeklinde ikinci dik üçgenin doğuranları bulunmuş olur. Buna göre ikinci dik üçgenin eğimi

$$[107]\quad \frac{a_2}{h_2} = \frac{m_2 - m_2^{-1}}{2} = \frac{2;22,13,20 - 2;22,13,20^{-1}}{2} = \frac{2;24 - 0;25,18,45}{2} = \frac{1;56,54,35}{2} = 0;58,27,17,30$$

olarak elde edilir.

3. Şimdi [103]'teki 2. eşitlikteki ve [107]'deki değerler [96]'da yerlerine konulursalar

$$[108]\quad \begin{aligned}\frac{a_3}{h_3} &= \sqrt{\left(\frac{a_2}{h_2}\right)^2 - k_1\left(\frac{a_1}{h_1}-\frac{a_2}{h_2}\right)\left(\frac{a_1}{h_1}+\frac{a_2}{h_2}\right)} = \sqrt{0;58,27,17,30^2 - \frac{8}{9}\times(0;59,30-0;58,27,17,30)(0;59,30+0;58,27,17,30)} \\ &= \sqrt{0;56,56,58,14,50,6,15 - \frac{8}{9}\times 0;1,2,42,30\times 1;57,57,17,30} = \sqrt{0;55,7,23,21,21,18,28,20} = 0;57,30,35,39,39,11,21\end{aligned}$$

yaklaşıklığı elde edilir ve bu yaklaşıklıkla

$$[109]\quad \begin{aligned} m_3 &= \frac{a_3}{h_3} + \sqrt{\left(1+\frac{a_3}{h_3}\right)^2 - 2\times\frac{a_3}{h_3}} = 0;57,30,35,39,39,11,21 + \sqrt{(1+0;57,30,35,39,39,11,21)^2 - 2\times 0;57,30,35,39,39,11,21} \\ &= 0;57,30,35,39,39,11,21 + \sqrt{1;55,7,23,21,21,18,27,10,36,51,5,26,49,21} = 0;57,30,35,39,39,11,21 + 1;23,6,38,32,15,13 = 2;20,37,14,11,54,24,21\end{aligned}$$

elde edilen yaklaşıklığına göre

$$[110]\quad m_{2,3} = \frac{m_2}{m_3} = \frac{2;22,13,20}{2;20,37,14,11,54,24,21} = 1;0,41,0,9,\ldots > 1;0,40,53,20 = \frac{2048}{2025} = M_2 \Rightarrow m_3 = \frac{m_2}{M_2} = \frac{2;22,13,20}{1;0,40,53,20} = 2;20,37,30 = \frac{75}{32}$$

şeklinde 3. dik üçgenin doğuranları bulunur ve bu dik üçgenin eğimi de

$$[111]\quad \frac{a_3}{h_3} = \frac{m_3 - m_3^{-1}}{2} = \frac{2;20,37,30 - 2;20,37,30^{-1}}{2} = \frac{2;20,37,30 - 0;25,36}{2} = \frac{1;55,1,30}{2} = 0;57,30,45$$

olarak elde edilir.

Not 4. Eğer 3. dik üçgenin doğuranları

$$[112]\quad m_{2,3} = \frac{m_2}{m_3} = \frac{2;22,13,20}{2;20,37,14,11,54,24,21} = 1;0,41,0,9,\ldots < 1;0,45 = \frac{81}{80} = M_1 \Rightarrow m_3 = \frac{m_2}{M_1} = \frac{2;22,13,20}{1;0,45} = 2;20,27,59,0,44,26,40 = \frac{5120}{2187}$$

olarak alınsaydı,

$$[113]\quad \begin{aligned}\frac{a_3}{h_3} &= \frac{m_3 - m_3^{-1}}{2} = \frac{2;20,27,59,0,44,26,40 - 2;20,27,59,0,44,26,40^{-1}}{2} = \frac{2;20,27,59,0,44,26,40 - 0;25,37,44,3,45}{2} = \frac{1;54,50,14,56,59,26,40}{2} \\ &= 0;57,25,7,28,29,43,20\end{aligned}$$

sayısının karesinin 1 fazlasının tabletteki 3. Satır-4. Sütun'a sığamayacak kadar büyük olduğu görülecekti!

Sonuçta Plimpton 322 no'lu tabletindeki bütün (a_n, h_n, r_n) dik üçgenlerine bu şekilde ulaşmak mümkündür, fakat bu sefer de Tablo 14'deki k_n katsayılarına nasıl ulaşıldığı sorusu açıkta kalmaktadır. Söz konusu k_n katsayılarını bulma problemi en az tabletteki dik üçgenleri bulmak kadar ağır bir problemdir. Üstelik yukarıda görüldüğü üzere tabletteki dik üçgenlere ulaşabilmek için düzgün sayılarla oluşan M_k eğim oranlarıyla birlikte her adımda 2 kez karekök hesabı yapmak gerekmektedir. O halde bu metot da aranılan metot olamaz. Dolayısıyla artık sana, bana veya ona göre değil hepimiz için geçerli olan Babil metodu aşağıdaki gibi ortaya çıkmaktadır. Söz konusu Babillilerin Sayılar Teorisi'ndeki bilinmeyen bu metoduna göre tabletteki dik üçgenlerin doğuranları bunu kesinlikle doğrulamaktadır. Ayrıca,

Konu: Doktora Tezi.

Yazar: ***Manuel Benito Muñoz***.

Başlık: *Birkaç Diofant Problemi (Algunos problemas diofánticos)* (Bkz. "*Algunos problemes diofánticos)*". ***Muñoz***'un tüm makaleleri şuradadır. Bu makaleler Dialnet sayesinde hala aynı yerlerde duruyorlar ve buradaki makaleyi 27.07.2006, 23:23:34'te bilgisayarıma indirmiştim).

Yönetici: Dr. ***Juan Luis Varona Malumbres***.

Üniversite/Bölümü: UNIVERSIDAD DE LA RIOJA, Departamento de Matemáticas y Computación.

Yayınlandığı Yer/Yıl: Logroño, 31 Mayıs 2002.

Sayfa Sayısı: 118.

çalışmasında (a_n, h_n, r_n) dik üçgenleri için $h_n < 15000$'e kadar düzgün sayılarla yapılan bir araştırmada bu gerçek ortaya konmuştur. Ancak ***Manuel Benito Muñoz***'un da bu araştırma sırasında metottaki temel gerçekten uzak olduğu sonucu çıktı. ***Otto Neugebauer*** ise "*Mathematische Keilschrift-texte (Matematiksel Çivi Yazıtları)*" eserinin sonunda zamanla Babillilerde bir çeşit Elemanter Sayılar Teorisi'nin de mevcudiyetinin farkına varılacağının beklenilmesi gerektiğini, bu takdirde eski Matematik tarihçilerinin, ***Pisagor***'a atfettikleri aritmetik bilgilerin daha doğru olarak Babillilere ait olması gerektiğinin teslim edileceğini ifade etmişti. Gerçekten de bu tahmin daha sonraları keşfedilen Plimpton 322 no'lu tablet ile parlak bir şekilde doğrulanmıştır. Plimpton 322 no'lu tabletinin çözümünün Babillilerin Sayılar Teorisi'ndeki şimdiye kadar farkına varılamayan bir metotla ortaya çıkması, bu tableti 1945'de ilk kez okuyan ***Neugebauer*** ve ***Sachs***'ın ortak çalışması sonucunda çıkan tahminin tamamen anlaşılmasına neden olmuştur. Çünkü tabletteki (a_n, h_n, r_n) dik üçgenlerinin doğuranları olan p_n ve q_n sayılarının 60 tabanında sonlu olmaları nedeniyle bu sayıların **"Ters Sayıların Cetvelleri"**nden alınmış olduğu izlenimi verse de, gerçekte onlar bu sayıların hesaplanmış olması gerektiğine işaret etmişlerdi!

4.2.2. Babillilerin Seçme Metodu (*Mathquake*, 06.08.2006 01:00). Eğim açıları $(30°, 45°)$ aralığında olan (a_n, h_n, r_n) dik üçgenlerini doğuran dik üçgenlerin $m_n = \frac{p_n}{q_n}$ eğimleri arasındaki sıralama [84]'teki gibi olup,

$$[114] \quad 1 < q_n < 60$$

düzgün sayılarına göre k_n doğal sayısı için

$$[115] \quad \sqrt{3} = m_{17} < \cdots \underbrace{< m_{15} < m_{14} < \cdots}_{m_n = \frac{p_n}{q_n} = \frac{q_n + k_n}{q_n}} < \underbrace{m_{11}}_{m_{11} = \frac{p_{11}}{q_{11}} = 2} < \underbrace{\ldots < m_2 < m_1}_{m_n = \frac{p_n}{q_n} = \frac{2q_n + k_n}{q_n}} < m_0 = 1 + \sqrt{2}$$

sıralamasında m_{n+1}, m_n'nin **E.B.A.S.**'ıdır (**E.B.A.S. (EBAS): E**n **B**üyük **A**lt **S**ınır. EBAS dizilerdeki "ASEB" gibi de yazılabilir). Fakat burada EBAS'ın kullanımı dizilerdeki gibi değildir, çünkü burada sadece bir sıralama yapılmaktadır!

Not 5. Söz konusu (a_n, h_n, r_n) dik üçgenlerinin p_n ve q_n doğuranları doğrudan $\frac{p_n}{q_n} = m_n < m_{n-1} = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ eşitsizliğine göre de araştırılabilinir. Bu durumda m_{n-1} oranı bilinmek üzere $1 < q_n < 60$ düzgün sayılarıyla gene aynı araştırmanın yapılması gerekir!

I. Bölüm. İlk m_n değerinin bilinmesine ve [114]&[115]'e göre

$$[116] \quad \frac{2q + k}{q} = m \leq \frac{2q_{n+1} + k_{n+1}}{q_{n+1}} = m_{n+1} < m_n = \frac{p_n}{q_n} \Rightarrow \frac{q_n}{p_n - 2q_n} k < q < 60 \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$$

aralığından elde edilen $p = 2q + k$ düzgün sayıları aşağıdaki tabloda siyah renkli sayılarla gösterilmiştir.

q \ k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	27	30	32	36	40	45	48	50	54
1	5	7	9	11	13	17	19	21	25	31	33	37	41	49	51	55	61	65	73	81	91	97	101	109
2	6	8	10	12	14	18	20	22	26	32	34	38	42	50	52	56	62	66	74	82	92	98	102	110
3	7	9	11	13	15	19	21	23	27	33	35	39	43	51	53	57	63	67	75	83	93	99	103	111
4	8	10	12	14	16	20	22	24	28	34	36	40	44	52	54	58	64	68	76	84	94	100	104	112
5	9	11	13	15	17	21	23	25	29	35	37	41	45	53	55	59	65	69	77	85	95	101	105	113
6	10	12	14	16	18	22	24	26	30	36	38	42	46	54	56	60	66	70	78	86	96	102	106	114
7	11	13	15	17	19	23	25	27	31	37	39	43	47	55	57	61	67	71	79	87	97	103	107	115
8	12	14	16	18	20	24	26	28	32	38	40	44	48	56	58	62	68	72	80	88	98	104	108	116
9	13	15	17	19	21	25	27	29	33	39	41	45	49	57	59	63	69	73	81	89	99	105	109	117
10	14	16	18	20	22	26	28	30	34	40	42	46	50	58	60	64	70	74	82	90	100	106	110	118
11	15	17	19	21	23	27	29	31	35	41	43	47	51	59	61	65	71	75	83	91	101	107	111	119
12	16	18	20	22	24	28	30	32	36	42	44	48	52	60	62	66	72	76	84	92	102	108	112	120
13	17	19	21	23	25	29	31	33	37	43	45	49	53	61	63	67	73	77	85	93	103	109	113	121
14	18	20	22	24	26	30	32	34	38	44	46	50	54	62	64	68	74	78	86	94	104	110	114	122
15	19	21	23	25	27	31	33	35	39	45	47	51	55	63	65	69	75	79	87	95	105	111	115	123
16	20	22	24	26	28	32	34	36	40	46	48	52	56	64	66	70	76	80	88	96	106	112	116	124
17	21	23	25	27	29	33	35	37	41	47	49	53	57	65	67	71	77	81	89	97	107	113	117	125
18	22	24	26	28	30	34	36	38	42	48	50	54	58	66	68	72	78	82	90	98	108	114	118	126
19	23	25	27	29	31	35	37	39	43	49	51	55	59	67	69	73	79	83	91	99	109	115	119	127
20	24	26	28	30	32	36	38	40	44	50	52	56	60	68	70	74	80	84	92	100	110	116	120	128

Tablo 15

1. Bu tabloya göre ilkin

$$[117] \quad \frac{2q + k}{q} = m \leq m_1 < \overline{m_0} = 1 + \sqrt{2} < 1 + 1;25 = 2;25 = 2 + \frac{25}{60} = \frac{29}{12} =: m_0 = \frac{p_0}{q_0} \Rightarrow 2;24 = \frac{12}{5} k < q < 60 \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$$

aralığını elde edebilmek için $\sqrt{2}$ için verilmiş $1;25 = 1 + \frac{25}{60} = \frac{17}{12}$ üst sınır değerini aldım (Bkz. "*YBC 7289 No'lu Tablet*", YBC 7243 (Tablo 1.3.2, S. 21), AO 6484 (Tablo 1.4.1, S. 29)). O halde m_0'ın EBAS'ı olan m_1'i bulabilmek için her k pozitif tam sayısı için q'nun bulunduğu aralıktaki ilk (en küçük) p düzgün sayısını almamız yeterli olacaktır. Buna göre biricik p_1 düzgün sayısı için her adımda bulunan ilk p aday düzgün sayıları şu şekilde elde edilmektedirler:

1. $k = 1$ ise: $3 \leq q \leq 54$ aralığında $q_3 = 4$ için $p_3 = 2q_3 + k = 2 \times 4 + 1 = 9$.
2. $k = 2$ ise: $5 \leq q \leq 54$ aralığında $q_4 = 5$ için $p_4 = 2q_4 + k = 2 \times 5 + 2 = 12$.
3. $k = 3$ ise: $8 \leq q \leq 54$ aralığında $q_9 = 12$ için $p_9 = 2q_9 + k = 2 \times 12 + 3 = 27$.
4. $k = 4$ ise: $10 \leq q \leq 54$ aralığında $q_8 = 10$ için $p_8 = 2q_8 + k = 2 \times 10 + 4 = 24$.
5. $k = 5$ ise: $15 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{13} = 20$ için $p_{13} = 2q_{13} + k = 2 \times 20 + 5 = 45$.
6. $k = 6$ ise: $15 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{10} = 15$ için $p_{10} = 2q_{10} + k = 2 \times 15 + 6 = 36$.

7. $k = 7$ ise: $18 \le q \le 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
8. $k = 8$ ise: $20 \le q \le 54$ aralığında $q_{13} = 20$ için $p_{13} = 2q_{13} + k = 2 \times 20 + 8 = 48$.
9. $k = 9$ ise: $24 \le q \le 54$ aralığında $q_{19} = 36$ için $p_{19} = 2q_{19} + k = 2 \times 36 + 9 = 81$.
10. $k = 10$ ise: $25 \le q \le 54$ aralığında $q_{15} = 25$ için $p_{15} = 2q_{15} + k = 2 \times 25 + 10 = 60$.
11. $k = 11$ ise: $27 \le q \le 54$ aralığında $q_{18} = 32$ için $p_{18} = 2q_{18} + k = 2 \times 32 + 11 = 75$.
12. $k = 12$ ise: $30 \le q \le 54$ aralığında $q_{17} = 30$ için $p_{17} = 2q_{17} + k = 2 \times 30 + 12 = 72$.
13. $k = 13$ ise: $32 \le q \le 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
14. $k = 14$ ise: $36 \le q \le 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
15. $k = 15$ ise: $40 \le q \le 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
16. $k = 16$ ise: $40 \le q \le 54$ aralığında $q_{20} = 40$ için $p_{20} = 2q_{20} + k = 2 \times 40 + 16 = 96$.
17. $k = 17$ ise: $45 \le q \le 54$ aralığında $q_{24} = 54$ için $p_{24} = 2q_{24} + k = 2 \times 54 + 17 = 125$.
18. $k = 18$ ise: $45 \le q \le 54$ aralığında $q_{21} = 45$ için $p_{21} = 2q_{21} + k = 2 \times 45 + 18 = 108$.
19. $k = 19$ ise: $48 \le q \le 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
20. $k = 20$ ise: $50 \le q \le 54$ aralığında $q_{23} = 50$ için $p_{23} = 2q_{23} + k = 2 \times 50 + 20 = 120$.
21. $k = 21$ ise: $q = q_{24} = 54$ için $p_{24} = 2q_{24} + k = 2 \times 54 + 21 = 129$ sayısı düzgün değildir.
22. $k = 22$ ise: $q = q_{24} = 54$ için $p_{24} = 2q_{24} + k = 2 \times 54 + 22 = 130$ sayısı düzgün değildir.

Şu hâlde bulunan $m = \frac{p}{q}$ oranları arasındaki

$$[118] \quad \frac{9}{4}\left(=\frac{27}{12}=\frac{45}{20}=\frac{81}{36}\right) < \frac{125}{54} < \frac{75}{32} < m_1 = \frac{12}{5}\left(=\frac{24}{10}=\frac{36}{15}=\frac{48}{20}=\frac{60}{25}=\frac{72}{30}=\frac{96}{40}=\frac{108}{45}=\frac{120}{50}\right)\left[< \overline{m_0} = 1+\sqrt{2} < m_0 = \frac{29}{12}\right]$$

sıralaması göz önüne alınırsa

$$[119] \quad m_1 = \frac{p_1}{q_1} = \frac{12}{5}$$

şeklinde (a_1, h_1, r_1) ilk dik üçgenini doğuran dik üçgenin eğimi elde edilir.

2. İkinci olarak

$$[120] \quad \frac{2q+k}{q} = m \le m_1 = \frac{12}{5} \Rightarrow \frac{5}{2}k < q < 60 \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$$

eşitsizliklerine göre m_1'in EBAS'ı olan m_2'yi bulabilmek için her k pozitif tam sayısı için yine q'nun bulunduğu aralıktaki ilk (en küçük) p düzgün sayısını almamız yeterli olacaktır. Buna göre biricik p_2 düzgün sayısı için her adımda bulunan ilk p aday düzgün sayıları şu şekilde elde edilmektedirler:

1. $k = 1$ ise: $3 \le q \le 54$ aralığında $q_3 = 4$ için $p_3 = 2q_3 + k = 2 \times 4 + 1 = 9$.
2. $k = 2$ ise: $6 \le q \le 54$ aralığında $q_6 = 8$ için $p_6 = 2q_6 + k = 2 \times 8 + 2 = 18$.
3. $k = 3$ ise: $8 \le q \le 54$ aralığında $q_9 = 12$ için $p_9 = 2q_9 + k = 2 \times 12 + 3 = 27$.
4. $k = 4$ ise: $12 \le q \le 54$ aralığında $q_{11} = 16$ için $p_{11} = 2q_{11} + k = 2 \times 16 + 4 = 36$.
5. $k = 5$ ise: $15 \le q \le 54$ aralığında $q_{13} = 20$ için $p_{13} = 2q_{13} + k = 2 \times 20 + 5 = 45$.
6. $k = 6$ ise: $16 \le q \le 54$ aralığında $q_{14} = 24$ için $p_{14} = 2q_{14} + k = 2 \times 24 + 6 = 54$.
7. $k = 7$ ise: $18 \le q \le 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
8. $k = 8$ ise: $24 \le q \le 54$ aralığında $q_{18} = 32$ için $p_{18} = 2q_{18} + k = 2 \times 32 + 8 = 72$.
9. $k = 9$ ise: $24 \le q \le 54$ aralığında $q_{19} = 36$ için $p_{19} = 2q_{19} + k = 2 \times 36 + 9 = 81$.
10. $k = 10$ ise: $27 \le q \le 54$ aralığında $q_{16} = 27$ için $p_{16} = 2q_{16} + k = 2 \times 27 + 10 = 64$.
11. $k = 11$ ise: $30 \le q \le 54$ aralığında $q_{18} = 32$ için $p_{18} = 2q_{18} + k = 2 \times 32 + 11 = 75$.
12. $k = 12$ ise: $32 \le q \le 54$ aralığında $q_{22} = 48$ için $p_{22} = 2q_{22} + k = 2 \times 48 + 12 = 108$.
13. $k = 13$ ise: $36 \le q \le 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
14. $k = 14$ ise: $36 \le q \le 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
15. $k = 15$ ise: $40 \le q \le 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
16. $k = 16$ ise: $45 \le q \le 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
17. $k = 17$ ise: $45 \le q \le 54$ aralığında $q_{24} = 54$ için $p_{24} = 2q_{24} + k = 2 \times 54 + 17 = 125$.
18. $k = 18$ ise: $48 \le q \le 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
19. $k = 19$ ise: $48 \le q \le 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
20. $k = 20$ ise: $q = q_{24} = 54$ için $p_{24} = 2q_{24} + k = 2 \times 54 + 20 = 128$.
21. $k = 21$ ise: $q = q_{24} = 54$ için $p_{24} = 2q_{24} + k = 2 \times 54 + 21 = 129$ sayısı düzgün değildir.

Şu hâlde bulunan $m = \frac{p}{q}$ oranları arasındaki

$$[121] \quad \frac{9}{4}\left(=\frac{18}{8}=\frac{27}{12}=\frac{36}{16}=\frac{45}{20}=\frac{54}{24}=\frac{72}{32}=\frac{81}{36}=\frac{108}{48}\right) < \frac{125}{54} < \frac{75}{32} < m_2 = \frac{64}{27}\left(=\frac{128}{54}\right)\left[< m_1 = \frac{12}{5}\right]$$

sıralaması göz önüne alınırsa

$$[122] \quad m_2 = \frac{p_2}{q_2} = \frac{64}{27}$$

şeklinde (a_2, h_2, r_2) ikinci dik üçgenini doğuran dik üçgenin eğimi elde edilir.

3. Üçüncü olarak da

$$[123] \quad \frac{2q+k}{q} = m \leq m_2 = \frac{64}{27} \Rightarrow \frac{27}{10}k < q < 60 \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$$

eşitsizliklerine göre m_2'nin EBAS'ı olan m_3 için yine q'nun bulunduğu aralıktaki ilk (en küçük) p düzgün sayısını almamız yeterlidir. Buna göre biricik p_3 düzgün sayısı için her adımda bulunan ilk p aday düzgün sayıları şu şekilde elde edilmektedirler:

1. $k = 1$ ise: $3 \leq q \leq 54$ aralığında $q_3 = 4$ için $p_3 = 2q_3 + k = 2 \times 4 + 1 = 9$.
2. $k = 2$ ise: $6 \leq q \leq 54$ aralığında $q_6 = 8$ için $p_6 = 2q_6 + k = 2 \times 8 + 2 = 18$.
3. $k = 3$ ise: $9 \leq q \leq 54$ aralığında $q_9 = 12$ için $p_9 = 2q_9 + k = 2 \times 12 + 3 = 27$.
4. $k = 4$ ise: $12 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{11} = 16$ için $p_{11} = 2q_{11} + k = 2 \times 16 + 4 = 36$.
5. $k = 5$ ise: $15 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{13} = 20$ için $p_{13} = 2q_{13} + k = 2 \times 20 + 5 = 45$.
6. $k = 6$ ise: $18 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{14} = 24$ için $p_{14} = 2q_{14} + k = 2 \times 24 + 6 = 54$.
7. $k = 7$ ise: $20 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
8. $k = 8$ ise: $24 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{18} = 32$ için $p_{18} = 2q_{18} + k = 2 \times 32 + 8 = 72$.
9. $k = 9$ ise: $25 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{19} = 36$ için $p_{19} = 2q_{19} + k = 2 \times 36 + 9 = 81$.
10. $k = 10$ ise: $30 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{20} = 40$ için $p_{20} = 2q_{20} + k = 2 \times 40 + 10 = 90$.
11. $k = 11$ ise: $30 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{18} = 32$ için $p_{18} = 2q_{18} + k = 2 \times 32 + 11 = 75$.
12. $k = 12$ ise: $36 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{22} = 48$ için $p_{22} = 2q_{22} + k = 2 \times 48 + 12 = 108$.
13. $k = 13$ ise: $36 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
14. $k = 14$ ise: $40 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
15. $k = 15$ ise: $45 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
16. $k = 16$ ise: $45 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
17. $k = 17$ ise: $48 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{24} = 54$ için $p_{24} = 2q_{24} + k = 2 \times 54 + 17 = 125$.
18. $k = 18$ ise: $50 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
19. $k = 19$ ise: $q = q_{24} = 54$ için düzgün p sayısı yok.

Şu hâlde bulunan $m = \frac{p}{q}$ oranları arasındaki

$$[124] \quad \frac{9}{4}\left(= \frac{18}{8} = \frac{27}{12} = \frac{36}{16} = \frac{45}{20} = \frac{54}{24} = \frac{72}{32} = \frac{81}{36} = \frac{90}{40} = \frac{108}{48}\right) < \frac{125}{54} < m_3 = \frac{75}{32}\left[< m_2 = \frac{64}{27}\right]$$

sıralaması göz önüne alınırsa

$$[125] \quad m_3 = \frac{p_3}{q_3} = \frac{75}{32}$$

şeklinde (a_3, h_3, r_3) üçüncü dik üçgenini doğuran dik üçgenin eğimi elde edilir.

4. Dördüncü olarak

$$[126] \quad \frac{2q+k}{q} = m \leq m_3 = \frac{75}{32} \Rightarrow \frac{32}{11}k < q < 60 \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$$

eşitsizliklerine göre m_3'ün EBAS'ı olan m_4 için yine q'nun bulunduğu aralıktaki ilk (en küçük) p düzgün sayısını almamız yeterlidir. Buna göre biricik p_4 düzgün sayısı için her adımda bulunan ilk p aday düzgün sayıları şu şekilde elde edilmektedirler:

1. $k = 1$ ise: $3 \leq q \leq 54$ aralığında $q_3 = 4$ için $p_3 = 2q_3 + k = 2 \times 4 + 1 = 9$.
2. $k = 2$ ise: $6 \leq q \leq 54$ aralığında $q_6 = 8$ için $p_6 = 2q_6 + k = 2 \times 8 + 2 = 18$.
3. $k = 3$ ise: $9 \leq q \leq 54$ aralığında $q_9 = 12$ için $p_9 = 2q_9 + k = 2 \times 12 + 3 = 27$.
4. $k = 4$ ise: $12 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{11} = 16$ için $p_{11} = 2q_{11} + k = 2 \times 16 + 4 = 36$.
5. $k = 5$ ise: $15 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{13} = 20$ için $p_{13} = 2q_{13} + k = 2 \times 20 + 5 = 45$.
6. $k = 6$ ise: $18 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{14} = 24$ için $p_{14} = 2q_{14} + k = 2 \times 24 + 6 = 54$.
7. $k = 7$ ise: $24 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
8. $k = 8$ ise: $24 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{18} = 32$ için $p_{18} = 2q_{18} + k = 2 \times 32 + 8 = 72$.
9. $k = 9$ ise: $27 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{19} = 36$ için $p_{19} = 2q_{19} + k = 2 \times 36 + 9 = 81$.
10. $k = 10$ ise: $30 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{20} = 40$ için $p_{20} = 2q_{20} + k = 2 \times 40 + 10 = 90$.
11. $k = 11$ ise: $36 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
12. $k = 12$ ise: $36 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{22} = 48$ için $p_{22} = 2q_{22} + k = 2 \times 48 + 12 = 108$.
13. $k = 13$ ise: $40 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
14. $k = 14$ ise: $45 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
15. $k = 15$ ise: $45 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
16. $k = 16$ ise: $48 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
17. $k = 17$ ise: $50 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{24} = 54$ için $p_{24} = 2q_{24} + k = 2 \times 54 + 17 = 125$.
18. $k = 18$ ise: $q = q_{24} = 54$ için düzgün p sayısı yok.

Şu hâlde bulunan $m = \frac{p}{q}$ oranları arasındaki

$$[127] \quad \frac{9}{4}\left(=\frac{18}{8}=\frac{27}{12}=\frac{36}{16}=\frac{45}{20}=\frac{54}{24}=\frac{72}{32}=\frac{81}{36}=\frac{90}{40}=\frac{108}{48}\right) < m_4 = \frac{125}{54}\left[< m_3 = \frac{75}{32}\right]$$

sıralaması göz önüne alınırsa (a_4, h_4, r_4) dik üçgenini doğuran dik üçgenin eğimi şu şekilde ortaya çıkar:

$$[128] \quad m_4 = \frac{p_4}{q_4} = \frac{125}{54}.$$

5. Beşinci olarak

$$[129] \quad \frac{2q+k}{q} = m \leq m_4 = \frac{125}{54} \Rightarrow \frac{54}{17}k < q < 60 \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$$

eşitsizliklerine göre m_4'ün EBAS'ı olan m_5 için yine q'nun bulunduğu aralıktaki ilk (en küçük) p düzgün sayısını almamız yeterlidir. Buna göre biricik p_5 düzgün sayısı için her adımda bulunan ilk p aday düzgün sayıları şu şekilde elde edilmektedirler:

1. $k = 1$ ise: $4 \leq q \leq 54$ aralığında $q_3 = 4$ için $p_3 = 2q_3 + k = 2 \times 4 + 1 = 9$.
2. $k = 2$ ise: $8 \leq q \leq 54$ aralığında $q_6 = 8$ için $p_6 = 2q_6 + k = 2 \times 8 + 2 = 18$.
3. $k = 3$ ise: $10 \leq q \leq 54$ aralığında $q_9 = 12$ için $p_9 = 2q_9 + k = 2 \times 12 + 3 = 27$.
4. $k = 4$ ise: $15 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{11} = 16$ için $p_{11} = 2q_{11} + k = 2 \times 16 + 4 = 36$.
5. $k = 5$ ise: $16 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{13} = 20$ için $p_{13} = 2q_{13} + k = 2 \times 20 + 5 = 45$.
6. $k = 6$ ise: $20 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{14} = 24$ için $p_{14} = 2q_{14} + k = 2 \times 24 + 6 = 54$.
7. $k = 7$ ise: $24 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
8. $k = 8$ ise: $27 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{18} = 32$ için $p_{18} = 2q_{18} + k = 2 \times 32 + 8 = 72$.
9. $k = 9$ ise: $30 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{19} = 36$ için $p_{19} = 2q_{19} + k = 2 \times 36 + 9 = 81$.
10. $k = 10$ ise: $32 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{20} = 40$ için $p_{20} = 2q_{20} + k = 2 \times 40 + 10 = 90$.
11. $k = 11$ ise: $36 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
12. $k = 12$ ise: $40 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{22} = 48$ için $p_{22} = 2q_{22} + k = 2 \times 48 + 12 = 108$.
13. $k = 13$ ise: $45 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
14. $k = 14$ ise: $45 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
15. $k = 15$ ise: $48 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
16. $k = 16$ ise: $q = q_{24} = 54$ için düzgün p sayısı yok.

Şu hâlde bulunan $m = \frac{p}{q}$ oranları arasındaki

$$[130] \quad m_5 = \frac{9}{4}\left(=\frac{18}{8}=\frac{27}{12}=\frac{36}{16}=\frac{45}{20}=\frac{54}{24}=\frac{72}{32}=\frac{81}{36}=\frac{90}{40}=\frac{108}{48}\right)\left[< m_4 = \frac{125}{54}\right]$$

sıralaması göz önüne alınırsa (a_5, h_5, r_5) dik üçgenini doğuran dik üçgenin eğimi şöyle edilmiş olur:

$$[131] \quad m_5 = \frac{p_5}{q_5} = \frac{9}{4}.$$

6. Altıncı olarak

$$[132] \quad \frac{2q+k}{q} = m \leq m_5 = \frac{9}{4} \Rightarrow 4k < q < 60 \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$$

eşitsizliklerine göre m_5'in EBAS'ı olan m_6 için yine q'nun bulunduğu aralıktaki ilk (en küçük) p düzgün sayısını almamız yeterlidir. Buna göre biricik p_6 düzgün sayısı için her adımda bulunan ilk p aday düzgün sayıları şu şekilde elde edilmektedirler:

1. $k = 1$ ise: $5 \leq q \leq 54$ aralığında $q_9 = 12$ için $p_9 = 2q_9 + k = 2 \times 12 + 1 = 25$.
2. $k = 2$ ise: $9 \leq q \leq 54$ aralığında $q_7 = 9$ için $p_7 = 2q_7 + k = 2 \times 9 + 2 = 20$.
3. $k = 3$ ise: $15 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{19} = 36$ için $p_{19} = 2q_{19} + k = 2 \times 36 + 3 = 75$.
4. $k = 4$ ise: $18 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{12} = 18$ için $p_{12} = 2q_{12} + k = 2 \times 18 + 4 = 40$.
5. $k = 5$ ise: $24 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
6. $k = 6$ ise: $25 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{16} = 27$ için $p_{16} = 2q_{16} + k = 2 \times 27 + 6 = 60$.
7. $k = 7$ ise: $30 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
8. $k = 8$ ise: $36 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{19} = 36$ için $p_{19} = 2q_{19} + k = 2 \times 36 + 8 = 80$.
9. $k = 9$ ise: $40 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
10. $k = 10$ ise: $45 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{21} = 45$ için $p_{21} = 2q_{21} + k = 2 \times 45 + 10 = 100$.
11. $k = 11$ ise: $45 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
12. $k = 12$ ise: $50 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{24} = 54$ için $p_{24} = 2q_{24} + k = 2 \times 54 + 12 = 120$.
13. $k = 13$ ise: $q = q_{24} = 54$ için düzgün p sayısı yok.

Şu hâlde bulunan $m = \frac{p}{q}$ oranları arasındaki

$$[133]\quad \frac{25}{12}\left(=\frac{75}{36}\right) < m_6 = \frac{20}{9}\left(=\frac{40}{18}=\frac{60}{27}=\frac{80}{36}=\frac{100}{45}=\frac{120}{54}\right)\left[< m_5 = \frac{9}{4}\right]$$

sıralaması göz önüne alınırsa (a_6, h_6, r_6) dik üçgenini doğuran dik üçgenin eğimi şu olur:

$$[134]\quad m_6 = \frac{p_6}{q_6} = \frac{20}{9}.$$

7. Yedinci olarak

$$[135]\quad \frac{2q+k}{q} = m \leq m_6 = \frac{20}{9} \Rightarrow \frac{9}{2}k < q < 60 \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$$

eşitsizliklerine göre m_6'nın EBAS'ı olan m_7 için yine q'nun bulunduğu aralıktaki ilk (en küçük) p düzgün sayısını almamız yeterlidir. Buna göre biricik p_7 düzgün sayısı için her adımda bulunan ilk p aday düzgün sayıları şu şekilde elde edilmektedirler:

1. $k = 1$ ise: $5 \leq q \leq 54$ aralığında $q_9 = 12$ için $p_9 = 2q_9 + k = 2 \times 12 + 1 = 25$.
2. $k = 2$ ise: $10 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{10} = 15$ için $p_{10} = 2q_{10} + k = 2 \times 15 + 2 = 32$.
3. $k = 3$ ise: $15 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{19} = 36$ için $p_{19} = 2q_{19} + k = 2 \times 36 + 3 = 75$.
4. $k = 4$ ise: $20 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{15} = 25$ için $p_{15} = 2q_{15} + k = 2 \times 25 + 4 = 54$.
5. $k = 5$ ise: $24 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
6. $k = 6$ ise: $30 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{21} = 45$ için $p_{21} = 2q_{21} + k = 2 \times 45 + 6 = 96$.
7. $k = 7$ ise: $32 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
8. $k = 8$ ise: $40 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{23} = 50$ için $p_{23} = 2q_{23} + k = 2 \times 50 + 8 = 108$.
9. $k = 9$ ise: $45 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
10. $k = 10$ ise: $48 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
11. $k = 11$ ise: $50 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.

Şu hâlde bulunan $m = \frac{p}{q}$ oranları arasındaki

$$[136]\quad \frac{25}{12}\left(=\frac{75}{36}\right) < \frac{32}{15}\left(=\frac{96}{45}\right) < m_7 = \frac{54}{25}\left(=\frac{108}{50}\right)\left[< m_6 = \frac{20}{9}\right]$$

sıralaması göz önüne alınırsa (a_7, h_7, r_7) dik üçgenini doğuran dik üçgenin eğimi şöyle olur:

$$[137]\quad m_7 = \frac{p_7}{q_7} = \frac{54}{25}.$$

8. Sekizinci olarak

$$[138]\quad \frac{2q+k}{q} = m \leq m_7 = \frac{54}{25} \Rightarrow \frac{25}{4}k < q < 60 \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$$

eşitsizliklerine göre m_7'nin EBAS'ı olan m_8 için yine q'nun bulunduğu aralıktaki ilk (en küçük) p düzgün sayısını almamız yeterlidir. Buna göre biricik p_8 düzgün sayısı için her adımda bulunan ilk p aday düzgün sayıları şu şekilde elde edilmektedirler:

1. $k = 1$ ise: $8 \leq q \leq 54$ aralığında $q_9 = 12$ için $p_9 = 2q_9 + k = 2 \times 12 + 1 = 25$.
2. $k = 2$ ise: $15 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{10} = 15$ için $p_{10} = 2q_{10} + k = 2 \times 15 + 2 = 32$.
3. $k = 3$ ise: $20 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{19} = 36$ için $p_{19} = 2q_{19} + k = 2 \times 36 + 3 = 75$.
4. $k = 4$ ise: $27 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{17} = 30$ için $p_{17} = 2q_{17} + k = 2 \times 30 + 4 = 64$.
5. $k = 5$ ise: $32 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
6. $k = 6$ ise: $40 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{21} = 45$ için $p_{21} = 2q_{21} + k = 2 \times 45 + 6 = 96$.
7. $k = 7$ ise: $45 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
8. $k = 8$ ise: $q = q_{24} = 54$ için düzgün p sayısı yok.

Şu hâlde bulunan $m = \frac{p}{q}$ oranları arasındaki

$$[139]\quad \frac{25}{12}\left(=\frac{75}{36}\right) < m_8 = \frac{32}{15}\left(=\frac{64}{30}=\frac{96}{45}\right)\left[< m_7 = \frac{54}{25}\right]$$

sıralaması göz önüne alınırsa (a_8, h_8, r_8) dik üçgenini doğuran dik üçgenin eğimi şöyle elde edilir:

$$[140]\quad m_8 = \frac{p_8}{q_8} = \frac{32}{15}.$$

9. Dokuzuncu olarak

$$[141]\quad \frac{2q+k}{q} = m \leq m_8 = \frac{32}{15} \Rightarrow \frac{15}{2}k < q < 60 \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$$

eşitsizliklerine göre m_8'in EBAS'ı olan m_9 için yine q'nun bulunduğu aralıktaki ilk (en küçük) p düzgün sayısını almamız yeterlidir. Buna göre biricik p_9 düzgün sayısı için her adımda bulunan ilk p aday düzgün sayıları şu şekilde elde edilmektedirler:

1. $k = 1$ ise: $8 \leq q \leq 54$ aralığında $q_9 = 12$ için $p_9 = 2q_9 + k = 2 \times 12 + 1 = 25$.
2. $k = 2$ ise: $16 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{14} = 24$ için $p_{14} = 2q_{14} + k = 2 \times 24 + 2 = 50$.
3. $k = 3$ ise: $24 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{19} = 36$ için $p_{19} = 2q_{19} + k = 2 \times 36 + 3 = 75$.
4. $k = 4$ ise: $32 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{22} = 48$ için $p_{22} = 2q_{22} + k = 2 \times 48 + 4 = 100$.
5. $k = 5$ ise: $40 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
6. $k = 6$ ise: $48 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
7. $k = 7$ ise: $q = q_{24} = 54$ için düzgün p sayısı yok.

Şu hâlde bulunan $m = \frac{p}{q}$ oranları arasındaki

$$[142] \quad m_9 = \frac{25}{12}\left(= \frac{50}{24} = \frac{75}{36} = \frac{100}{48}\right)\left[< m_8 = \frac{32}{15}\right]$$

sıralaması göz önüne alınırsa (a_9, h_9, r_9) dik üçgenini doğuran dik üçgenin eğimi şu şekilde ortaya çıkar:

$$[143] \quad m_9 = \frac{p_9}{q_9} = \frac{25}{12}.$$

10. Onuncu olarak

$$[144] \quad \frac{2q + k}{q} = m \leq m_9 = \frac{25}{12} \Rightarrow 12k < q < 60 \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$$

eşitsizliklerine göre m_9'un EBAS'ı olan m_{10} için yine q'nun bulunduğu aralıktaki ilk (en küçük) p düzgün sayısını almamız yeterlidir. Buna göre biricik p_{10} düzgün sayısı için her adımda bulunan ilk p aday düzgün sayıları şu şekilde elde edilmektedirler:

1. $k = 1$ ise: $15 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{20} = 40$ için $p_{20} = 2q_{20} + k = 2 \times 40 + 1 = 81$.
2. $k = 2$ ise: $25 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
3. $k = 3$ ise: $40 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
4. $k = 4$ ise: $50 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.

Şu hâlde bulunan $m = \frac{p}{q}$ oranları arasındaki

$$[145] \quad m_{10} = \frac{81}{40}\left[< m_9 = \frac{25}{12}\right]$$

sıralaması göz önüne alınırsa (a_{10}, h_{10}, r_{10}) dik üçgenini doğuran dik üçgenin eğimi şu olur:

$$[146] \quad m_{10} = \frac{p_{10}}{q_{10}} = \frac{81}{40}.$$

11. Onbirinci olarak

$$[147] \quad \frac{2q + k}{q} = m \leq m_{10} = \frac{81}{40} \Rightarrow 40k < q < 60 \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$$

eşitsizliklerine göre m_{10}'un EBAS'ı olan m_{11} için yine q'nun bulunduğu aralıktaki ilk (en küçük) p düzgün sayısını almamız yeterlidir. Buna göre biricik p_{11} düzgün sayısı için her adımda bulunan ilk p aday düzgün sayıları şu şekilde elde edilmektedirler:

1. $k = 1$ ise: $45 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok!

Şu hâlde zorunlu olarak

$$[148] \quad m_{11} = 2 < m_{10} = \frac{81}{40}$$

sıralaması göz önüne alınırsa (a_{11}, h_{11}, r_{11}) dik üçgenini doğuran dik üçgenin eğimi şu şekilde olur:

$$[149] \quad m_{11} = \frac{p_{11}}{q_{11}} = 2.$$

II. Bölüm. Yine ilk m_n değerinin bilinmesine ve [114]&[115]'e göre

$$[150] \quad \begin{aligned} & m_{40} = 1 < m_{17} = \sqrt{3} < \frac{p}{q} = m < m_{11} = 2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{p}{q} < 2 \Rightarrow p < 2q \Rightarrow p = 2q - k & (k \in \mathbb{Z}^+) \\ 1 < \frac{p}{q} \Rightarrow q < p \Rightarrow p = q + k & (k \in \mathbb{Z}^+) \end{cases} \\ & \Rightarrow \frac{q + k}{q} = m \leq \frac{2q_{n+1} + k_{n+1}}{q_{n+1}} = m_{n+1} < m_n = \frac{p_n}{q_n} \Rightarrow \frac{q_n}{p_n - q_n} k < q < 60 \quad (k \in \mathbb{Z}^+) \end{aligned}$$

aralığından elde edilen $p = q + k$ düzgün sayıları aşağıdaki tabloda siyah renkli sayılarla gösterilmiştir.

q \ k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	27	30	32	36	40	45	48	50	54
1	3	4	5	6	7	9	10	11	13	16	17	19	21	25	26	28	31	33	37	41	46	49	51	55
2	4	5	6	7	8	10	11	12	14	17	18	20	22	26	27	29	32	34	38	42	47	50	52	56
3	5	6	7	8	9	11	12	13	15	18	19	21	23	27	28	30	33	35	39	43	48	51	53	57
4	6	7	8	9	10	12	13	14	16	19	20	22	24	28	29	31	34	36	40	44	49	52	54	58
5	7	8	9	10	11	13	14	15	17	20	21	23	25	29	30	32	35	37	41	45	50	53	55	59
6	8	9	10	11	12	14	15	16	18	21	22	24	26	30	31	33	36	38	42	46	51	54	56	60
7	9	10	11	12	13	15	16	17	19	22	23	25	27	31	32	34	37	39	43	47	52	55	57	61
8	10	11	12	13	14	16	17	18	20	23	24	26	28	32	33	35	38	40	44	48	53	56	58	62
9	11	12	13	14	15	17	18	19	21	24	25	27	29	33	34	36	39	41	45	49	54	57	59	63
10	12	13	14	15	16	18	19	20	22	25	26	28	30	34	35	37	40	42	46	50	55	58	60	64
11	13	14	15	16	17	19	20	21	23	26	27	29	31	35	36	38	41	43	47	51	56	59	61	65
12	14	15	16	17	18	20	21	22	24	27	28	30	32	36	37	39	42	44	48	52	57	60	62	66
13	15	16	17	18	19	21	22	23	25	28	29	31	33	37	38	40	43	45	49	53	58	61	63	67
14	16	17	18	19	20	22	23	24	26	29	30	32	34	38	39	41	44	46	50	54	59	62	64	68
15	17	18	19	20	21	23	24	25	27	30	31	33	35	39	40	42	45	47	51	55	60	63	65	69
16	18	19	20	21	22	24	25	26	28	31	32	34	36	40	41	43	46	48	52	56	61	64	66	70
17	19	20	21	22	23	25	26	27	29	32	33	35	37	41	42	44	47	49	53	57	62	65	67	71
18	20	21	22	23	24	26	27	28	30	33	34	36	38	42	43	45	48	50	54	58	63	66	68	72
19	21	22	23	24	25	27	28	29	31	34	35	37	39	43	44	46	49	51	55	59	64	67	69	73
20	22	23	24	25	26	28	29	30	32	35	36	38	40	44	45	47	50	52	56	60	65	68	70	74
21	23	24	25	26	27	29	30	31	33	36	37	39	41	45	46	48	51	53	57	61	66	69	71	75
22	24	25	26	27	28	30	31	32	34	37	38	40	42	46	47	49	52	54	58	62	67	70	72	76
23	25	26	27	28	29	31	32	33	35	38	39	41	43	47	48	50	53	55	59	63	68	71	73	77
24	26	27	28	29	30	32	33	34	36	39	40	42	44	48	49	51	54	56	60	64	69	72	74	78
25	27	28	29	30	31	33	34	35	37	40	41	43	45	49	50	52	55	57	61	65	70	73	75	79
26	28	29	30	31	32	34	35	36	38	41	42	44	46	50	51	53	56	58	62	66	71	74	76	80
27	29	30	31	32	33	35	36	37	39	42	43	45	47	51	52	54	57	59	63	67	72	75	77	81
28	30	31	32	33	34	36	37	38	40	43	44	46	48	52	53	55	58	60	64	68	73	76	78	82
29	31	32	33	34	35	37	38	39	41	44	45	47	49	53	54	56	59	61	65	69	74	77	79	83
30	32	33	34	35	36	38	39	40	42	45	46	48	50	54	55	57	60	62	66	70	75	78	80	84
31	33	34	35	36	37	39	40	41	43	46	47	49	51	55	56	58	61	63	67	71	76	79	81	85
32	34	35	36	37	38	40	41	42	44	47	48	50	52	56	57	59	62	64	68	72	77	80	82	86
33	35	36	37	38	39	41	42	43	45	48	49	51	53	57	58	60	63	65	69	73	78	81	83	87
34	36	37	38	39	40	42	43	44	46	49	50	52	54	58	59	61	64	66	70	74	79	82	84	88
35	37	38	39	40	41	43	44	45	47	50	51	53	55	59	60	62	65	67	71	75	80	83	85	89
36	38	39	40	41	42	44	45	46	48	51	52	54	56	60	61	63	66	68	72	76	81	84	86	90
37	39	40	41	42	43	45	46	47	49	52	53	55	57	61	62	64	67	69	73	77	82	85	87	91
38	40	41	42	43	44	46	47	48	50	53	54	56	58	62	63	65	68	70	74	78	83	86	88	92
39	41	42	43	44	45	47	48	49	51	54	55	57	59	63	64	66	69	71	75	79	84	87	89	93
40	42	43	44	45	46	48	49	50	52	55	56	58	60	64	65	67	70	72	76	80	85	88	90	94
41	43	44	45	46	47	49	50	51	53	56	57	59	61	65	66	68	71	73	77	81	86	89	91	95
42	44	45	46	47	48	50	51	52	54	57	58	60	62	66	67	69	72	74	78	82	87	90	92	96
43	45	46	47	48	49	51	52	53	55	58	59	61	63	67	68	70	73	75	79	83	88	91	93	97
44	46	47	48	49	50	52	53	54	56	59	60	62	64	68	69	71	74	76	80	84	89	92	94	98
45	47	48	49	50	51	53	54	55	57	60	61	63	65	69	70	72	75	77	81	85	90	93	95	99
46	48	49	50	51	52	54	55	56	58	61	62	64	66	70	71	73	76	78	82	86	91	94	96	100
47	49	50	51	52	53	55	56	57	59	62	63	65	67	71	72	74	77	79	83	87	92	95	97	101
48	50	51	52	53	54	56	57	58	60	63	64	66	68	72	73	75	78	80	84	88	93	96	98	102
49	51	52	53	54	55	57	58	59	61	64	65	67	69	73	74	76	79	81	85	89	94	97	99	103
50	52	53	54	55	56	58	59	60	62	65	66	68	70	74	75	77	80	82	86	90	95	98	100	104
51	53	54	55	56	57	59	60	61	63	66	67	69	71	75	76	78	81	83	87	91	96	99	101	105

Tablo 16

12. Bu sefer

$$[151] \quad \frac{q+k}{q} = m \leq m_{12} < m_{11} = 2 \Rightarrow k < q < 60 \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$$

eşitsizliklerine göre m_{11}'in EBAS'ı olan m_{12} için yine q'nun bulunduğu aralıktaki ilk (en küçük) p düzgün sayısını alırsak biricik p_{12} düzgün sayısı için her adımda bulunan ilk p aday düzgün sayıları şu şekilde elde edilmektedirler:

1. $k = 1$ ise: $2 \leq q \leq 54$ aralığında $q_1 = 2$ için $p_1 = q_1 + k = 2 + 1 = 3$.
2. $k = 2$ ise: $3 \leq q \leq 54$ aralığında $q_2 = 3$ için $p_2 = q_2 + k = 3 + 2 = 5$.
3. $k = 3$ ise: $4 \leq q \leq 54$ aralığında $q_4 = 5$ için $p_4 = q_4 + k = 5 + 3 = 8$.
4. $k = 4$ ise: $5 \leq q \leq 54$ aralığında $q_4 = 5$ için $p_4 = q_4 + k = 5 + 4 = 9$.
5. $k = 5$ ise: $6 \leq q \leq 54$ aralığında $q_8 = 10$ için $p_8 = q_8 + k = 10 + 5 = 15$.
6. $k = 6$ ise: $8 \leq q \leq 54$ aralığında $q_7 = 9$ için $p_7 = q_7 + k = 9 + 6 = 15$.
7. $k = 7$ ise: $8 \leq q \leq 54$ aralığında $q_6 = 8$ için $p_6 = q_6 + k = 8 + 7 = 15$.
8. $k = 8$ ise: $9 \leq q \leq 54$ aralığında $q_8 = 10$ için $p_8 = q_8 + k = 10 + 8 = 18$.
9. $k = 9$ ise: $10 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{10} = 15$ için $p_{10} = q_{10} + k = 15 + 9 = 24$.
10. $k = 10$ ise: $12 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{10} = 15$ için $p_{10} = q_{10} + k = 15 + 10 = 25$.
11. $k = 11$ ise: $12 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{11} = 16$ için $p_{11} = q_{11} + k = 16 + 11 = 27$.
12. $k = 12$ ise: $15 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{10} = 15$ için $p_{10} = q_{10} + k = 15 + 12 = 27$.
13. $k = 13$ ise: $15 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{16} = 27$ için $p_{16} = q_{16} + k = 27 + 13 = 40$.
14. $k = 14$ ise: $15 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{11} = 16$ için $p_{11} = q_{11} + k = 16 + 14 = 30$.
15. $k = 15$ ise: $16 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{15} = 25$ için $p_{15} = q_{15} + k = 25 + 15 = 40$.
16. $k = 16$ ise: $18 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{13} = 20$ için $p_{13} = q_{13} + k = 20 + 16 = 36$.
17. $k = 17$ ise: $18 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
18. $k = 18$ ise: $20 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{16} = 27$ için $p_{16} = q_{16} + k = 27 + 18 = 45$.
19. $k = 19$ ise: $20 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{21} = 45$ için $p_{21} = q_{21} + k = 45 + 19 = 64$.
20. $k = 20$ ise: $24 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{15} = 25$ için $p_{15} = q_{15} + k = 25 + 20 = 45$.
21. $k = 21$ ise: $24 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{14} = 24$ için $p_{14} = q_{14} + k = 24 + 21 = 45$.
22. $k = 22$ ise: $24 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{18} = 32$ için $p_{18} = q_{18} + k = 32 + 22 = 54$.
23. $k = 23$ ise: $24 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{15} = 25$ için $p_{15} = q_{15} + k = 25 + 23 = 48$.
24. $k = 24$ ise: $25 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{17} = 30$ için $p_{17} = q_{17} + k = 30 + 24 = 54$.
25. $k = 25$ ise: $27 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{23} = 50$ için $p_{23} = q_{23} + k = 50 + 25 = 75$.
26. $k = 26$ ise: $27 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{24} = 54$ için $p_{24} = q_{24} + k = 54 + 26 = 80$.
27. $k = 27$ ise: $30 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{21} = 45$ için $p_{21} = q_{21} + k = 45 + 27 = 72$.
28. $k = 28$ ise: $30 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{18} = 32$ için $p_{18} = q_{18} + k = 32 + 28 = 60$.
29. $k = 29$ ise: $30 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
30. $k = 30$ ise: $32 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{21} = 45$ için $p_{21} = q_{21} + k = 45 + 30 = 75$.
31. $k = 31$ ise: $32 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{23} = 50$ için $p_{23} = q_{23} + k = 50 + 31 = 81$.
32. $k = 32$ ise: $36 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{20} = 40$ için $p_{20} = q_{20} + k = 40 + 32 = 72$.
33. $k = 33$ ise: $36 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{22} = 48$ için $p_{22} = q_{22} + k = 48 + 33 = 81$.
34. $k = 34$ ise: $36 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
35. $k = 35$ ise: $36 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{20} = 40$ için $p_{20} = q_{20} + k = 40 + 35 = 75$.
36. $k = 36$ ise: $40 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{21} = 45$ için $p_{21} = q_{21} + k = 45 + 36 = 81$.
37. $k = 37$ ise: $40 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
38. $k = 38$ ise: $40 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
39. $k = 39$ ise: $40 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
40. $k = 40$ ise: $45 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{23} = 50$ için $p_{23} = q_{23} + k = 50 + 40 = 90$.
41. $k = 41$ ise: $45 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
42. $k = 42$ ise: $45 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{22} = 48$ için $p_{22} = q_{22} + k = 48 + 42 = 90$.
43. $k = 43$ ise: $45 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
44. $k = 44$ ise: $45 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
45. $k = 45$ ise: $48 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
46. $k = 46$ ise: $48 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{23} = 50$ için $p_{23} = q_{23} + k = 50 + 46 = 96$.
47. $k = 47$ ise: $48 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
48. $k = 48$ ise: $50 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
49. $k = 49$ ise: $50 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
50. $k = 50$ ise: $q = q_{24} = 54$ için düzgün p sayısı yok.
51. $k = 51$ ise: $q = q_{24} = 54$ için $p_{24} = q_{24} + k = 54 + 51 = 105$ sayısı düzgün değildir.
52. $k = 52$ ise: $q = q_{24} = 54$ için $p_{24} = q_{24} + k = 54 + 52 = 106$ sayısı düzgün değildir.
53. $k = 53$ ise: $q = q_{24} = 54$ için $p_{24} = q_{24} + k = 54 + 53 = 107$ sayısı düzgün değildir.

Şu hâlde bulunan $m = \frac{p}{q}$ oranları arasındaki

$$[152] \quad \begin{aligned} &\frac{64}{45} < \frac{40}{27}\left(=\frac{80}{54}\right) < \frac{3}{2}\left(=\frac{15}{10}=\frac{75}{50}\right) < \frac{8}{5}\left(=\frac{24}{15}=\frac{40}{25}=\frac{72}{45}\right) < \frac{81}{50} < \frac{5}{3}\left(=\frac{15}{9}=\frac{25}{15}=\frac{45}{27}=\frac{75}{45}\right) < \frac{27}{16}\left(=\frac{54}{32}=\frac{81}{48}\right) \\ &< \frac{9}{5}\left(=\frac{18}{10}=\frac{27}{15}=\frac{36}{20}=\frac{45}{25}=\frac{54}{30}=\frac{72}{40}=\frac{81}{45}=\frac{90}{50}\right) < \frac{15}{8}\left(=\frac{30}{16}=\frac{45}{24}=\frac{60}{32}=\frac{75}{40}=\frac{90}{48}\right) < m_{12} = \frac{48}{25}\left(=\frac{96}{50}\right) [< m_{11} = 2] \end{aligned}$$

sıralaması göz önüne alınırsa (a_{12}, h_{12}, r_{12}) dik üçgenini doğuran dik üçgenin eğimi şöyle bulunur:

$$[153] \quad m_{12} = \frac{p_{12}}{q_{12}} = \frac{48}{25}.$$

13. Eğer

$$[154] \quad \frac{q+k}{q} = m < m_{12} = \frac{48}{25} \Rightarrow \frac{25}{23}k < q < 60 \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$$

eşitsizliklerine göre m_{12}'nin EBAS'ı olan m_{13} için yine q'nun bulunduğu aralıktaki ilk (en küçük) p düzgün sayısını alırsak biricik p_{13} düzgün sayısı için her adımda bulunan ilk p aday düzgün sayıları şu şekilde elde edilirler:

1. $k = 1$ ise: $2 \leq q \leq 54$ aralığında $q_1 = 2$ için $p_1 = q_1 + k = 2 + 1 = 3$.
2. $k = 2$ ise: $3 \leq q \leq 54$ aralığında $q_2 = 3$ için $p_2 = q_2 + k = 3 + 2 = 5$.
3. $k = 3$ ise: $4 \leq q \leq 54$ aralığında $q_4 = 5$ için $p_4 = q_4 + k = 5 + 3 = 8$.
4. $k = 4$ ise: $5 \leq q \leq 54$ aralığında $q_4 = 5$ için $p_4 = q_4 + k = 5 + 4 = 9$.
5. $k = 5$ ise: $6 \leq q \leq 54$ aralığında $q_8 = 10$ için $p_8 = q_8 + k = 10 + 5 = 15$.
6. $k = 6$ ise: $8 \leq q \leq 54$ aralığında $q_7 = 9$ için $p_7 = q_7 + k = 9 + 6 = 15$.
7. $k = 7$ ise: $8 \leq q \leq 54$ aralığında $q_6 = 8$ için $p_6 = q_6 + k = 8 + 7 = 15$.
8. $k = 8$ ise: $9 \leq q \leq 54$ aralığında $q_8 = 10$ için $p_8 = q_8 + k = 10 + 8 = 18$.
9. $k = 9$ ise: $10 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{10} = 15$ için $p_{10} = q_{10} + k = 15 + 9 = 24$.
10. $k = 10$ ise: $12 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{10} = 15$ için $p_{10} = q_{10} + k = 15 + 10 = 25$.
11. $k = 11$ ise: $12 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{11} = 16$ için $p_{11} = q_{11} + k = 16 + 11 = 27$.
12. $k = 12$ ise: $15 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{10} = 15$ için $p_{10} = q_{10} + k = 15 + 12 = 27$.
13. $k = 13$ ise: $15 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{16} = 27$ için $p_{16} = q_{16} + k = 27 + 13 = 40$.
14. $k = 14$ ise: $16 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{11} = 16$ için $p_{11} = q_{11} + k = 16 + 14 = 30$.
15. $k = 15$ ise: $18 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{15} = 25$ için $p_{15} = q_{15} + k = 25 + 15 = 40$.
16. $k = 16$ ise: $18 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{13} = 20$ için $p_{13} = q_{13} + k = 20 + 16 = 36$.
17. $k = 17$ ise: $20 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
18. $k = 18$ ise: $20 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{16} = 27$ için $p_{16} = q_{16} + k = 27 + 18 = 45$.
19. $k = 19$ ise: $24 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{21} = 45$ için $p_{21} = q_{21} + k = 45 + 19 = 64$.
20. $k = 20$ ise: $24 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{15} = 25$ için $p_{15} = q_{15} + k = 25 + 20 = 45$.
21. $k = 21$ ise: $24 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{14} = 24$ için $p_{14} = q_{14} + k = 24 + 21 = 45$.
22. $k = 22$ ise: $24 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{18} = 32$ için $p_{18} = q_{18} + k = 32 + 22 = 54$.
23. $k = 23$ ise: $27 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{16} = 27$ için $p_{16} = q_{16} + k = 27 + 23 = 50$.
24. $k = 24$ ise: $27 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{17} = 30$ için $p_{17} = q_{17} + k = 30 + 24 = 54$.
25. $k = 25$ ise: $30 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{23} = 50$ için $p_{23} = q_{23} + k = 50 + 25 = 75$.
26. $k = 26$ ise: $30 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{24} = 54$ için $p_{24} = q_{24} + k = 54 + 26 = 80$.
27. $k = 27$ ise: $30 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{21} = 45$ için $p_{21} = q_{21} + k = 45 + 27 = 72$.
28. $k = 28$ ise: $32 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{18} = 32$ için $p_{18} = q_{18} + k = 32 + 28 = 60$.
29. $k = 29$ ise: $32 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
30. $k = 30$ ise: $36 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{21} = 45$ için $p_{21} = q_{21} + k = 45 + 30 = 75$.
31. $k = 31$ ise: $36 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{23} = 50$ için $p_{23} = q_{23} + k = 50 + 31 = 81$.
32. $k = 32$ ise: $36 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{20} = 40$ için $p_{20} = q_{20} + k = 40 + 32 = 72$.
33. $k = 33$ ise: $36 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{22} = 48$ için $p_{22} = q_{22} + k = 48 + 33 = 81$.
34. $k = 34$ ise: $40 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
35. $k = 35$ ise: $40 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{20} = 40$ için $p_{20} = q_{20} + k = 40 + 35 = 75$.
36. $k = 36$ ise: $40 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{21} = 45$ için $p_{21} = q_{21} + k = 45 + 36 = 81$.
37. $k = 37$ ise: $45 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
38. $k = 38$ ise: $45 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
39. $k = 39$ ise: $45 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
40. $k = 40$ ise: $45 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{23} = 50$ için $p_{23} = q_{23} + k = 50 + 40 = 90$.
41. $k = 41$ ise: $45 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
42. $k = 42$ ise: $48 \leq q \leq 54$ aralığında $q_{22} = 48$ için $p_{22} = q_{22} + k = 48 + 42 = 90$.
43. $k = 43$ ise: $48 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
44. $k = 44$ ise: $48 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
45. $k = 45$ ise: $50 \leq q \leq 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
46. $k = 46$ ise: $q = q_{24} = 54$ için $p_{24} = q_{24} + k = 54 + 46 = 100$.
47. $k = 47$ ise: $q = q_{24} = 54$ için düzgün p sayısı yok.
48. $k = 48$ ise: $q = q_{24} = 54$ için düzgün p sayısı yok.
49. $k = 49$ ise: $q = q_{24} = 54$ için düzgün p sayısı yok.

Şu hâlde bulunan $m = \frac{p}{q}$ oranları arasındaki

$$[155]\quad \begin{aligned}&\frac{64}{45}<\frac{40}{27}\left(=\frac{80}{54}\right)<\frac{3}{2}\left(=\frac{15}{10}=\frac{75}{50}\right)<\frac{8}{5}\left(=\frac{24}{15}=\frac{40}{25}=\frac{72}{45}\right)<\frac{81}{50}<\frac{5}{3}\left(=\frac{15}{9}=\frac{25}{15}=\frac{45}{27}=\frac{75}{45}\right)<\frac{27}{16}\left(=\frac{54}{32}=\frac{81}{48}\right)\\&<\frac{9}{5}\left(=\frac{18}{10}=\frac{27}{15}=\frac{36}{20}=\frac{45}{25}=\frac{54}{30}=\frac{72}{40}=\frac{81}{45}=\frac{90}{50}\right)<\frac{50}{27}\left(=\frac{100}{54}\right)<m_{13}=\frac{15}{8}\left(=\frac{30}{16}=\frac{45}{24}=\frac{60}{32}=\frac{75}{40}=\frac{90}{48}\right)\left[<m_{12}=\frac{48}{25}\right]\end{aligned}$$

sıralaması göz önüne alınırsa (a_{13}, h_{13}, r_{13}) dik üçgenini doğuran dik üçgenin eğimi

$$[156]\quad m_{13}=\frac{p_{13}}{q_{13}}=\frac{15}{8}$$

olarak elde edilir.

14. Şimdi de

$$[157]\quad \frac{q+k}{q}=m<m_{13}=\frac{15}{8}\Rightarrow \frac{8}{7}k<q<60\quad (k\in\mathbb{Z}^+)$$

eşitsizliklerine göre m_{13}'ün EBAS'ı olan m_{14} için yine q'nun bulunduğu aralıktaki ilk (en küçük) p düzgün sayısı alınırsa biricik p_{14} düzgün sayısı için her adımda bulunan ilk p aday düzgün sayıları şu şekilde elde edilmektedirler:

1. $k=1$ ise: $2\le q\le 54$ aralığında $q_1=2$ için $p_1=q_1+k=2+1=3$.
2. $k=2$ ise: $3\le q\le 54$ aralığında $q_2=3$ için $p_2=q_2+k=3+2=5$.
3. $k=3$ ise: $4\le q\le 54$ aralığında $q_4=5$ için $p_4=q_4+k=5+3=8$.
4. $k=4$ ise: $5\le q\le 54$ aralığında $q_4=5$ için $p_4=q_4+k=5+4=9$.
5. $k=5$ ise: $6\le q\le 54$ aralığında $q_8=10$ için $p_8=q_8+k=10+5=15$.
6. $k=6$ ise: $8\le q\le 54$ aralığında $q_7=9$ için $p_7=q_7+k=9+6=15$.
7. $k=7$ ise: $9\le q\le 54$ aralığında $q_7=9$ için $p_7=q_7+k=9+7=16$.
8. $k=8$ ise: $10\le q\le 54$ aralığında $q_8=10$ için $p_8=q_8+k=10+8=18$.
9. $k=9$ ise: $12\le q\le 54$ aralığında $q_{10}=15$ için $p_{10}=q_{10}+k=15+9=24$.
10. $k=10$ ise: $12\le q\le 54$ aralığında $q_{10}=15$ için $p_{10}=q_{10}+k=15+10=25$.
11. $k=11$ ise: $15\le q\le 54$ aralığında $q_{11}=16$ için $p_{11}=q_{11}+k=16+11=27$.
12. $k=12$ ise: $15\le q\le 54$ aralığında $q_{10}=15$ için $p_{10}=q_{10}+k=15+12=27$.
13. $k=13$ ise: $15\le q\le 54$ aralığında $q_{16}=27$ için $p_{16}=q_{16}+k=27+13=40$.
14. $k=14$ ise: $18\le q\le 54$ aralığında $q_{12}=18$ için $p_{12}=q_{12}+k=18+14=32$.
15. $k=15$ ise: $18\le q\le 54$ aralığında $q_{15}=25$ için $p_{15}=q_{15}+k=25+15=40$.
16. $k=16$ ise: $20\le q\le 54$ aralığında $q_{13}=20$ için $p_{13}=q_{13}+k=20+16=36$.
17. $k=17$ ise: $20\le q\le 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
18. $k=18$ ise: $24\le q\le 54$ aralığında $q_{16}=27$ için $p_{16}=q_{16}+k=27+18=45$.
19. $k=19$ ise: $24\le q\le 54$ aralığında $q_{21}=45$ için $p_{21}=q_{21}+k=45+19=64$.
20. $k=20$ ise: $24\le q\le 54$ aralığında $q_{15}=25$ için $p_{15}=q_{15}+k=25+20=45$.
21. $k=21$ ise: $25\le q\le 54$ aralığında $q_{16}=27$ için $p_{16}=q_{16}+k=27+21=48$.
22. $k=22$ ise: $27\le q\le 54$ aralığında $q_{18}=32$ için $p_{18}=q_{18}+k=32+22=54$.
23. $k=23$ ise: $27\le q\le 54$ aralığında $q_{16}=27$ için $p_{16}=q_{16}+k=27+23=50$.
24. $k=24$ ise: $30\le q\le 54$ aralığında $q_{17}=30$ için $p_{17}=q_{17}+k=30+24=54$.
25. $k=25$ ise: $30\le q\le 54$ aralığında $q_{23}=50$ için $p_{23}=q_{23}+k=50+25=75$.
26. $k=26$ ise: $30\le q\le 54$ aralığında $q_{24}=54$ için $p_{24}=q_{24}+k=54+26=80$.
27. $k=27$ ise: $32\le q\le 54$ aralığında $q_{21}=45$ için $p_{21}=q_{21}+k=45+27=72$.
28. $k=28$ ise: $36\le q\le 54$ aralığında $q_{19}=36$ için $p_{19}=q_{19}+k=36+28=64$.
29. $k=29$ ise: $36\le q\le 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
30. $k=30$ ise: $36\le q\le 54$ aralığında $q_{21}=45$ için $p_{21}=q_{21}+k=45+30=75$.
31. $k=31$ ise: $36\le q\le 54$ aralığında $q_{23}=50$ için $p_{23}=q_{23}+k=50+31=81$.
32. $k=32$ ise: $40\le q\le 54$ aralığında $q_{20}=40$ için $p_{20}=q_{20}+k=40+32=72$.
33. $k=33$ ise: $40\le q\le 54$ aralığında $q_{22}=48$ için $p_{22}=q_{22}+k=48+33=81$.
34. $k=34$ ise: $40\le q\le 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
35. $k=35$ ise: $45\le q\le 54$ aralığında $q_{21}=45$ için $p_{21}=q_{21}+k=45+35=80$.
36. $k=36$ ise: $45\le q\le 54$ aralığında $q_{21}=45$ için $p_{21}=q_{21}+k=45+36=81$.
37. $k=37$ ise: $45\le q\le 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
38. $k=38$ ise: $45\le q\le 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
39. $k=39$ ise: $45\le q\le 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
40. $k=40$ ise: $48\le q\le 54$ aralığında $q_{23}=50$ için $p_{23}=q_{23}+k=50+40=90$.
41. $k=41$ ise: $48\le q\le 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
42. $k=42$ ise: $50\le q\le 54$ aralığında $q_{24}=54$ için $p_{24}=q_{24}+k=54+42=96$.
43. $k=43$ ise: $50\le q\le 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
44. $k=44$ ise: $q=q_{24}=54$ için düzgün p sayısı yok.
45. $k=45$ ise: $q=q_{24}=54$ için düzgün p sayısı yok.
46. $k=46$ ise: $q=q_{24}=54$ için $p_{24}=q_{24}+k=54+46=100$.
47. $k=47$ ise: $q=q_{24}=54$ için düzgün p sayısı yok.

Şu hâlde bulunan $m=\frac{p}{q}$ oranları arasındaki

$$[158] \quad \frac{64}{45}<\frac{40}{27}\left(=\frac{80}{54}\right)<\frac{3}{2}\left(=\frac{15}{10}=\frac{75}{50}\right)<\frac{8}{5}\left(=\frac{24}{15}=\frac{40}{25}=\frac{72}{45}\right)<\frac{81}{50}<\frac{5}{3}\left(=\frac{15}{9}=\frac{25}{15}=\frac{45}{27}=\frac{75}{45}\right)<\frac{27}{16}\left(=\frac{54}{32}=\frac{81}{48}\right)<\frac{16}{9}\left(=\frac{32}{18}=\frac{48}{27}=\frac{64}{36}=\frac{80}{45}=\frac{96}{54}\right)$$
$$<\frac{9}{5}\left(=\frac{18}{10}=\frac{27}{15}=\frac{36}{20}=\frac{45}{25}=\frac{54}{30}=\frac{72}{40}=\frac{81}{45}=\frac{90}{50}\right)<m_{14}=\frac{50}{27}\left(=\frac{100}{54}\right)\left[<m_{13}=\frac{15}{8}\right]$$

sıralaması göz önüne alınırsa (a_{14}, h_{14}, r_{14}) dik üçgenini doğuran dik üçgenin eğimi

$$[159] \quad m_{14}=\frac{p_{14}}{q_{14}}=\frac{50}{27}$$

olarak elde edilir.

15. Son olarak

$$[160] \quad \frac{q+k}{q}=m<m_{14}=\frac{50}{27} \Rightarrow \frac{27}{23}k<q<60 \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$$

eşitsizliklerine göre m_{14}'ün EBAS'ı olan m_{15} için yine q'nun bulunduğu aralıktaki ilk (en küçük) p düzgün sayısını alırsak biricik p_{15} düzgün sayısı için her adımda bulunan ilk p aday düzgün sayıları şu şekilde elde edilmektedirler:

1. $k=1$ ise: $2 \le q \le 54$ aralığında $q_1=2$ için $p_1=q_1+k=2+1=3$.
2. $k=2$ ise: $3 \le q \le 54$ aralığında $q_2=3$ için $p_2=q_2+k=3+2=5$.
3. $k=3$ ise: $4 \le q \le 54$ aralığında $q_4=5$ için $p_4=q_4+k=5+3=8$.
4. $k=4$ ise: $5 \le q \le 54$ aralığında $q_4=5$ için $p_4=q_4+k=5+4=9$.
5. $k=5$ ise: $6 \le q \le 54$ aralığında $q_8=10$ için $p_8=q_8+k=10+5=15$.
6. $k=6$ ise: $8 \le q \le 54$ aralığında $q_7=9$ için $p_7=q_7+k=9+6=15$.
7. $k=7$ ise: $9 \le q \le 54$ aralığında $q_7=9$ için $p_7=q_7+k=9+7=16$.
8. $k=8$ ise: $10 \le q \le 54$ aralığında $q_8=10$ için $p_8=q_8+k=10+8=18$.
9. $k=9$ ise: $12 \le q \le 54$ aralığında $q_{10}=15$ için $p_{10}=q_{10}+k=15+9=24$.
10. $k=10$ ise: $12 \le q \le 54$ aralığında $q_{10}=15$ için $p_{10}=q_{10}+k=15+10=25$.
11. $k=11$ ise: $15 \le q \le 54$ aralığında $q_{11}=16$ için $p_{11}=q_{11}+k=16+11=27$.
12. $k=12$ ise: $15 \le q \le 54$ aralığında $q_{10}=15$ için $p_{10}=q_{10}+k=15+12=27$.
13. $k=13$ ise: $16 \le q \le 54$ aralığında $q_{16}=27$ için $p_{16}=q_{16}+k=27+13=40$.
14. $k=14$ ise: $18 \le q \le 54$ aralığında $q_{12}=18$ için $p_{12}=q_{12}+k=18+14=32$.
15. $k=15$ ise: $18 \le q \le 54$ aralığında $q_{15}=25$ için $p_{15}=q_{15}+k=25+15=40$.
16. $k=16$ ise: $20 \le q \le 54$ aralığında $q_{13}=20$ için $p_{13}=q_{13}+k=20+16=36$.
17. $k=17$ ise: $20 \le q \le 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
18. $k=18$ ise: $24 \le q \le 54$ aralığında $q_{16}=27$ için $p_{16}=q_{16}+k=27+18=45$.
19. $k=19$ ise: $24 \le q \le 54$ aralığında $q_{21}=45$ için $p_{21}=q_{21}+k=45+19=64$.
20. $k=20$ ise: $24 \le q \le 54$ aralığında $q_{15}=25$ için $p_{15}=q_{15}+k=25+20=45$.
21. $k=21$ ise: $25 \le q \le 54$ aralığında $q_{16}=27$ için $p_{16}=q_{16}+k=27+21=48$.
22. $k=22$ ise: $27 \le q \le 54$ aralığında $q_{18}=32$ için $p_{18}=q_{18}+k=32+22=54$.
23. $k=23$ ise: $30 \le q \le 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
24. $k=24$ ise: $30 \le q \le 54$ aralığında $q_{17}=30$ için $p_{17}=q_{17}+k=30+24=54$.
25. $k=25$ ise: $30 \le q \le 54$ aralığında $q_{23}=50$ için $p_{23}=q_{23}+k=50+25=75$.
26. $k=26$ ise: $32 \le q \le 54$ aralığında $q_{24}=54$ için $p_{24}=q_{24}+k=54+26=80$.
27. $k=27$ ise: $32 \le q \le 54$ aralığında $q_{21}=45$ için $p_{21}=q_{21}+k=45+27=72$.
28. $k=28$ ise: $36 \le q \le 54$ aralığında $q_{19}=36$ için $p_{19}=q_{19}+k=36+28=64$.
29. $k=29$ ise: $36 \le q \le 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
30. $k=30$ ise: $36 \le q \le 54$ aralığında $q_{21}=45$ için $p_{21}=q_{21}+k=45+30=75$.
31. $k=31$ ise: $40 \le q \le 54$ aralığında $q_{23}=50$ için $p_{23}=q_{23}+k=50+31=81$.
32. $k=32$ ise: $40 \le q \le 54$ aralığında $q_{20}=40$ için $p_{20}=q_{20}+k=40+32=72$.
33. $k=33$ ise: $40 \le q \le 54$ aralığında $q_{22}=48$ için $p_{22}=q_{22}+k=48+33=81$.
34. $k=34$ ise: $40 \le q \le 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
35. $k=35$ ise: $45 \le q \le 54$ aralığında $q_{21}=45$ için $p_{21}=q_{21}+k=45+35=80$.
36. $k=36$ ise: $45 \le q \le 54$ aralığında $q_{21}=45$ için $p_{21}=q_{21}+k=45+36=81$.
37. $k=37$ ise: $45 \le q \le 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
38. $k=38$ ise: $45 \le q \le 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
39. $k=39$ ise: $48 \le q \le 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
40. $k=40$ ise: $48 \le q \le 54$ aralığında $q_{23}=50$ için $p_{23}=q_{23}+k=50+40=90$.
41. $k=41$ ise: $50 \le q \le 54$ aralığında düzgün p sayısı yok.
42. $k=42$ ise: $50 \le q \le 54$ aralığında $q_{24}=54$ için $p_{24}=q_{24}+k=54+42=96$.
43. $k=43$ ise: $q=q_{24}=54$ için düzgün p sayısı yok.
44. $k=44$ ise: $q=q_{24}=54$ için düzgün p sayısı yok.
45. $k=45$ ise: $q=q_{24}=54$ için düzgün p sayısı yok.

Şu hâlde bulunan $m=\frac{p}{q}$ oranları arasındaki

[161] $$\frac{64}{45}<\frac{40}{27}\left(=\frac{80}{54}\right)<\frac{3}{2}\left(=\frac{15}{10}=\frac{75}{50}\right)<\frac{8}{5}\left(=\frac{24}{15}=\frac{40}{25}=\frac{72}{45}\right)<\frac{81}{50}<\frac{5}{3}\left(=\frac{15}{9}=\frac{25}{15}=\frac{45}{27}=\frac{75}{45}\right)<\frac{27}{16}\left(=\frac{54}{32}=\frac{81}{48}\right)<\frac{16}{9}\left(=\frac{32}{18}=\frac{48}{27}=\frac{64}{36}=\frac{80}{45}=\frac{96}{54}\right)$$
$$<m_{15}=\frac{9}{5}\left(=\frac{18}{10}=\frac{27}{15}=\frac{36}{20}=\frac{45}{25}=\frac{54}{30}=\frac{72}{40}=\frac{81}{45}=\frac{90}{50}\right)\left[<m_{14}=\frac{50}{27}\right]$$

sıralaması göz önüne alınırsa (a_{15},h_{15},r_{15}) dik üçgenini doğuran dik üçgenin eğimi için şu şekilde elde edilir:

$$[162]\quad m_{15}=\frac{p_{15}}{q_{15}}=\frac{9}{5}.$$

Sonuçta işleme bu şekilde devam edersek ***Manuel Benito Muñoz***'un Tablo 1.2'sinde geçen şu tabloyu elde etmiş oluruz (Bkz. "*Birkaç Diofant Problemi*", S. 9):

n	p_n	q_n	a_n	h_n	r_n	$\theta_n = Sec^{-1}\left(\frac{r_n}{h_n}\right)$
0	$\frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{2}$	$\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$45^{\circ}00'00''$
1	12	5	119	120	169	$44^{\circ}45'37''$
2	64	27	3367	3456	4825	$44^{\circ}15'10''$
3	75	32	4601	4800	6649	$43^{\circ}47'14''$
4	125	54	12709	13500	18541	$43^{\circ}16'17''$
5	9	4	65	72	97	$42^{\circ}04'30''$
6	20	9	319	360	481	$41^{\circ}32'40''$
7	54	25	2291	2700	3541	$40^{\circ}18'55''$
8	32	15	799	960	1249	$39^{\circ}46'13''$
9	25	12	481	600	769	$38^{\circ}43'05''$
10	81	40	4961	6480	8161	$37^{\circ}26'14''$
11	2 (60)	1 (30)	45	60	75	$36^{\circ}52'12''$
12	48	25	1679	2400	2929	$34^{\circ}58'34''$
13	15	8	161	240	289	$33^{\circ}51'18''$
14	50	27	1771	2700	3229	$33^{\circ}15'43''$
15	9	5	56	90	106	$31^{\circ}53'27''$
16	16	9	175	288	337	$31^{\circ}17'04''$
17	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$30^{\circ}00'00''$
18	27	16	473	864	985	$28^{\circ}41'55''$
19	5	3	16	30	34	$28^{\circ}04'21''$
20	81	50	4061	8100	9061	$26^{\circ}37'38''$
21	8	5	39	80	89	$25^{\circ}59'21''$
22	25	16	369	800	881	$24^{\circ}45'41''$
23	3	2	5	12	13	$22^{\circ}37'12''$
24	40	27	871	2160	2329	$21^{\circ}57'41''$
25	36	25	671	1800	1921	$20^{\circ}26'40''$
26	64	45	2071	5760	6121	$19^{\circ}46'34''$
27	45	32	1001	2880	3049	$19^{\circ}09'57''$
28	25	18	301	900	949	$18^{\circ}29'32''$
29	27	20	329	1080	1129	$16^{\circ}56'32''$
30	4	3	7	24	25	$16^{\circ}15'37''$
31	32	25	399	1600	1649	$14^{\circ}00'09''$
32	5	4	9	40	41	$12^{\circ}40'49''$
33	6	5	11	60	61	$10^{\circ}23'20''$
34	32	27	295	1728	1753	$09^{\circ}41'17''$
35	9	8	17	144	145	$06^{\circ}43'59''$
36	10	9	19	180	181	$06^{\circ}01'32''$
37	27	25	104	1350	1354	$04^{\circ}24'19''$
38	16	15	31	480	481	$03^{\circ}41'43''$
39	25	24	49	1200	1201	$02^{\circ}20'18''$
40	1	1	0	2	2	$00^{\circ}00'00''$

Tablo 17. Bu tablonun Mathematica'daki doğrulanması şu dosyadadır: Tablo 17, Oluşturma Tarihi: 13.03.2026, 21:38:05-Son Kaydetme Tarihi: 21.03.2026, 04:59:47 (ki rar klasörünün içinden çıkarttığınız Tablo 17.nb dosyasını Wolfram Player ile okuyabilir ve işletebilirsiniz ama eğer profesyonel kullanmak isterseniz Mathematica 14.3'ü bilgisayarınıza kurmanız gerekir).

4.3. Plimpton 322 No'lu Tabletin Değerlendirilmesi

1. Tabletin Son Sütunundaki "1" Rakamı Hakkında. Bu konuda bilinen bir şey varsa, o da tabletin sol tarafının son sütundaki sayıların 1'ler basamağındaki rakamların bulunduğu hat, daha açık bir deyişle "1" rakamlarının olduğu hat boyunca kırık olmasıdır. Fakat bu kırıklık doğal olmaktan ziyade adeta bir bıçak keskinliğinde son derece temizdir ve burada modern bir yapıştırıcı (zamk gibi) izleri görülmektedir. Bundan, kökeni meçhul olan bu tabletin toprak altından bütün olarak çıktığı ve sonradan kırıldığı, diğer parçasının belki de bilinmeyen bir yerde olduğu sanılmaktadır. ***Edgar J. Banks*** (yandaki resimdeki kişi), 1905'te (ki bu tarihte ***Atatürk*** kurmay yüzbaşısı olarak İstanbul Harp Akademisi'nden oldu) şimdi arkeolojik bir site olan modern Tell Senkereh/Irak'ın güneyindeki Larsa'da kaçak bir kazı yaparken bir grup tablet buldu ve bunlardan Plimpton 322 no'lu tableti 1923'te (ki bu tarihte ***Atatürk***, Türkiye Cumhuriyeti'ni kurdu) ilk Western sahibi ve The New York yayıncısı ***George Arthur Plimpton***'a (ki 1936'daki ölümünden önce tarihi matematiksel kitaplar ve sanatla ilgili parçalardan oluşan koleksiyonunu Columbia Üniversitesi'ne verilmesini vasiyet eden kimsedir) 10 $'a (şimdi 305.98 $) sattı. Konuyla ilgili ***Robson***'ın 2001'deki "*Neither Sherlock Holmes nor Babylon: A Reassessment of Plimpton 322*" makalesinin 171. ve 172. sayfalarına baktığımızda, bir zamanlar kaçak kazılarla çıkarılan eski Mısır'a ait buluntuların başına gelenlerin ne yazık ki burada da tekrarlandığını görüyoruz!

Resim 6. ***Edgar J. Banks.*** Fotoğraf Bismaya ya da kayıp şehir Adab'dan, 1908.

İşte bu nedenle aşağıdaki bulgular son derece önem arz eder:

1.1. ***Neugebauer*** ve ***Sachs*** $\left(\frac{r_n}{h_n}\right)^2$ oranını kullandılar. Çünkü ***Neugebauer***, *"Eski matematikçiler yalnızca Pisagor üçlülerinin tanımıyla değil ama* $\frac{r_n}{h_n}$ *oranlarıyla da ilgileniyorlardı"* demişti. Bu yüzden Tablo 12'deki son sütun başlığını okuyamamalarına rağmen oradaki sayıların başlarına "1" rakamının gelmesi gerektiğine inandılar (Bkz. Plate 25, S. 38). İkinci olarak 39. sayfadaki Şekil 2'deki (Fig. 2) grafikte dik üçgenlerdeki $\frac{r_n}{h_n}$ oranlarına ilişkin eğim açılarının 45°'den 30°'ye kadar monoton azaldığını ve en düşük değerin (en küçük eğim açısı) hemen hemen 31° olduğunu (ki bu, gerçekte 31°53′27″ dir. Yani onlar 32° yerine yanlışlıkla 31° yazdılar) söylediler (Bkz. "*Otto Neugebauer: The Exact Sciences in Antiquity (1951,1957,1969), 2nd ed./Princeton, NJ: Brown University Press; reprint ed./New York: Dover, 1969*", Sayfa. 38). Fakat gerçekte son sütunda $\left(\frac{r_n}{h_n}\right)^2$ oranı hiç kullanılmadı çünkü,

$$[163] \quad 1+\left(\frac{a_n}{h_n}\right)^2=\left(\frac{r_n}{h_n}\right)^2$$

nedeniyle son sütundaki sayıların kesir kısmını veren $\left(\frac{a_n}{h_n}\right)^2$'nin başına "1" rakamının gelmesi gerekiyordu. Ayrıca tabletteki 15 dik üçgenin eğim açıları için çifte kullanım mevcuttu: Birinci (kural gereğince tabletteki) kullanımda 45°'den 30°'ye kadar monoton azalan ve ikinci kullanımda 45°'den 60°'ye kadar monoton artan idi. Bunlardan bazıları daha önceden Mısır piramitlerinin yapımında kullanılmıştı. Örnekse Tablo 12'deki 4. dik üçgen Bent piramitinin üst parçasında ve Kızıl piramitte, 11. dik üçgen Khafre piramitinde kullanıldı!

Not 6. Bu açıklamalarla ***Neugebauer ve Sachs***'ın hatalarını düzeltiş oluyorum. Buna göre tabletin son sütunundaki $\left(\frac{a_n}{h_n}\right)^2$ sayılarının "0" rakamı ile başladığını "*H. L. Resnikoff & Raymond O'Neil Wells: Mathematics in Civilization*, 1984, S. 74"teki tabloda ve $\left(\frac{r_n}{h_n}\right)^2$ sayılarının "1" rakamı ile başladığını "*Eli Maor: The Pythagorean Theorem: A 4,000-Year History*, 2007, S. 9"daki tabloda görebilirsiniz. Bu son tablo ***Neugebauer***'in (1951) 37. sayfasındaki tablosu olup, son sütundaki 10., 11., 12. ve 14. satırlarındaki sayıların başında "1" rakamının tablette açık bir şekilde görüldüğü geçer!

1.2. ***Robson***, son sütun başlığını "I. (Hasarlı) $\left(\frac{r_n}{h_n}\right)^2 \vee \left(\frac{a_n}{h_n}\right)^2$" şeklinde vermiş ama bu sütundaki her sayının, tercihini ilk seçimden yana kullanarak (ki hiçbir satırda okunamayan, dolayısıyla köşeli parantezler içinde verilen), "1" rakamıyla başladığını belirtmiştir (Bkz. "*Neither Sherlock Holmes nor Babylon: A reassessment of Plimpton 322*", *Historia Math. 28 (2001)*, S. 167–206).

Robson, daha sonra MÖ 1900-1800 tarihli YBC 6967 no'lu tabletindeki Problem 20'den hareketle son sütun başlığını

[ta]-ki-il-ti ṣi-li-ip-tim [ša 1 in]-na-as-sà-ḫu-ma SAG i-il-lu-ú	ÍB.SI$_8$ SAG	ÍB.SI$_8$ ṣi-li-ip-tim	MU.BI.IM
[(1) 59] 00 15	1 59	2 49	KI.1
[(1) 56 56] 58 14 50 06 15	56 07	1 20 25	KI.2
[(1) 55 07] 41 15 33 45	1 16 41	1 50 49	KI.3
(1) 53 10 29 32 52 16	3 31 49	5 09 01	KI.4
(1) 48 54 01 40	1 05	1 37	KI.[5]
(1) 47 06 41 40	5 19	8 01	[KI.6]
(1) 43 11 56 28 26 40	38 11	59 01	KI.7
(1) 41 33 45 14 3 45	13 19	20 49	KI.8
(1) 38 33 36 36	8 01	12 49	KI.9
(1) 35 10 02 28 27 24 26 40	1 22 41	2 16 01	KI.10
(1) 33 45	45	1 15	KI.11
(1) 29 21 54 2 15	27 59	48 49	KI.12
(1) 27 00 03 45	2 41	4 49	KI.13
(1) 25 48 51 35 6 40	29 31	53 49	KI.14
(1) 23 13 46 40	28	53	KI.15

Figure 3. Transliteration of Plimpton 322.

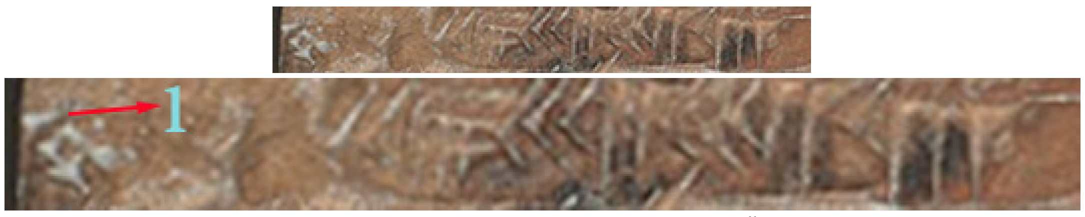
Tablo 18. ***Robson***'a göre Plimpton 322 no'lu tabletin çevirisi. Bu tablodaki köşeli parantezler tabletteki tahribatlı yerleri, dolayısıyla okunamayan yerleri ve küçük parantezler yani "1" rakamının bulunduğu bölümler tabletteki okunması çok güç olan yerleri gösterir. Buna göre ***Robson*** tabletin sol tarafındaki "1"lerin hiç okunamadığını söyler!

şeklinde çözdükten sonra bu sütundaki sayıların kesinlikle "1" rakamıyla başladığını ama bu rakamın hiçbir satırda okunamadığını bildirdi (Bkz. *"Words and Pictures: New Light on Plimpton 322", The Mathematical Association of America, Monthly (2002)*, S. 3).

1.3. YBC 7289 no'lu tabletin resimlerini çekerek tüm dünyaya tanıtılmasını sağlayan ünlü araştırmacı matematikçi-fotoğrafçı ***Bill Casselman*** ise, 2003'te tabletin son sütunundaki 14. satırdaki sayının başındaki "1" rakamının okunabildiğini bildiriyor. Ancak bu ilginç bulgu tabletin bir siyah-beyaz imajında doğruymuş gibi gözükmesine rağmen renkli imajlarına geçildiğinde aynı şeyi söylemenin çok zor olduğu görünmektedir. Bana göre bu durum büyük bir ihtimalle tabletin sol tarafındaki kırıklığın bu kısımda "1" rakamı gibi görüntü vermesinden kaynaklanıyordu (Bkz. *"Bill Casselman: The Babylonian tablet Plimpton 322"*).

1.4. Tabletteki bulguma geçmeden önce, tabletin son durumunu ve son sütundaki bulguları kısaca değerlendirmek istiyorum. Öncelikle bu tablet toprak altından çıkarılırken 2. sütun boyunca kırık olarak 2 parça halinde çıkarılmış olduğu anlaşılmaktadır ama sol taraftaki yani 4. sütundaki "1" rakamlarının bulunduğu hat boyunca oluşan kırıklık keskin bir şekilde olup ilkindeki gibi doğal değildir. Dolayısıyla tableti ilk kez okuyup yorumlayan ***Neugebauer*** ve ***Sachs,*** 1945'teki ilk çalışmalarında bu sütundaki sayıların okunuşlarına bir çekince koyarak yani bu sayıların tabletteki mevcut okunuşlarını vererek, dik üçgendeki [163]'e göre bu sayıların başına "1" rakamının gelmesi gerektiğine inandılar. Daha sonra ***Neugebauer*** 1951, 1957 ve 1969'daki çalışmalarında konuya bir açıklık getirmeye çalışmışsa da son sütundaki başlık ve sayıların okunuşları açıklığa kavuşamamış ve diğerlerinin yorumları da konuya bir açıklık getirememiştir. Çok sonraları bu yorumlara dayanan ***Robson***, ilkin 2001'deki çalışmasında son sütundaki sayıların okunuşu için 2 farklı kuralla birlikte ***Neugebauer*** ve ***Sachs***'ın inancını dile getirirken (ama bunu yaparken de hiçbir satırda "1" rakamının okunamadığını belirtiyor), 2002'deki ikinci çalışmasında bu tablet ile YBC 6967 no'lu tabletindeki Problem 20'yi karşılaştırarak, tabletin kırık yerlerinde bulunan son sütunun 1. ve 2. satır başlangıcındaki **"[ta]"** ve **"[ša 1 in]"** eklerini keşfederek ***Neugebauer*** ve ***Sachs***'ın yorumunu düzeltir ve böylece son sütun başlığını tamamlamış olur! Fakat bu yorumlarla birlikte son zamanlarda bazı araştırmacıların Tablo 12'deki son sütundaki bazı (10., 11., 12. ve 14. satırlardaki) sayıların başında "1" rakamını görmesi ve ***Robson*** tarafından keşfedilen eklerle sütun başlığının tamamen okunabilir hale gelmesi, bir yerde halüsinasyon görmekten ibaret gibi olaylar idi. Yani bunları ispat etmek mümkün değildi. Bu nedenle tabletin orijinal resmine bakmak için internetten Columbia Üniversitesi'ndeki Plimpton Kütüphanesi'ne girdim. Amacım tabletin orijinal resmi ile diğer resimlerini karşılaştırarak Photoshop ile farkları ortaya çıkartmak idi. Çünkü tablete ait çekilen resimlerde ışığın miktarı ve geliş açısı son derece önemliydi. Örneğin bir resimde tablete çok güçlü (projektörle) bir ışık verilmişti ama yansımalar nedeniyle bazı detaylar fark edilemiyordu. Özetle her resim tabletin farklı detaylarını veriyordu. Bu arada YBC 7289 no'lu tabletin resimleri için gösterilen özenin bu tablette gösterilememiş olması, bizim için çok büyük bir talihsizlik ama diğerleri için daha da büyük bir talihsizlik oldu. Çünkü aşağıdaki bulgum bunu kesinlikle doğrular niteliktedir!

Bulgu 1. Demek ki zamanında dikkat edememişim ve yorumculara güvendiğimden olsa gerek, o sırada şimdiye kimsenin kadar fark edemediği şu bulguyla karşılaştım:



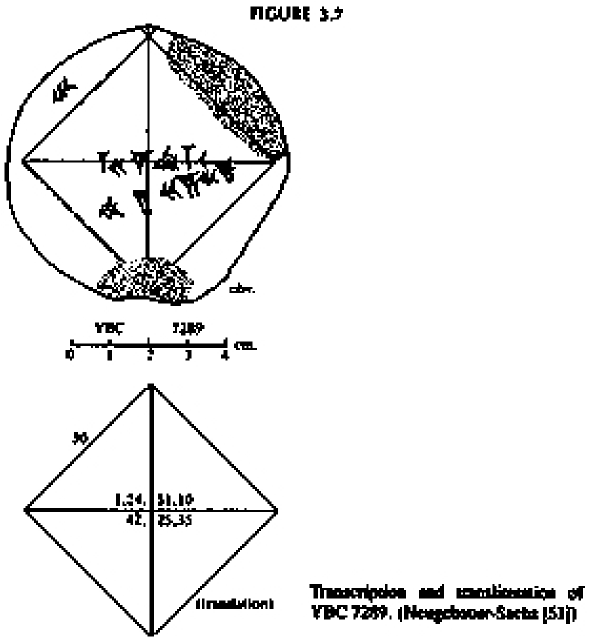
Resim 7. Plimpton 322 no'lu tabletindeki 4. Satır-4. Sütun'daki Sayı: 1; 50[+3], 10, 29, 32, 52, 16 (Columbia Üniversitesi Kütüphaneleri, Plimpton Kütüphanesi, 20.02.2008, Giriş Saati: 17:43:40, Keşif Saati: 18:08). ***Robson***, "1"in en iyi göründüğü yerin 4. ve 12. satırlarda olduğunu söyler (Bkz. *"Words and Pictures: New Light on Plimpton 322", The Mathematical Association of America, Monthly 109*, S. 105, Şekil 1). Fakat buradaki keşfim ***Robson***'dan değil ***Neugebauer***'den kaynaklanıyordu. Çünkü ***Neugebauer***'in (1951) 37. sayfadaki tablodaki 10., 11., 12. ve 14. satırdakilerin başında "1" rakamını okurken 4. satırdakini görememesi (ki üstelik bu satırda daha güç okumalar yapmıştı. Örneğin "50" rakamı güç-bela okunabilirken "3" rakamı hiç okunamamaktadır ve sonraki "10" rakamını zayıf bir şekilde görmüştü), beni gerçekten şaşırtmıştı ama 14. satırda gördüğünü söylediği "1"in ***Bill Casselman*** tarafından tekrar görülmesi beni heyecanlandırmıştı (ki siz bu heyecanımı Resim 1.3.13'tekiyle karşılaştırabilirsiniz. Bendeki şu şansa bakın: ***Neugebauer***'i ketum zannederdim ama ***Romberg*** daha ketummuş. Bkz. *"A Mathematician's Journeys: Otto Neugebauer and Modern Transformations of Ancient Science"*). İşte bu yüzden Plimpton Kütüphanesi'ne girdim ve "1"in hangi satırlarda mevcut olduğunu araştırmaya başladım!

Yukarıdaki ilk resim anılan tarihteki tabletin 4. Satır-4. Sütun'undaki sayısına ait orijinal resimdir ve onun altındakiyse bu orijinal resmin Adobe Photoshop ile 2 kat büyüttüğüm halidir (Bkz. *"This Ancient Babylonian Tablet Proves the Greeks Did Not Invent Trigonometry"*. Linkteki sayfadaki ilk resme göre yukarıdaki imajlarda Photoshop ile herhangi bir oynama olmamıştır. Dr. ***Daniel Mansfield***'in 989. sayfada tabletin bir tablosunu verirken bu noktaya dikkat çeken fotoğrafları vermesi iyi olurdu. Bkz. *"Plimpton 322: A Study of Rectangles, 2021"*, S. 988). ***Neugebauer*** bu sayıyı okurken 1'i okuyamadığını ama var olması gerektiğini, 1'den sonra gelen 53 rakamındaki 50'yi tamamen, 10 rakamını zayıf bir şekilde ve sonraki rakamları ise tamamen gördüğünü söylüyor. Fakat 50 rakamını okuyan ***Neugebauer*** nasıl oluyor da ondan önceki 1 rakamını göremiyor diye insanın hayıflanmaması mümkün değil. Çünkü eğer burada bir halüsinasyon görmüyorsam, ki öyledir ve bu görüntü tabletteki herhangi bir kırıklıktan da meydana gelmiş değildir, 1 rakamı kendini açık bir şekilde gösteriyor: Dikkat ederseniz 1 rakamı, 50'nin hemen solunda bütün gövdesiyle birlikte her 2 resimde adeta *"Ben buradayım, arkadaş. Ama sen okuyamıyorsan ben ne yapayım!"* diyor (Bkz. Resim 1, Resim 2. Her 2 resimde "1" rakamının en iyi görüldüğü yer 4. Satır-4. Sütun'dur). Bununla birlikte son sütundaki 2. ve 3. satırlarda elle yazıldığı anlaşılan "53, K, 55, 1426" karakterlerini okudum. Bunlardan "1426" sayısı 3. satırdaki sayının son rakamı olan 45'in üzerinde açıkça okunabilirken diğer karakterler görülmüyordu; onları ancak Photoshop ile güç-bela okuyabildim (ki şimdi bu karakterler silinmiş durumdadır. Bkz. Resim 2. Tabletin tüm yüzlerinin gösterildiği bu resimde tabletin arkasında 4 farklı yazıt vardır. Diğerleri silinmeye yüz tuttuğu için sadece **"PLIMTON LIBRARY"** yazısı okunabiliyor). Muhtemelen keşfedildikten hemen sonra tablete konulan ilk envanter numara bu idi!

Şu hâlde bu bulgularıma göre Plimpton 322 no'lu tabletin 4. Satır-4. Sütun'daki sayının başındaki "1" rakamının açık bir şekilde görüldüğü, dolayısıyla son sütundaki diğer sayıların da "1" rakamıyla başlaması gerektiği sonucu çıkar. Özetle ***Bill Casselman*** 2003'te Plimpton 322 no'lu tabletin 14. Satır-4. Sütun'daki sayının başında "1" rakamını okurken, ***Neugebauer***'in 1949'daki okumasını kullanan ***Eli Maor*** 2007'de Tablo 1.1'de 10, 11, 12. ve 14. satırlarda "1"in mevcut olduğunu tekrarlamış ve ben de yukarıdaki resimde 4. Satır-4. Sütun'un başındaki "1" rakamının mevcut olduğunu ispat ettim. Ama şimdi, 2011 tarihli *"Plimpton 322:A Review And A Different Perspective"* makalesini yazan ***John P. Britton***, ***Christine Proust*** ve ***Steve Shnider***, Tablo 1'de 1-4. ve 10-11. satırlar hariç diğer satırlarda "1"in okunabildiğini bildiriyorlar. Demek ki tabletin sol tarafı kötü bir şekilde kırılmış ya da daha doğrusu, tam kıramamışlar. Çünkü bu kırıklık 2. sütun başında hat boyunca görülen kırıklığa hiç benzemiyor!

2. Tabletin Son Sütunundaki "0" Rakamı Hakkında. Öncelikle bu konuda yorumcuların Eski Babil tabletlerindeki "0" rakamını okuyuşlarına ve sonuçlarına kısaca bir göz atarak başlayalım işe. Eski Babil tabletlerinde eğer sıfır rakamı bir sayının ara basamaklarından birindeyse, bir karakterlik boşlukla sıfırın yeri belirtildiğinden okuma sorunu yoktu (Bkz. *"Plimpton 322: A Universal Cuneiform Table For Old Babylonian Mathematicians, Builders, Surveyors And Teachers"*, S. 4). Örneğin Plimpton 322 no'lu tabletinde 2 tane böyle boşluk vardır ve ilk zamanlarda bu boşlukların sıfır rakamını gösterdiği birçok yorumcu tarafından kabul görmemişti. Çünkü Sıfır'ın Tarihçesi'ne göre bu mümkün değildi. Dolayısıyla bu ve diğer tabletlerdeki sıfır rakamı yerine konulan boşlukların onlara göre bir anlamı yoktu. Daha sonra yapılan detaylı araştırmalarda bu boşlukların sıfır rakamı yerine konduğu anlaşıldıysa da günümüzde hâlâ buna muhalefet eden

Batılı büyük bir kitle mevcuttur (Bkz. *"Note: The scribe does not use zero, California State University, Los Angeles"*. Bu link şimdi ölü durumdadır ama 2008'de Plimpton 322'deki anılan sıfırların kabul edilmediğini görmüştüm. Günümüzde ise şu sayfaya bakabilirsiniz: *"Ancient Babylonian Number System Had No Zero"*. Araştırırsanız bunlardan mebzul miktarda bulabilirsiniz. Sizce hepsinin İngiliz ve Amerikan olması tesadüf mü?).



Şekil 9. YBC 7289 no'lu tabletteki sayıların ***Neugebauer*** ve ***Sachs*** tarafından okunması. Onlar 1945'te karenin bir kenar uzunluğunu yanlış okuduklarından doğal olarak köşegen uzunluğunu da yanlış okumuş oldular!

İkinci olarak eğer sıfır rakamı bir sayının başında ise, ki ara basamaklarından birinde olduğunda bile sıkı bir muhalefet vardı, probleme göre okuma sorunu vardı. Örneğin Standart Ters Sayılar Tablosu'ndaki 2'den 81'e kadar olan düzgün sayıların terslerinin "0" rakamı ile başladığı açık iken YBC 7289 no'lu tabletindeki karenin bir kenar uzunluğunu veren sayıyı okumada problem vardı. Çünkü bu tabletteki karenin bir kenar uzunluğunu veren sayıyı "30" değil de 2'nin tersi olan "0;30"u okuyabilmeniz için epeyce sağlam delillere sahip olmanız gerekiyordu ve bu da ancak tabletin tam bir analizi yapıldıktan sonra anlaşılabilindi. Dolayısıyla bu tableti ilk kez okuyup yorumlayan ***Neugebauer*** ve ***Sachs***'ın böyle bir analize girmeden, doğrudan problemin içine dalmaları nedeniyle karenin kenarındaki sayıyı "0;30" değil yandaki şekilde gördüğünüz gibi yanlışlıkla "30" olarak okumaları açık bir hatayı göstermekteydi (ki şimdi bunun doğrusunu Resim 1.3.5'te tamamen sağlam delillerle görebilirsiniz). Özetle tabletteki bu sayılar 0;30 ve 0;42,25,35 olmalıdır (ki "0" rakamı başta olduğunda 1;24,51,10'un altına 0;42,25,35 yazılırken konum gereği 42'nin 24'ün altına yazılması gerekirdi ama bu durumda 0;42,25,35 sayısı karenin ve hatta tabletin dışına çıkacaktı. Bu, "0" başta olduğunda neden güç bir şekilde okunduğunu gösteren güzel bir örnektir).

Diğer taraftan aynı araştırmacıların incelediği bir başka muhteşem tablet olan Plimpton 322 no'lu tabletindeki, hiç olmazsa, son sütuna yakından bir göz atalım. Çünkü "0" rakamının kullanımı nedeniyle orada da çok ilginç gelişmeler var. Bunun için öncelikle Plimpton 322 no'lu tabletin son sütun başlığının,

"(Robson) Köşegen kareden (ÍB.SI şiliptim) 1 çekildiğinde (çıkarıldığında) kısa kenar kare (ÍB.SI SAG), daha doğrusu kısa kenar kareye 1 br^2 eklendiğinde köşegen kare gelir ([ta]-ki-il-ti şi-li-ip-tim [ša 1 in]-na-as-sà-hu-ma SAG i-il-lu-ú)"

çözümlenmiş şeklini göz önüne alırsak [163]'teki kural geçerli olur (bkz. *"Neither Sherlock Holmes nor Babylon: A Reassessment of Plimpton 322"*, S. 192) ve bu durumda şu sonuçlar çıkar: 1. Satır-4. Sütun'daki

$$[164]\quad \left(\frac{r_1}{h_1}\right)^2 = 1 + \left(\frac{a_1}{h_1}\right)^2 = 1 + \left(\frac{119}{120}\right)^2 = 1 + 0;59{,}0{,}15 = 1;59{,}0{,}15$$

sayısının hesabında 0 rakamının kullanımı 2 farklı yerde karşımıza çıkar. İlkin sütun başlığında verilen hesap kuralı nedeniyle 0;59,0,15 sayısının başında (tam kısmında) 0 rakamı vardır. İkinci olarak hem bu sayının hem de kural nedeniyle bu sayının 1 ile toplamından elde edilen 1;59,0,15 sayısının 3600'de 1'ler basamağında 0 rakamı bulunmaktadır. Fakat tabletin bu bölümü hasarlı olduğundan bu sayıdaki 0 rakamına karşılık gelen boşluk belli-belirsiz görülmektedir. Dolayısıyla oraya 0 için konulan boşluk açık bir şekilde görülemiyor!

Aynı şekilde 13. Satır-4. Sütun'daki

$$[165]\quad \left(\frac{r_{13}}{h_{13}}\right)^2 = 1 + \left(\frac{a_{13}}{h_{13}}\right)^2 = 1 + \left(\frac{161}{240}\right)^2 = 1 + 0;27{,}0{,}3{,}45 = 1;27{,}0{,}3{,}45$$

sayısında da 0 rakamı aynı pozisyonlara sahiptir. Ancak bu sayının bulunduğu bölüm hasarsız olduğundan buradaki 0 rakamı için konulan boşluk büyükçe, adeta kabak gibi görülmektedir. Ben bu durumu tablette ilk gördüğümde (ki 0 rakamını en anlamlı gördüğüm ilk yer burasıydı), aklıma 13'ün uğursuz değil uğurlu bir sayı olduğu gelmişti!

Şimdi bu bulgulara göre artık sıfırın kısa bir tarihçesini rahat rahat verebilirim:

"0"ın Kısa Bir Tarihçesi. Plimpton 322 ve YBC 7289 no'lu tabletlerinde bulgulara göre "0" rakamı, herhangi bir sembol kullanılmadan ama bir boşluk kullanılarak, ilk kez günümüzden yaklaşık 4,000 yıl önce Mezopotamya'nın güneyinde kullanıldı (ki bu Sümerliler ile daha da geriye gider) ve MS 3. yy'da Selökidler eski nesillerin bu geleneğinden vazgeçerek sıfır için bir sembol icat ettiler! Buna göre 60 tabanındaki "0" rakamı her tabanda sıfırdır ve bu durumda sıfırı icat ettikleri söylenen MÖ 450'de Mayalar, MS 150'de ***Ptolemy (Batlamyus)***, 800'de Hintliler, 1143'te ***Harezmi*** olmak üzere hepsi çizgi dışında kalırlar (ki ***Georges Ifrah***'ın sıfır hakkındaki düşüncelerine tamamen katılmasam da *"Çakıl Taşlarından Babil Kulesine: Rakamların Evrensel Tarihi II"* adlı kitabının 181-185. sayfalarındaki *"Babillilerin Sıfırı Nasıl Doğdu?"* parçasını okumanızı salık veririm).

İşte bu sonuç Batılıların emperyalist politikaları gereğince eski Babil tabletlerinde ısrarla neden "sıfır yok!" dediklerini açıklar. Bunun arka planını öğrenebilmeniz için tarihçi ***Cengiz Özakıncı***'nın *"Antik Yunan Yüceltiminin Türk Karşıtı Tarihsel Kökenleri"*'ne ve ilgili diğer videolarına bakabilirsiniz.

3. Tabletteki Hatalı Rakamlar. Tablette Tablo 12'de kırmızı renkle vurguladığım toplam 5 tane hata vardır. Bunlardan 15. Satır-2. Sütun'daki "53" sayısının neden hatalı yazıldığını 6. maddede açıkladım. Diğerlerini kolaydan zora doğru açıklarsam ilkin 8. Satır-4. Sütun'da "59" hatalı rakamı $1 + \left(\frac{a_8}{h_8}\right)^2$ hesabı yapılırken kâtip son sütuna

$$[166]\quad 1 + \left(\frac{a_8}{h_8}\right)^2 = 1 + \left(\frac{799}{960}\right)^2 = 1;41{,}33{,}45{,}14{,}3{,}45$$

yazması gerekirken yanlışlıkla $45 + 14 = 59$ toplamış ve bunu 45,14'ün yerine yazmıştır. Aynı şekilde 9. Satır-3. Sütun'daki "9" hatalı rakamı da $8 + 1 = 9$ toplamından gelir. Çünkü

$$[167] \quad a_9 = {p_9}^2 - {q_9}^2 = 25^2 - 12^2 = (25 - 12)(25 + 12) = 13.37 = 8{,}1.$$

Dördüncü olarak 13. Satır-3. Sütun'daki "7,12,1" hatalı sayısı

$$[168] \quad a_{13} = {p_{13}}^2 - {q_{13}}^2 = 15^2 - 8^2 = (15 - 8)(15 + 8) = 7.23 = 2{,}41$$

elde edildikten sonra son sütundaki $1 + \left(\frac{a_{13}}{h_{13}}\right)^2$ işlemi için

$$[169] \quad {a_{13}}^2 = 2{,}41^2 = 7{,}12{,}1$$

sayısı kâtip tarafından yanlışlıkla 3. sütuna yazılmıştır.

İşte bu sonuçla Plimpton 322 no'lu tabletindeki (a_n, h_n, r_n) dik üçgenlerinin kenarlarının uzunlukları bu şekilde bulunduktan sonra son sütun için a_n^2 ve h_n^2 sayıları hesaplanıp $\frac{a_n^2}{h_n^2} = \left(\frac{a_n}{h_n}\right)^2$ oranlarının belirlenmesiyle, Tablo 12'deki son sütun başlığında açıklandığı gibi, $\left(\frac{a_n}{h_n}\right)^2$ oranlarına 1 eklenerek $1 + \left(\frac{a_n}{h_n}\right)^2 = \left(\frac{r_n}{h_n}\right)^2$ köşegen kare kenarlarının uzunlukları bulunmaktaydı. Bunu kanıtlayan biricik delil, 13. Satır-3. Sütun'a yanlışlıkla "7,12,1" sayısının yazılmasıdır. Demek ki (a_{13}, h_{13}, r_{13}) dik üçgeninin kenarlarının uzunlukları [81]'deki ([58])'deki formüllere göre bulunduktan sonra son sütun için a_{13}^2 ve h_{13}^2 sayıları hesaplanıp $\frac{a_{13}^2}{h_{13}^2} = \left(\frac{a_{13}}{h_{13}}\right)^2$ oranı belirlenmiş, bu oran aynı zamanda son sütundaki sayının kesir kısmıdır. Ancak bu oran belirlenirken a_{13}^2 sayısı yanlışlıkla bir önceki sütuna yazılmıştır!

Beşinci ve son olarak 2. Satır-2. Sütun'daki "3,12,1" hatalı sayısı Avustralyalı matematikçi ***R. J. Gillings*** tarafından (ki kendisi "*Firavunlar Zamanındaki Matematik (Mathematics in Time of Pharaohs)*" adlı son derece önemli bir kitap yazmıştır) şöyle keşfedilmiştir (Bkz. "*Unexplained Errors in Babylonian Cuneiform Tablet Plimpton 322 (Plimpton 322 No'lu Tabletinde Açıklanamayan Hatalar)", Australian Journal of Science 16, 1953*): 2. Satır-2. Sütun'daki sayı $p_2 = 1{,}4 (= 64)$ ve $q_2 = 27$ doğuranlarıyla [164]'teki 2. özdeşliğe göre

$$[170] \quad r_2 = {p_2}^2 + {q_2}^2 = (p_2 + q_2)^2 - 2p_2q_2 = (1{,}4 + 27)^2 - 2.1{,}4.27 = 1{,}31^2 - 2.1{,}4.27 = 2{,}18{,}1 - 57{,}36 = 1{,}20{,}25$$

olması gerekirken çift hatayla "3,12,1" olarak yazılmıştır.

Kâtip bu hesapta özdeşlikteki "-" işaretini [173]'teki 1. özdeşlikteki işaretle karıştırmış ve "+" almış ve sonra 2. terimdeki 1,4 yerine 1,0 almış ve yanlışlıkla şu sonucu bulmuştur:

$$[171] \quad r_2 = {p_2}^2 + {q_2}^2 = (p_2 + q_2)^2 + 2p_2q_2 = (1{,}4 + 27)^2 + 2.1{,}0.27 = 1{,}31^2 + 2.1{,}0.27 = 2{,}18{,}1 + 54{,}0 = 3{,}12{,}1.$$

Fakat kâtibin çift hatayla bulduğu bu sonuçla [173]'teki 2. özdeşliği kullanmış olduğunu öğreniyoruz. Günümüzde "İki Kare Toplamı" olarak bilinen [173]'teki özdeşlikleri 8. Sınıf ve hatta 10. Sınıf matematik ders kitaplarında kullanıyoruz (Bkz. "*Özdeşlikler ve Özdeşlik Modelleri*").

Not 7. ***Neugebauer*** tabletin 2. Satır-4. Sütun'undaki sayının kesir kısmındaki "50" ve "6" rakamlarının bitişik yazılması nedeniyle "56" gibi okunması gerektiği belirtmiş ama bunu bir hata olarak algılamamıştır (Bkz. "*Plimpton 322: A Universal Cuneiform Table For Old Babylonian Mathematicians, Builders, Surveyors And Teachers*", S. 25. ***Rudolf Hajossy*** tabletin çok küçük olması nedeniyle "50" ve "6" rakamları yerine yanlışlıkla "56" yazıldığını söyler ama bu 2 rakam arasındaki "50"deki ve "6"yı "06" yazarak her 2 rakamdaki sıfırları temsil eden boşluğun tabletin küçük olmasından dolayı konulamadığını söylemesi absürt kaçtı). Tablo 12'de ben de öyle yaptım ve oradaki sayıyı "1;56,56,58,14,50,6,15" şeklinde yazdım!

4. Tablo 17'deki Dik Üçgenlerin Doğuranlarının Bulunması Hakkında. Plimpton 322 no'lu tabletteki dik üçgenlerin Tablo 13'teki doğuranları ilk kez ***Neugebauer*** ve ***Sachs*** tarafından 1945'te verilmiştir (Bkz. "*Matematiksel Çivi Yazıtları, New Heaven, Conn., 1945*", S. 40'taki 2. tablo). ***Neugebauer*** aynı tabloda p ve q doğuranlarını $2^\alpha 3^\beta 5^\gamma = (\alpha, \beta, \gamma)$ sıralı üçlü olarak ayrıca vermiştir.

Neugebauer'in p ve q doğuranlarını bulması şöyle olmuştur: İlkin tablet üzerindeki sayıları okuyarak 38. sayfadaki tabloyu ya da buradaki Tablo 12'yi buldu ya da keşfetti ve fazladan, bu tablodaki a_n ve r_n değerlerine göre [76]'dan h_n yüksekliklerini bularak 40. sayfadaki ilk tabloyu hazırladı. Sonra ***Ray Creighton Buck***'ın anlattığı gibi

$$[172] \quad r_n + a_n = 2{p_n}^2, r_n - a_n = 2{q_n}^2$$

eşitliklerinden p_n ve q_n'leri buldu ya da keşfetti (Bkz. "*Sherlock Holmes Babil'de (Sherlock Holmes In Babylon), 1980*", S. 341. ***Buck*** bu eşitlikleri $C + B = 2a^2$ ve $C - B = 2b^2$ olarak verir). Bununla birlikte 39. sayfada tabletteki dik üçgenleri gösteren (b, ℓ, d) sıralı üçlülerine göre alttaki eğri $\frac{d}{\ell} - 1$, ortadaki eğri $\frac{d^2}{\ell^2} - 1$ ve üstteki eğri $\frac{b}{\ell}$ olmak üzere bir grafik sunumu yapar ve (1)'deki $\ell^2 + b^2 = d^2$ Pisagor bağıntısındaki tam sayılı b, ℓ, d'nin birer yaklaşıklık olmadığını ve "*Son sütundaki sayıların önceki sayılarla tam bir ilişkisi yoktur, sadece şeklimizdeki (Şekil 2) yatay eksen üzerindeki birimler gibi adımların sayısını gösterir. Önlerindeki 'ki' onlara sıra sayıları karakterini vermektedir*" olduğunu söyler. Yani ***Neugebauer***'in Tablo 13'teki p_n ve q_n doğuranlarının, dolayısıyla tabletteki (a_n, h_n, r_n) dik üçgenlerinin nasıl elde edildiği hakkında bir bilgisi yoktur!

Bir Doktora Tezi. Ben bu keşif çalışmasının 4. bölümünde çalışırken 34. sayfaya geldiğimde, 27.07.2006, 23:23:34'te ***Manuel Benito Muñoz***'un "*Birkaç Diofant Problemi (Algunos problemas diofánticos)*" adlı doktora tezini bilgisayarıma indirdim ve (x, y, z) dik üçgenlerini $x < 15000$'e kadar bilgisayarla araştırmış ve buradaki Tablo 17'yi 9. sayfada vermiş olduğunu gördüm. ***Muñoz*** Tablo 17'ye karşılık gelen bu tablo için $x < 15000$ düzgün ve $(\alpha, \beta, \gamma) = (7,4,3)$'ten büyük olmayan (x, y, z) Pisagor üçlülerini araştırdığını söyler. Ayrıca ***Abdulrahman A. Abdulaziz*** "*The Plimpton 322 Tablet and Babylonian Method of Generating Pythagorean Triples*" makalesinin 11. sayfasında başlayan "*4. Tabloyu Tamamlamak İçin Muhtemel Yollar (4. Possible Ways to Complete the Table)*" başlığının altında (w, ℓ, d) Pisagor üçlüleri için $w < \ell < d < 20000$ olmak üzere $\ell < 15000$ düzgün sayıları ve $EBOB(\ell, d) = 1$ ve $\frac{d^2}{\ell^2} = 2$ geçerli olduğunu söyler ve 14. sayfada buradaki Tablo 17'ye karşılık gelen Tablo 6'yı verir (ki böyle birçok makale mevcuttur. Örneğin ***James M. Parks***, "*Pirimitif Pisagor Üçlüleri'nin (PPT) Grafiklerindeki Kavisli Desenler Üzerine*" makalesinin devamı olan "*Pisagor Üçlülerini Hesaplama*"da (a, b, c) Pisagor üçlüleri için 14. sayfada $a, b < 1000$ ve 15-16. sayfalarında $a, b < 10000$'e kadar araştırır).

Muñoz'un doktora tezi 4 bölümden oluşur ve bu bölümler kısaca şöyle tanıtılmaktadır (Bkz. "*Some Diophantine problems*"): *"Özellikle, 1. Bölüm Diofant aritmetiği ve Plimpton 322 tableti üzerine 2 kısa tarihsel notla başlamakta ve 2. Bölüm'de n'den küçük ayaklı Pisagor üçgenlerinin sayısının incelenmesiyle devam etmektedir. Bu bölümün bir kısmı Journal of Computational and Applied Mathematics dergisinde yayınlanan "Pythagorean triangles with legs less than n" makalesinde toplanmıştır.*

*Bölüm 3'te $M(n) = \sum_{m=1}^{n} \mu(m)$ fonksiyonunu inceledik. Bunun üzerine **Mertens** $M(x) < \sqrt{x}$'i tahmin eder. **Odlyzco** ve **te Riele** [35]'te bu varsayımın yanlış olduğunu kanıtladılar, ancak açık bir karşı örnek vermediler. Mevcut hesaplama zorluklarından biri **Mertens**'in varsayımına açık bir karşı örnek bulmaktır. **Odlyzco** ve **te Riele**, x'in 10^{20}'den küçük değerleri için bir karşı örnek olmadığını öngörmüştür.*

Bölüm 4'te, Bölüm 3'te oluşturulan yinelenen formüllerden birine dayanarak, μ, M ve φ'ye benzer ve tamsayı değerleri almak yerine Gauss tamsayı değerleri alan fonksiyonlar tanımlıyoruz. Bu yeni fonksiyonlar için çeşitli tekrarlayan formüller ve boyutlar oluşturuyoruz."

Şu tesadüfe bakın ki ben de bu keşif çalışmama 2 tarihsel tabletle (Çatalhöyük ve Plimpton 322 no'lu tabletler) başladım ve ***Muñoz*** tezinin ilk bölümünde

giriş çalışmalarını yaptıktan sonra 2. bölümde (x, y, z) dik üçgenlerini nasıl bulduğunu yüksek matematik vasıtalarını kullanarak anlatır:

Benim şansım ***Julio Iglesias***'ın amcasının, *"Mi suerte dijo si (Şansım 'Evet' dedi)"* dediği gibi ***Muñoz***'un makalesini aldıktan sonra 10. günde açıldı (Bkz. "*YBC 7289 No'lu Tabletin 2. Çözümü*", Önsöz, Dipnot 1. Bu çözüm ***E. F. Robertson***'un 2000'de önerdiği alternatif bir çözümdür ama bu çözüm ilk kez 1865'te verilmişti. Bkz. "*Babilonya Matematiğinde Pisagor Teoremi*". Bu makalenin PDF'si için şuraya bakabilirsiniz. ***Tom Zara*** aynı çözümü "*A Brief Study of Some Aspects of Babylonian Mathematics*" makalesinin 16-17. sayfalarında verir. Fakat bu çözüm YBC 7289 no'lu tableti için gerçek bir çözüm değil ve aynı çözümü ya da sonuçları BM 15285 no'lu tablete göre Tablo 1.1.2'de vermem tarihsel bir taban kazandırmaktan başka bir şey değildi. Aslında bu makalemle birlikte "*YBC 7289 No'lu Tablet*"te 4 farklı çözüm verdim ve elimde 2 çözüm daha var. Burada şu durum dikkatimi çekti: YBC 10529 no'lu tabletteki sayıları Tablo 1.4.2'de verirken Dr. ***Daniel Mansfield***'in "*Mesopotamian square root approximation by a sequence of rectangles*" makalesinin 181. sayfasındaki Tablo 3'üyle aynı vermişim ve ikimiz de 2023'te yayınlamışız ama ben makalemi 03.02.2023'te ve o da 02.09.2023'te verdiğine göre demek ki o pişti olmuş).

Resim 8. ***Manuel Iglesias*** (soldaki) kardeşi ***Julio*** (sağdaki) ile birlikte. Aralarında büyük uluslararası şarkıcı ***Julio Iglesias***'ın portresi var. ***Julio Iglesias***'ın amcası ***Manuel Iglesias Sarria y Puga***, 1987'de "*Mi suerte dijo si. Evocación autobiográfica de Guerra y Paz (Talihimin Güldüğü An. Savaş ve Barış'ın otobiyografik çağrışımı) (1918-1936-1945)*" kitabını yayımladı. Fakat rahmetli ***Engin Ardıç*** *"Hiç kimsenin Hoşuna Gitmeyecek Bir İç Savaş Tarihi (Una Historia De La Guerra Civil Que No Va A Gustar A Nadie)"* kitabından hareketle yazdığı "*Zil, Şal ve Utanç*" makalesinde 1938'in sonunda meşru İspanyol Cumhuriyeti'ni .iç gibi ortada bıraktığımızı söylemişti ve ***Manuel Iglesias***, kitabında 1937 Nisan'ında kendisiyle birlikte 712 İspanyol milliyetçisini ***Atatürk***'ün kurtardığını söylemez. Çünkü bilmez, onlar Türk Hükümeti tarafından yollanan Karadeniz vapuruyla kurtulduklarını sanıyorlardı (Bkz. "*Arrivederci Siracusa!*". Karadeniz vapurunun bir benzerini "*İspanyolca Haber Bülteni No. 12*"deki 1:46'daki ***Franco***'nun vapurunda görebilirsiniz. Arriba España! (Yaşasın İspanya!)). Bu sırrı Madrid'teki Büyükelçimiz ***Ender Arat*** çözmüş ve göreve yeni başladığı günlerde onuruna verilen bir yemek sırasında davetlilere anlatmıştır (Bkz. "*İspanyol iç savaşında Julio Iglesias'ın amcasını Türk gemisi Karadeniz kurtarmış*"). ***Engin Ardıç***'ın 2 yıl önce Hürriyet ve diğer gazetelerde yayınlanan bu haberden habersiz olması düşünülemez ama makalelerinden edindiğim izlenimime göre babasının sürgün hayatı yaşaması onu bu iflah olmaz kötü yola düşürdü!

O sırada 35. sayfaya kadar tüm çözüm yollarını tüketmiştim ve tam bırakacaktım ki aklıma 06.08.2006, 01:00'da "*4.2.2. Babillilerin Seçme Metodu*" geldi ve Tablo 13'teki Plimpton 322 no'lu tabletindeki dik üçgenlerin doğuranlarını bir önceki maddede verdiğim Babilli kâtibin doğuranları hesaplama yöntemi yerine tüm yönleriyle gösteren Tablo 15 ve 16 ile verdim ve devamında ***Muñoz***'un tezinin 9. sayfasındaki tablosundaki yani Tablo 17'deki doğuranları sıralı bir şekilde keşfettim!

5. Tabletteki Dik Üçgenlerin Bulunması Hakkında. Tablo 12'deki 15 dik üçgeni temsil eden $n = 1,2,\cdots,15$ için (a_n, h_n, r_n) sıralı üçlüleri Tablo 13'teki (p_n, q_n) doğuranlarına ve Şekil 5'teki $O_nH_nC_n$ dik üçgenindeki Pisagor bağıntısından elde edilen

$$[173] \quad (p_n - r_n, q_n, r_n) = \left(\frac{p_n^2 - q_n^2}{2p_n}, q_n, \frac{p_n^2 + q_n^2}{2p_n}\right)$$

sıralı üçlüsüne göre (ki $O_nH_nC_n$ dik üçgenindeki $(|O_nH_n|, |H_nC_n|, |O_nC_n|) = (p_n - r_n, q_n, r_n)$ sıralı üçlüsünde [78]'deki r_n yerlerine konursa p_n ve q_n'ye göre yukarıdaki sıralı üçlü elde edilmektedir ve bu sıralı üçlü ya da çözüm Geç Babilonya Dönemi'ne (MÖ 2. yy) ait BM 34568 no'lu tablette de kullanıldı. Bkz. "*The Plimpton 322 Tablet and Babylonian Method of Generating Pythagorean Triples*", S. 31, Şekil 8. Bu şekildeki problem eski Çin'deki "Kırık Bambu Problemi"ne karşılık gelir. Fakat bu problemin en eski şekli Menkaure Piramiti'nde kullanılmıştır. Bkz. "*Menkaure Piramiti'nin Batı Kesiti Görünüşündeki Planı*". Çünkü Menkaure piramitinin mimarı, Büyük Piramit'teki 75 RC'lik yükselen koridoru alttaki parçası yatay koridor üzerinde 13 RC olacak şekilde 2 parçaya bölerek azalan koridoru tasarlamıştır. Buna göre eğer "*Plimpton 322 no'lu tabletinde kullanılan Pisagor bağıntısı neydi?*" diye unutursanız aklınıza "Kırık Bambu Problemi" gelsin. Belki böyle daha iyi hatırlarsanız!

Bu arada ***Kim Dong-Keun (김 동 근)-Yoon Dae-Won (윤 대 원)*** adlı 2 Güney Koreli matematikçinin 2012 tarihli "*Pisagor Üçlüsünü Bulmak. Çeşitli Problem Çözme Yöntemlerini Keşfetmek*" makalelerinde Plimpton 322 no'lu tabletindeki Pisagor üçlüleri için 5 yöntemden 4.'sünde ***Hatch*** ve ***Mills***'in 2. dereceden denklemin çözümünün kullanılmasında [172]'yi vermiş olmaları dikkatimi çekti: "*4) 2. Dereceden Denklemin Çözümünü Kullanma. Pisagor sayıları x, y, z'yi gözlemleyerek ve y'nin ardışık tam sayılar olduğu, yani $y = x + 1$ olduğu durumlar vardır. Daha ileri bir genelleme olarak,* ***Hatch (1995)*** *ve* ***Mills (1996)*** *Pisagor sayılarını bulmak için bir algoritma sunmuşlardır (Aktaran* ***Dye & Nickalls, 1998****. Bkz. "Pisagor Üçlülerini Üretmek İçin Yeni Bir Algoritma"). Algoritmaları şöyledir: Önce $z = y + b$, sonra $x^2 + y^2 = (y + b)^2$ ve sonra $y = \frac{x^2 - b^2}{2b}$ olsun. O zaman 3 sayı $x, \frac{x^2-b^2}{2b}, \frac{x^2+b^2}{2b}$ olarak ifade edilebilir…*". Burada şuna dikkat etmek gerekiyor: ***Hatch***, ***Mills***, ***Dye*** ve ***Nickalls*** [172]'yi sadece Pisagor üçlülerini üretmek için kullanırlarken anılan 2 Koreli matematikçi bunu son ikisinden alıp Plimpton 322 no'lu tabletindeki Pisagor üçlülerine uygulamaya çalışırlar)

$$[174] \quad (a_n, h_n, r_n) = 2p_n(p_n - r_n, q_n, r_n) = (p_n^2 - q_n^2, 2p_nq_n, p_n^2 + q_n^2)$$

sıralı üçlüsünden elde edilmektedir. Fakat Babilli kâtip (a_n, h_n, r_n) sıralı üçlüsünü bulabilmek için bir önceki maddedeki hatalardan görüldüğü üzere $(p_n - r_n, q_n, r_n)$ sıralı üçlüsünün ilkin p_n ve sonra 2 katlarını alırken $p_n^2 - q_n^2$ ve $p_n^2 + q_n^2$ için [82]'deki 2 kare farkı ve toplamı özdeşliklerini kullanıyordu. Buna göre [172]'deki ikinci sıralı üçlüdeki bileşenleri teker teker birleşik (mürekkep) olarak hesaplarken (ki q_n birleşik değil tektir) p_n ve q_n'yi biliyor ve $(p_n^2 - q_n^2, 2p_nq_n, p_n^2 + q_n^2)$ sıralı üçlüsüne erişmeye çalışıyordu!

Şimdi tabletteki ya da Tablo 12'deki 2. ve 3. sütunlardaki sayıların nasıl hesaplandığını gösterebilmek için hemen bir örnek vereyim. Babilli kâtip ilk satırdaki ya da $(a_1, h_1, r_1) = (119{,}120{,}169)$ sıralı üçlüsünü şöyle hesaplar: Kâtip $(p_1, q_1) = (12{,}5)$ doğuranlarını [173]'teki bileşenlerdeki yerlerine koyar ve [82]'ye göre

$$(p_1 - r_1, q_1, r_1) = \left(\frac{p_1^2 - q_1^2}{2p_1}, q_n, \frac{p_1^2 + q_1^2}{2p_2}\right) = \left(\frac{12^2 - 5^2}{2 \times 12}, 5, \frac{12^2 + 5^2}{2.12}\right) = \left(\frac{(12-5)(12+5)}{2 \times 12}, 5, \frac{(12+5)^2 - 2 \times 12 \times 5}{2 \times 12}\right) = \left(\frac{7 \times 17}{24}, 5, \frac{17^2 - 120}{24}\right) = \left(\frac{119}{24}, 5, \frac{169}{24}\right)$$

sıralı üçlüsünü elde eder ve bu sıralı üçlüdeki 24'ün tersini alarak (ki 24'ün tersi $24^{-1} = 0;2{,}30$'dur)

$$\left(\frac{119}{24}, 5, \frac{169}{24}\right) = (119 \times 24^{-1}, 5{,}169 \times 24^{-1}) = (119 \times 0;2{,}30{,}5{,}169 \times 0;2{,}30{,}5) = (4;57{,}30{,}5{,}7;2{,}30)$$

işlemleri sonucunda

$$[175] \quad (p_1 - r_1, q_1, r_1) = (4;57{,}30{,}5{,}7;2{,}30)$$

bulur.

Şimdi kâtip bunun ilkin $p_1 = 12$ katını alıyor

$$p_1(p_1 - r_1, q_1, r_1) = 12(4;57{,}30{,}5{,}7;2{,}30) = (12 \times 4;57{,}30{,}12 \times 5{,}12 \times 7;2{,}30) = (59;30{,}60{,}1{,}24;30)$$

ve sonra bunun da 2 katını alıyor

$$(a_1, h_1, r_1) = (p_1^2 - q_1^2, 2p_1q_1, p_1^2 + q_1^2) = 2p_1(p_1 - r_1, q_1, r_1) = 2(59;30{,}60{,}1{,}24;30) = (2 \times 59;30{,}2 \times 60{,}2 \times 1{,}24;30) = (1{,}59{,}2{,}0{,}2{,}49)$$

eşitliklerinden ilk satırdaki dik üçgenin kenarlarının uzunluklarını

$$[176] \quad (a_1, h_1, r_1) = (1{,}59{,}2{,}0{,}2{,}49)$$

olarak buluyor. Buna göre ilk üçgenin tabanı $a_1 = 1{,}59 = 1 \times 60 + 59 = 119$, yüksekliği $h_1 = 2{,}0 = 2 \times 60 + 0 = 120$ ve hipotenüsü $r_1 = 2{,}49 = 2 \times 60 + 49 = 169$ olur.

Babilli kâtip Tablo 12'deki diğer dik üçgenlerin kenarlarının uzunluklarını 11. dik üçgene kadar bu şekilde buluyor. Çünkü 11. satırda mertlik bozuluyor ve [149]'dan görüldüğü üzere $m_{11} = \frac{p_{11}}{q_{11}} = 2$'dir. Bu orandan p_{11} ve q_{11}'i nasıl seçerseniz seçin (a_{11}, h_{11}, r_{11}) için mutlaka elle bir müdahalede bulunmanız gerekir. Çünkü 2 oranından elde edilen hiçbir $p_{11} = 2k$ ve $q_{11} = k$ tam sayılarıyla $(p_{11}^2 - q_{11}^2, 2p_{11}q_{11}, p_{11}^2 + q_{11}^2)$ sıralı üçlüsünden $(45{,}1{,}0{,}1{,}15)$ elde edilemez!

Bu durumda şu çözümler söz konusu olur.

1. Çözüm. Eğer $(p_{11}, q_{11}) = (2{,}1)$ doğuranlarını alırsanız

$$(p_{11} - r_{11}, q_{11}, r_{11}) = \left(\frac{p_{11}^2 - q_{11}^2}{2p_{11}}, q_n, \frac{p_{11}^2 + q_{11}^2}{2p_{11}}\right) = \left(\frac{2^2 - 1^2}{2 \times 2}, 1, \frac{2^2 + 1^2}{2 \times 2}\right) = \left(\frac{(2-1)(2+1)}{2 \times 2}, 1, \frac{(2+1)^2 - 2 \times 2 \times 1}{2.12}\right) = \left(\frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}\right) = (0;45{,}1{,}1;15)$$

ve bu son sıralı üçlüsünün $1{,}0 = 60$ katını alırsak 11. dik üçgenin kenarlarının uzunluklarını

$$[177] \quad (a_{11}, h_{11}, r_{11}) = (45{,}1{,}0{,}1{,}15)$$

şeklinde bulmuş oluruz. Tablo 12'deki 2. ve 3. sütunlardaki tam sayılara göre bu sıralı üçlü yazar görünür ama bu $(0;45{,}1{,}1;15)$ de olabilir!

2. Çözüm. Eğer Tablo 13'e göre $(p_{11}, q_{11}) = (60{,}30)$ doğuranlarını alırsanız [174]'e göre

$$(a_{11}, h_{11}, r_{11}) = (p_{11}^2 - q_{11}^2, 2p_{11}q_{11}, p_{11}^2 + q_{11}^2) = (60^2 - 30^2, 2 \times 60 \times 30, 60^2 + 30^2) = \big((60-30)(60+30), 1{,}0{,}0, (60+30)^2 - 2 \times 60 \times 30\big)$$
$$= (30 \times 1{,}30{,}1{,}0{,}0, 90^2 - 1{,}0{,}0) = (45{,}0{,}1{,}0{,}2{,}15{,}0 - 1{,}0{,}0) = (45{,}0{,}1{,}0{,}0{,}1{,}15{,}0)$$

ve bu son sıralı üçlüyü $1{,}0 = 60$'a bölersek 11. dik üçgenin kenarlarının uzunluklarını yine aynı şekilde buluruz:

$$[178] \quad (a_{11}, h_{11}, r_{11}) = (45{,}1{,}0{,}1{,}15).$$

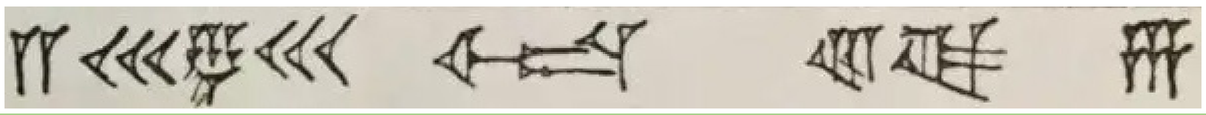
Burada ilk çözümü alıyoruz çünkü 2. çözüme göre daha avantajlıdır. Hem zaten tüm yorumcuların ittifak ettiği çözüm budur! Ayrıca eski Babil dönemine ait Tell Dhibayi tabletinde alanı 0;45 ve bir köşegeni 1;15 verilen dikdörtgenin kenarlarının uzunlukları $p_{11} - r_{11} = 0;45$ ve $q_{11} = 1$ olarak bulunmuştur (Bkz. "*Babil Matematiği'nde Pisagor Teoremi*").

Abdulrahman A. Abdulaziz tabletteki 11. satırdaki dik üçgen için şu bilgileri verir (Bkz. "*The Plimpton 322 Tablet and Babylonian Method of Generating Pythagorean Triples*", S. 15'in girişi): "*İki yöntem arasındaki farkı daha iyi anlamak için 11. ve 15. satırlara daha yakından bakalım. Satır 11 için* ***Price*** *$p = 1{,}00$ ve $q = 30$ aldı, böylece $2pq = 1{,}00{,}00$ oldu ve $(1{,}00{,}00{,}45{,}00{,}1{,}15{,}00)$ üçlüsünü verdi. Bu biraz yapmacık görünmektedir çünkü $p = 2$ ve $q = 1$ alındığında eşdeğer üçlü $(4{,}3{,}5)$ elde edilir. Öte yandan,* ***Bruins****'in yöntemi $x = 0;45$ ve $y = 1;15$ değerlerini verir (Bkz. "Plimpton 322 No'lu Tabletteki Pisagor Sayıları, 1949"). Bu iki sayı $\ell = 1$ ile birlikte iyi bilinen $(1{,}00{,}45{,}15)$ üçlüsünü oluşturduğundan, yazar indirgenmiş $(4{,}3{,}5)$ üçlüsünü elde etmek için sadeleştirme yapmakla uğraşmamıştır. Sadece bu vakaya dayanarak hangi yöntemin kullanıldığına karar vermek zor olsa da, yine de r-yönteminin neden indirgenmemiş üçlünün sonunda tablette görünen üçlü olduğunu daha iyi açıkladığını düşünüyoruz. Bu görüşü, indirgenmemiş üçlünün $(1{,}00{,}45{,}15)$ Tell Dhibayi'den [****Baqir****, 1974] başka bir OB (eski Babilonya) metninde bulunabileceği gerçeği ışığında benimsiyoruz. Metin şu problemi ortaya koymakta ve çözmektedir: Köşegeni 45 ve alanı 1,15 olan dikdörtgenin kenarlarını bulun. Problemin bizim durumumuzla ilgisi sadece hesaplanan kenarların ve köşegenin $(1{,}00{,}45{,}15)$ üçlüsünü oluşturması değil, daha da önemlisi çözüm algoritması ile r-yöntemi arasındaki açık benzerliktir [****Friberg****, 1981].*"

Şu hâlde Tablo 17'deki 12-16. dik üçgenler ya da bunlara karşılık gelen sıralı üçlüler yukarıda gösterdiğim 1. dik üçgenin sıralı üçlüsündeki gibi bulunur. 18-39. satırlardaki sıralı üçlüler

$$[179] \quad m_{39} < \cdots < m_{19} < m_{18} = \frac{p_{18}}{q_{18}} < m_{17} = \frac{p_{17}}{q_{17}} = \sqrt{3} < 1;45 = 1\frac{3}{4}$$

eşitsizliklerinden elde edilen eğimlerden, dolayısıyla doğuranlara göre bulunur. Burada $\sqrt{3}$'e bir yaklaşık olarak verilen 1;45 değeri için TMS'deki III. Metin'deki 1. Tablet'teki 27. satırda şöyle bir metin vardır (Bkz. "*E.M. Bruins et M. Rutten: Textes mathématiques de Suse, (Mémoires de la Mission archéologique en Iran. t. XXXIV), Ed. P.Geuthner, Paris-1961*"):



Şekil 10. SATIR 27: 2;37,30 igi-gub ša SAR (6-genin katsayısı 2;37,20), TEXTE III, Tablette I.

Bu metin TMS 34-Tablet 1-Metin 3'ün 27. satırındadır ve düzgün 6-genin katsayısı yani alanı 2;37,30 olarak verilmiştir. ***Neugebauer*** bu katsayı için şöyle der (Bkz. "*Babil ve Mısır II'si*", S. 5): "*Başka bir tablet düzgün 6-geni verir ve bundan $\sqrt{3} \cong 1;45$ yaklaşımı çıkarabilir*". Bu nedenle eğer düzgün 6-genin 6 eşkenar üçgene ayrıldığını ve bir eşkenar üçgenin bir kenarının uzunluğunu a birim alırsanız yukarıdaki metinden şu sonuç elde edilir:

$$[180] \quad A_6 = 6 \times \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \lesssim 2;37{,}30a^2\ br^2.$$

Burada $\sqrt{3}$ için

$$[181] \quad \sqrt{3} = \sqrt{2^2 - 1} \lesssim 2 - \frac{1}{2 \times 2} = 2 - \frac{1}{4} = 1\frac{3}{4} = 1;45$$

yaklaşıklılığı geçerli olduğundan düzgün 6-genin alanı yaklaşık olarak

$$[182] \quad A_6 = 6 \times \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \lesssim 6 \times \frac{1;45a^2}{4} = 6 \times 0;26{,}15a^2 = 2;37{,}30a^2\ br^2$$

olur.

Babilli Kâtibin Doğuranları Hesaplama Yöntemi. Şimdi Plimpton 322 no'lu tabletindeki 15 dik üçgeni doğuran yukarıdaki tablolama yönteminden farklı olarak Babilli kâtibin hesabına ya da yöntemine göre Tablo 17'deki 18. satırdaki dik üçgeni doğuranların nasıl hesaplandığını göstereceğim. Öncelikle [179]'dan elde edilen

$$[183]\quad m_{18}=\frac{p_{18}}{q_{18}}<\overline{m_{17}}=\sqrt{3}<1;45=\frac{7}{4}=m_{17}\Rightarrow p_{18}<\frac{7}{4}q_{18}$$

eşitsizliğindeki

$$[184]\quad q_{18}=(2,3,4,5,6,8,9,10,12,15,16,18,20,24,25,27,30,32,36,40,45,48,50,54)$$

düzgün sayılarına göre

$$p_{18}<\frac{7}{4}q_{18}=\left(3\frac{1}{2},5\frac{1}{4},7,8\frac{3}{4},10\frac{1}{2},14,15\frac{3}{4},17\frac{1}{2},21,26\frac{1}{4},28,31\frac{1}{2},35,42,43\frac{3}{4},47\frac{1}{4},52\frac{1}{2},56,63,70,78\frac{3}{4},84,87\frac{1}{2},94\frac{1}{2}\right)$$

eşitsizliklerinden

$$[185]\quad p_{18}=(3,5,6,8,10,12,15,16,20,25,27,30,32,40,40,45,50,54,60,64,75,81,81,90)$$

elde edilir. Burada [184]'teki her bir q_{18} düzgün sayısına karşılık $p_{18}<\frac{7}{4}q_{18}$ eşitsizliğini gerçekleyen $EBAS(p_{18})$ düzgün sayısı alınmıştır!

İkinci olarak 18. satırdaki dik üçgeni doğuranların oranı için [184] ve [185]'teki karşılıklı elemanları oranlarsak

$$[186]\quad m_{18}=\frac{p_{18}}{q_{18}}=\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{6}{4},\frac{8}{5},\frac{10}{6},\frac{12}{8},\frac{15}{9},\frac{16}{10},\frac{20}{12},\frac{25}{15},\frac{27}{16},\frac{30}{18},\frac{32}{20},\frac{40}{24},\frac{40}{25},\frac{45}{27},\frac{50}{30},\frac{54}{32},\frac{60}{36},\frac{64}{40},\frac{75}{45},\frac{81}{48},\frac{81}{50},\frac{90}{54}$$

oranları elde edilir ve bunları küçükten büyüğe doğru sıralarsak

$$[187]\quad \frac{3}{2}=\frac{6}{4}=\frac{12}{8}<\frac{8}{5}=\frac{16}{10}=\frac{32}{20}=\frac{40}{25}=\frac{64}{40}<\frac{81}{50}<\frac{5}{3}=\frac{10}{6}=\frac{15}{9}=\frac{20}{12}=\frac{25}{15}=\frac{30}{18}=\frac{40}{24}=\frac{45}{27}=\frac{50}{30}=\frac{60}{36}=\frac{75}{45}=\frac{90}{54}<\frac{27}{16}=\frac{54}{32}=\frac{81}{48}$$

eşitsizlikleri ortaya çıkar.

Fakat m_{18} bu oranların EBAS'ı olduğundan

$$[188]\quad m_{18}=\frac{p_{18}}{q_{18}}=\frac{27}{16}$$

oranı, dolayısıyla doğuranlar şu şekilde elde edilmiş olur:

$$[189]\quad p_{18}=27, q_{18}=16.$$

Bu, Tablo 17'deki 18. satırdaki doğuranlardır ve [187]'deki $\frac{8}{5}<\frac{81}{50}<\frac{5}{3}<\frac{27}{16}$ oranları 18-21. satırlardaki doğuranların oranları olmasına rağmen bu işlem her oran için tekrar edilir, çünkü 20. satırdaki doğuranların oranı olan $\frac{25}{16}$ [187]'de mevcut değildir!

Buna göre Babilli kâtip bir sonraki doğuranların oranı için

$$[190]\quad m_{19}=\frac{p_{19}}{q_{19}}<m_{18}=1;41,15=\frac{27}{16}\Rightarrow p_{19}<\frac{27}{16}q_{19}$$

eşitsizliğindeki

$$[191]\quad q_{19}=(2,3,4,5,6,8,9,10,12,15,16,18,20,24,25,27,30,32,36,40,45,48,50,54)$$

düzgün sayılarına göre

$$p_{19}<\frac{27}{16}q_{19}=\left(3\frac{3}{8},5\frac{1}{16},6\frac{3}{4},8\frac{7}{16},10\frac{1}{8},13\frac{1}{2},15\frac{3}{16},16\frac{7}{8},20\frac{1}{4},25\frac{5}{16},27,30\frac{3}{8},33\frac{3}{4},40\frac{1}{2},42\frac{3}{16},45\frac{9}{16},50\frac{5}{8},54,60\frac{3}{4},67\frac{1}{2},75\frac{15}{16},81,84\frac{3}{8},91\frac{1}{8}\right)$$

eşitsizliklerinden

$$[192]\quad p_{19}=(3,5,6,8,10,12,15,16,20,25,25,30,32,40,40,45,50,50,60,64,75,80,81,90)$$

elde eder. Burada [191]'deki her bir q_{19} düzgün sayısına karşılık $p_{19}<\frac{27}{16}q_{19}$ eşitsizliğini gerçekleyen $EBAS(p_{19})$ düzgün sayısı alınmıştır!

İkinci olarak 19. satırdaki dik üçgeni doğuranların oranı için [191] ve [192]'deki karşılıklı elemanları oranlarsak

$$[193]\quad m_{19}=\frac{p_{19}}{q_{19}}=\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{6}{4},\frac{8}{5},\frac{10}{6},\frac{12}{8},\frac{15}{9},\frac{16}{10},\frac{20}{12},\frac{25}{15},\frac{25}{16},\frac{30}{18},\frac{32}{20},\frac{40}{24},\frac{40}{25},\frac{45}{27},\frac{50}{30},\frac{50}{32},\frac{60}{36},\frac{64}{40},\frac{75}{45},\frac{80}{48},\frac{81}{50},\frac{90}{54}$$

oranları elde edilir ve bunları küçükten büyüğe doğru sıralarsak

$$[194]\quad \frac{3}{2}=\frac{6}{4}=\frac{12}{8}<\frac{25}{16}=\frac{50}{32}<\frac{8}{5}=\frac{16}{10}=\frac{32}{20}=\frac{40}{25}=\frac{64}{40}<\frac{81}{50}<\frac{5}{3}=\frac{10}{6}=\frac{15}{9}=\frac{20}{12}=\frac{25}{15}=\frac{30}{18}=\frac{40}{24}=\frac{45}{27}=\frac{50}{30}=\frac{60}{36}=\frac{75}{45}=\frac{80}{48}=\frac{90}{54}$$

eşitsizlikleri ortaya çıkar.

Fakat m_{19} bu oranların EBAS'ı olduğundan

$$[195]\quad m_{19}=\frac{p_{19}}{q_{19}}=\frac{5}{3}$$

oranı, dolayısıyla doğuranlar şu şekilde elde edilmiş olur:

$$[196]\quad p_{19}=5, q_{19}=3.$$

Bu, Tablo 17'deki 19. satırdaki doğuranlardır ve [194]'teki $\frac{3}{2}<\frac{25}{16}<\frac{8}{5}<\frac{81}{50}<\frac{5}{3}$ oranları 19-23. satırlardaki doğuranların oranlarıdır ve bunlar sıralı olmasına rağmen yine bu işlem her oran için tekrar edilmelidir!

Şimdi Tablo 17'deki 17. satırdaki dik üçgenin doğrularının oranından 18. ve 19. satırlardaki dik üçgenlerin doğuranların oranlarının nasıl elde edildiğini Tablo 15 ve 16'daki gibi değil Babilli kâtibin hesabına göre gösterdim ve aynı şekilde 20-39. satırlardaki doğuranların oranları elde edilebilir. Bu doğuranlardan 3-5. sütunlardaki dik üçgenlere ait $n=20,21,\cdots,39$ için $(a_n,h_n,r_n)=(p_n^2-q_n^2, 2p_nq_n, p_n^2+q_n^2)$ sıralı üçlülerin nasıl elde edildiklerini yukarıda gösterdim. Ancak Babilli kâtip tablete Tablo 17'deki 38 (ki gerçekte 40) dik üçgenden yalnızca ilk 15 tanesini yazdı. Eğer tabletin arkasını da kullanmış olsaydı bu 38 dik üçgenin tamamını yazabilirdi!

6. *Neugebauer*'in Tahminleri ve Sonuçları. Tabletteki sütunlar (a_n,h_n,r_n) dik üçgenlerine göre oluşturulurken Babillilerin [79]&[80]'deki hem m_n tek parametreli çözümü hem de p_n ve q_n çifte parametreli çözümü bildikleri anlaşılmaktadır. Burada önemli olan tabletin 4. sütunundaki sayıların 60 tabanında sonlu olarak yazılabilmesiydi ki bu da (a_n,h_n,r_n) dik üçgenlerine ait p_n ve q_n doğuranlarının düzgün sayılar olarak seçilmesiyle yerine getirilmiştir. Buna göre ***Neugebauer*** ve ***Sachs***'ın p_n ve q_n sayıları düzgün olmak üzere $m_n=p_nq_n^{-1}$ ve $m_n^{-1}=p_n^{-1}q_n$ tersinin hesaplanmış olmaları gerektiğine ilişkin tahminlerinin 61 yıl (1945-2006) sonra doğru çıktığını görüyoruz. O hâlde [86], [87] ve [102]'deki m_n ve m_n^{-1} oranlarından bazılarının "*Standart Ters Sayılar Cetvelleri*"ne uygun düşmesi bir benzerliği, dolayısıyla bu benzerlik de bir yanılgıyı gösterir. Çünkü m_n ve m_n^{-1} oranları bir puzzle oyunu sonucunda değil, gerçekten p_n ve q_n'ler ayrı ayrı hesaplanarak bulunmuşlardır!

Resim 9. ***Otto Neugebauer (1899-1990)***, 1945 (ki orijinali şuradadır).

Bu sonuçla birlikte ***Neugebauer***'in şu son sözlerine de bir bakalım.

*"e. Tarihsel Sonuçlar. MKT III'te Babil matematiğinin karakteri hakkında yer alan son matematik açıklamaları şu cümleyi içermektedir: 'Bu nedenle, bir tür daha temel sayılar teorisinin tanınabilir hale gelmesi beklenebilir - öyle bir şey ki, eski tarihsel okulun **Pisagor**u **Babilli** olarak adlandırılabilir (Man wird also erwarten können, dass noch eine Art elementarer Zahlentheorie erkennbar wird -etwa so, dass **pythagoreisch** der älteren historischen Schule besser **babylonisch** wird heissen dürfen)' Bu, burada tartışılan metin tarafından tamamen doğrulanmaktadır. Artık elimizde, zaten iyi bilinen diğer problemlerden organik olarak geliştirilen problemleri ele alan ve tam da Babil sayısal yöntemleri için karakteristik olan araçları kullanarak çözülen, tamamen sayı teorisi karakterli bir metin var.*

Şimdi Babil sayılar teorisinin Pisagor sayılarını üretmek için (2) gibi kurallarla, yani 'Elemanlar: 10. Kitap, Önerme 29, Lemma 1' gibi bir teoremle tanışık olduğunu görüyoruz.

Pisagor sayılarının Babil matematiğinin bu bölümü tarafından ele alınan tek problem olarak kalmadığına dair çok az şüphe olabilir. Günümüze ulaşan malzemenin kendisinden bu yönde açık bir ipucuna sahibiz: $c=9,16,1,40$ ve 3,45 tabanlarının $n=1,2,\cdots,10$ üsleri için c^n'yi veren tablolar var. Tüm bunlar düzgün sayılardır ve yukarıda açıklandığı gibi hem problemleri hem de yöntemleri diğer sayıların ve farklı üslerin kombinasyonlarına genişletmek doğal olacaktır. $\sum n, \sum n^2$ vb. karelerin incelenmesi de aynı yönde ilerlemektedir. Ayrıntılar ancak yeni metinlerin keşfedilmesiyle ortaya çıkarılabilir, ancak genel yönleri açık görünmektedir.

Özetle, metnimiz Eski Babil matematiğinin farklı bölümlerini, sayıların kendi temel yasalarının araştırılmasıyla birbirine bağlayan son halkayı vermektedir."

Fakat bu açıklamalara göre ***Neugebauer***'in *"daha temel bir sayılar teorisi"* beklentisi doğru çıkmadı ve *"Babil sayılar teorisinin Pisagor üçlülerini üretmek için (2) gibi kurallarla **Öklit**'in Lemma 1 gibi tanışık olduğunu görüyoruz"* demesi ise anlaşılır gibi değildir, çünkü tablette tam da bu yapılıyordu!

Neugebauer 24 yıl sonra şu kritiği yapar (Bkz. "*Otto Neugebauer: The Exact Sciences in Antiquity (1951,1957,1969), 2nd ed./Princeton, NJ: Brown University Press; reprint ed./New York: Dover, 1969*", S. 36):

*"20. Karenin köşegeninin kenarından belirlenmesine ilişkin yukarıdaki örnek, Pisagor Teoremi'nin **Pisagor**'dan 1000 yıldan fazla bir süre önce bilindiğinin yeterli kanıtıdır. Bu teoremin aynı çağa ve Selevkoslar dönemine ait problem metinlerinde kullanıldığına dair pek çok başka örnek de bunu doğrulamaktadır. Başka bir deyişle, bir dik üçgenin kenar uzunluklarının karelerinin toplamının hipotenüs uzunluğunun karesine eşit olduğu Babil matematiği boyunca bilinmekteydi. Bu geometrik gerçek bir kez keşfedildikten sonra, $\ell^2+b^2=d^2$ bağıntısını sağlayan tüm ℓ, b ve d sayı üçlülerinin bir dik üçgenin kenarları olarak kullanılabileceğini varsaymak oldukça doğaldır. Ayrıca şu soruyu sormak da normal bir adımdır: ℓ, b, d sayıları yukarıdaki bağıntıyı ne zaman sağlar? Sonuç olarak, Babilli matematikçileri 'Pisagor sayıları' üretmeye yönelik sayı teorisi problemini araştırırken bulmamız çok şaşırtıcı değildir. Pisagor teoreminin 3, 4 ve 5'in Pisagor bağıntısını karşıladığının keşfedilmesinden kaynaklandığı sıklıkla öne sürülmüştür. Bu kenarlarla üçgenler oluşturma ve bunların dik üçgen olup olmadıklarını araştırma fikrine yol açacak hiçbir neden göremiyorum. Aritmetik ya da cebrik ilişkilerin geometrik bir temsilinin mümkün olduğunu hemen düşünmemiz, yalnızca matematiğe Yunan yaklaşımındaki eğitimimize dayanmaktadır.*

Geometrik teoremin keşfinin doğal olarak ilgili aritmetik problemine yol açtığını söylemek, ikinci problemin gerçekten çözüldüğünü beklemekten çok farklıdır. Bu nedenle, Eski Babil döneminde bu probleme ilişkin geniş kapsamlı bir kavrayışa ulaşıldığını açıkça gösteren bir metne sahip olmamız büyük bir tarihsel ilgi çekicidir. Söz konusu metin New York'taki Columbia Üniversitesi'nin Plimpton Koleksiyonu'na aittir…"

Neugebauer yukarıda kırmızıyla vurguladığım yerde özetle, "$(3,4,5)$ *üçlüsünün Pisagor bağıntısına neden olabilecek hiçbir neden göremiyorum ve bu düşünce Yunan eğitim sisteminden geliyordu!*" diyor ama Testo 5.6'daki Not 5.6.13'te $(3,4,5)$ üçlüsünün kısa bir tarihçesini anlatırken Khafre Piramiti'nin $k(3\ RC, 4\ RC, 5\ RC)$ ve hemen ardından Stonehenge'in $8(5\ MY, 12\ MY, 13\ MY)$ üçlülerine göre inşa edilmiş olduklarını ortaya koyduktan sonra sonuç olarak bu sıralı üçlülerin mimarlıktan matematiğe geçtiklerini ve I. Babil Hanedanlığı'nda bu sıralı üçlüleri veren Pisagor Teoremi'nin matematiksel olarak esaslı bir şekilde incelendiğini belirtmiştim (Bkz. Testo 5.6, S. 57-65). Bu sonuçla birlikte ***Neugebauer***'in ***Thales*** ve ***Sokrates*** öncesi matematikçileri atlayıp, geometriyi ***Ödoksus*** ve ***Theaetetus*** ile başlatması bu değerlendirmeyi eksik bilgilere göre yaptığını açıklar bize. Aynı şekilde, Orta Çağ yazarı ***Proklus***, ***Thales***'in, bilgilerini Mısır'dan aldığına inanmış ve matematik tarihini ***Thales*** ile başlatmıştır. ***Plutarkhos, Vitruvius*** ve yine ***Proklus*** ise Pisagor Teoremi'ni ve "alan uygulaması" metodunu ***Pisagor***'un kendi şahsî keşfi sanmışlardır. Oysa ***Thureau-Dangin***, ***Taha Baqir***, ***Bruins***, ***Van der Waerden*** gibi dönemin bazı yazarları Mezopotamya ilmini olağanüstü önemde saymaktadırlar (Bkz. "*Mezopotamya'da Geometri*").

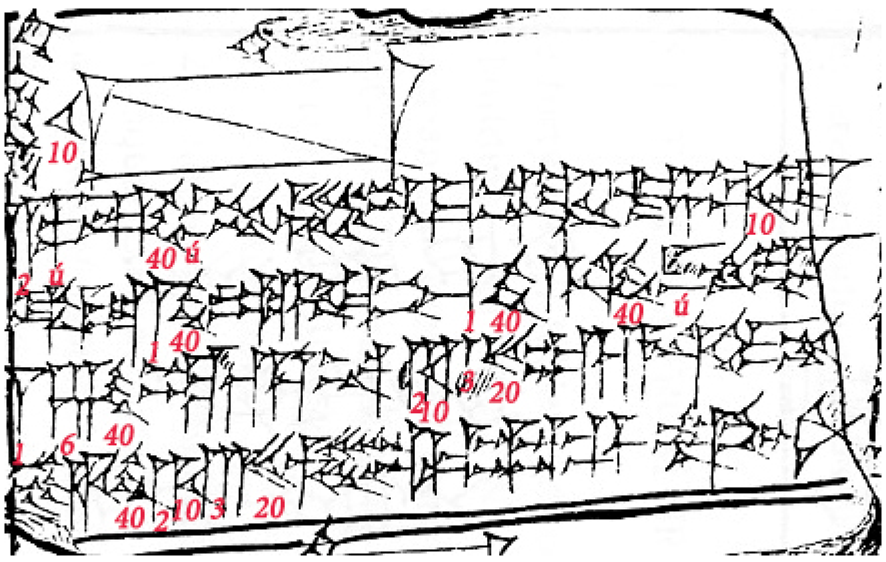
Şimdi ***Neugebauer***'in yanıldığını gösterebilmek için eski Babil dönemine ait Sippar'da keşfedilen BM 85194 no'lu tableti örnek olarak vermem yeterlidir (Bkz. "*YBC 7289 No'lu Tablet*", S. 3, Resim 1.1.4). Bu tabletteki 21. (ve 22.) problemde çapı 20 Nindan ve çembere en kısa uzaklığı 2 Nindan olan kirişin uzunluğu sorulmaktadır. ***Jens Høyrup*** bu kirişin uzunluğunu çapı gören çevre açının dik olmasından hareketle (ki bu bilgi ***Thales***'in 2. Teoremi olarak biliniyordu) dik üçgendeki Pisagor bağıntısına göre 12 Nindan olarak gösterir (Bkz. "*Pisagor Kuralı ve Teoremi: Babil ve Yunan Matematiği Arasındaki İlişkinin Aynası*", S. 397). Eğer Babillilerin bir dik üçgeni inşa etmeden haberi yoksa bu problemi nasıl çözdüler peki? Bu dik üçgen $(12,16,20)$'dir ve onun bir dik olduğu çember içinde gösterilerek gayet iyi bilinmektedir. Çünkü Babilli matematikçinin kirişin uzunluğunu bulabilmesi için onun bir dik üçgen olduğunu göstermesi gerekiyordu. Oysa ***Neugebauer*** hemen yukarıda kırmızı renkle vurguladığım yerde "*Babil matematiğinde Pisagor üçlüleriyle üretilen üçgenlerin dik üçgen olup olmadıklarını araştırma fikrine yol açacak hiçbir neden göremiyorum. Aritmetik ya da cebrik ilişkilerin geometrik bir temsilinin mümkün olduğunu hemen düşünmemiz, yalnızca matematiğe Yunan yaklaşımındaki eğitimimize dayanmaktadır.*" demiş ve BM 85194 no'lu tableti 1935'te MKT I'de incelemişti (Bkz. "*Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences*", S. 298-299. BM 85194 no'lu tabletindeki 21. problemin çizimi ve metni 295. sayfadadır. Ayrıca BM 85194 no'lu tabletindeki 21-22. problemlerine benzer problemler MS 3049 no'lu tabletinde de mevcuttur. Bkz. S. 307).

YBC 7289 No'lu Tablette Düzgün Olmayan Sayılar İçin Yaklaşık Değerlerin Kullanılması Hakkında

Neugebauer'in bir diğer eksiği şudur: ***Neugebauer*** 42-43. sayfalarda YBC 7289 no'lu tabletinde $\sqrt{2}$ için verilen 1;24,51,10 yaklaşıklığını AGM'e (Aritmetik-Geometrik Ortalamalar Metodu) göre incelerken bu metodun kullanıldığına ilişkin bir tabletin olmadığını söylerken diğer taraftan $\sqrt{40^2+10^2}=\sqrt{28{,}20}$ değerini bulmak için başka bir tablette onaylanmış olması gerektiğine dair bir kıtır atar ortaya (Bkz. "*YBC 7289 No'lu Tablet*", S. 39-40). Bu kıtır dediğim şeyi burada açıklamak çok zaman alır çünkü birbirine bağlı 4 problem var ve bunları tüm yönleriyle ele almak epey yer işgal eder. Ama yine de kısaca verebilirim.

BM 96957 ve VAT 6598 No'lu Tabletlerdeki $\sqrt{28,20}$'ye Rasyonel Yaklaşıklıklar

Friberg'in BM 96957 ve VAT 6598 no'lu tabletlerdeki 5-a, b, c ve 6-a problemlerindeki çeviri ve çözümlerine göre öğrenci hem birim çevirme hatası hem de (1.1.3)'teki algoritmanın kullanımında hata yapmıştır (Bkz. "*A Remarkable Collection of Babylonian Mathematical Texts*", S. 304-307). Şöyle ki, aynı dik üçgendeki bu 4 problemde (1.1.3)'e göre $d=\sqrt{h^2+w^2}\lesssim h+\frac{w^2}{2h}$ yaklaşımında kapının genişliği $w=2\ Ku\check{s}$ verilirken $w^2=(2\ Ku\check{s})^2=\left(\frac{2}{12}\ Nindan\right)^2=\frac{1}{36}\ Nindan^2=0;1{,}40\ \check{S}ar$ alınmaktadır ama kapı yüksekliği $h=40\ Ku\check{s}$ değil $h=0;40\ Nindan$'dır. ***Neugebauer***'in okuması ve çözümüne göre öğrencinin ilk hatası budur (Bkz. "*YBC 7289 No'lu Tablet*", S. 13-14, 1.3.2.1. VAT 6598 No'lu Tablet). Yani kapının yüksekliği $40\ Ku\check{s}$ değil $0;40\ Nindan$ olacaktı. Çünkü $\frac{w^2}{h}=\frac{0;1{,}40\ \check{S}ar}{0;40\ Nindan}=0;2{,}30\ Nindan$ ve bunun yarısının alınmasıyla $\frac{w^2}{2h}=\frac{0;2{,}30}{2}\ Nindan=0;1{,}15\ Nindan$ elde edilmekte ve bu kapının yüksekliğine eklendiğinde $h+\frac{w^2}{2h}=0;40\ Nindan+0;1{,}15\ Nindan=0;41{,}15\ Nindan$ sonucu çıkmaktadır. İkinci olarak öğrenci 6-a probleminde w^2'yi $2h$'ye bölecekken çarpmış ve $2hw^2=2\times 0;40\times 0;1{,}40=0;2{,}13{,}20$ bulmuş ve bunu kapının yüksekliğine ekleyerek $h+2hw^2=0;40+0;2{,}13{,}20=0;42{,}13{,}20$ sonucunu elde etmiştir. Bu da öğrencinin ikinci hatasıdır ve bu hata öğrencinin algoritmayı yanlış kullanmasından, dolayısıyla bu algoritmayı tam olarak hatırlayamadığından, büyük bir ihtimalle $0;42{,}13{,}20\ Nindan\gtrsim\frac{12}{\sqrt{2}}=6\sqrt{2}\ Ku\check{s}$ yaklaşımını yapmasından yani dikdörtgene kareyle yaklaşmasından kaynaklandı!



Şekil 11. VAT 6598 no'lu tabletindeki Problem 6-a'daki sayılar ve uzunluk ölçüsü birimi. ***Ernst F. Weidner*** ve ***H. Zimmern***'in 1916'daki okumalarına göre ilk satırda "2 ú" ve "40 ú" yazar ama "ú" ile gösterilen uzunluk ölçüsü biriminin ne olduğu bilinmez (Bkz. "*Die Berechnung rechtwinkliger Dreiecke bei den Akkadern um 2000 (Akadlar'da 2000 Yılı Civarında Dik Üçgenlerin Hesaplanması)*", S. 2589-259. ***Zimmern***, aynı yıl yayımladığı 320-325. sayfalardaki "*Zu den altaakkadischen geometrischen Berechnungsaufgaben*" adlı makalesinde ***Weidner***'ın VAT 6598 no'lu tablet okumasını doğrular. Fakat "ú" ile gösterilen uzunluk ölçüsü birimi yine tanımlı değildir. Bkz. "*Eski Mezopotamya Ölçü Birimleri*"). Onlar bunları "2 Ellen (?) Seite (?) (2 Kübit genişlik)" ve "40 Ellen Tiefe (?) (40 Kübit derinlik)" olarak çeviriler!

Weidner 5-a probleminde $d = \sqrt{h^2 + w^2} \lesssim h + \frac{w^2}{2h}$ doğru yaklaşımını kullanırken yukarıdaki şekilde verilen 6-a probleminde $d = \sqrt{h^2 + w^2} \lesssim h + \frac{2h.w^2}{3600}$ yaklaşımını kullanır (Bkz. S. 260-261. Burada ***Neugebauer***'in çözümüne göre a yerine h ve b yerine w kullanılmıştır). ***Neugebauer*** ise yukarıdaki çizimde dikdörtgenle gösterilen kapının boyutlarını ilkin "*Über Vorgerische Mathematik*" adlı el yazmasının 6-9 Mart 1934 tarihli 8-9. sayfasında "0;10" ve "0;40" ve sonra "*Mathematische Keilschrift-Texte I (MKT I), 1935*"deki 277-282. sayfalarında zorunlu olarak "10" ve "40" olarak okur (ki ***Jöran Friberg*** BM 96957 no'lu tabletin desteğinde VAT 6598 no'lu tabletteki problemleri okuyarak ***Neugebauer***'in ilk okumasına sadık kalır. Bkz. "*A Remarkable Collection of Babylonian Mathematical Texts*", S. 304-307. ***Jens Høyrup*** bu okumayı esas alır. Bkz. "*Pythagorean Rule and Theorem*", S. 397-399). Şaşırtıcı olan şey, 8. sayfanın sonunda 1)'de yani 5-a probleminde $d = \sqrt{h^2 + w^2} \lesssim h + \frac{w^2}{2h}$ yaklaşımını yaparken 9. sayfanın başındaki 2)'de yani 6-a probleminde $d = \sqrt{h^2 + w^2} \lesssim h + \frac{2h.w^2}{3600}$ yaklaşımını yapması ve bunu açıklamaya çalışmasıdır. Çünkü 2)'nin hemen altında bu yaklaşımı açıklamaya çalışmış ve ben de onun bu yaklaşımından hareketle 14. sayfadaki "2. Problem 6-a'nın Orijinal Çözümü"nü yaptım. Ama şimdi görüyorum ki, 6-a problemini yazan öğrenci hem birimde hem de yaklaşım algoritmasında hata yapmıştır!

İşte ***Neugebauer*** 11 yıl sonra YBC 7289 no'lu tabletin çözümünde bunu dile getiriyordu ve Babillilerin kareköklü bir sayıya yaklaşımda 2 farklı algoritma kullanmış olduğunu zannederek $\sqrt{40^2 + 10^2} = \sqrt{28{,}20}$ değerini bulmak için başka bir tablette onaylanmış olması gerektiğini söylüyordu ama "*Matematiksel Çivi Yazıtları (Mathematical Cuneiform Texts), New Heaven, Conn., 1945*" kitabının 42-43. sayfalarında ya da "*YBC 7289 No'lu Tablet*" makalemin 39-40. sayfalarında YBC 7289 no'lu tabletin çözümünü yaparken $\beta_2 = \frac{2}{1;25}$ yaklaşıklığındaki 1;25'in tersinden hiç söz etmedi. Çünkü 2008'de ***Neugebauer***'in çözümünden hareketle "*1.4. YBC 7289 No'lu Tabletin İlk Çözümü*"nü yaparken elimde sadece ***John N. Crossley***'in "*The Emergence of Number*" adlı kitabının 122. ve 123. (I ve II) sayfaları vardı ve ben anılan kitabın dijital baskısı olmadığı için 16. sayfasındaki YBC 10529 no'lu tabletten yani Tablo 1.4.2'den habersiz yapmıştım, ancak son anda bir akıllılık edip Bulgu 3 ile bunu aşmayı başardım. O sırada incelediğim tüm kaynaklarda eski Babillilerin düzgün olmayan bir sayının tersini alamadıkları söyleniyordu. Yani ***Neugebauer*** α_2 ve β_2'nin altında *"Burada yukarıda anılan $\sqrt{2} \approx 1;25$ değerine ulaştık"* derken devamında *"1;25'in tersi vardır. Bkz. S. 16, YBC 10529"* deseydi bizi büyük bir sıkıntıdan kurtarmış olurdu. Burada ilginç olan şey şu ki, YBC 10529 no'lu tabletteki sayıları Tablo 1.4.2'de verirken Dr. ***Daniel Mansfield***'in "*Mesopotamian square root approximation by a sequence of rectangles*" makalesinin 181. sayfasındaki Tablo 3'üyle aynı vermişim ve ikimiz de 2023'te yayınlamışız ama ben makalemi 03.02.2023'te ve o da 02.09.2023'te verdiğine göre demek ki o pişti olmuş!

7. Dik Üçgendeki Metrik Bağıntının Antik Greklerde Görülmesi. [76] denkleminin ilk çözümü olan $\left(\frac{a_n}{h_n}, 1, \frac{r_n}{h_n}\right) = \left(\frac{m_n - m_n^{-1}}{2}, 1, \frac{m_n + m_n^{-1}}{2}\right)$ sıralı üçlüsünün m_n ile çarpımından bulunan $\left(\frac{m_n^2 - 1}{2}, m_n, \frac{m_n^2 + 1}{2}\right)$ ikinci çözümü m_n tek tam sayı ise ***Pisagor***'a atfedilir (Bkz. ***Proklus***, ***Öklit*** Şerhi, S. 427, Friedlein Çevirisi, S. 464, "*İskenderiyeli Diofant; Yunan Cebir Tarihi Üzerine Bir Çalışma*", S. 116). Eğer ikinci çözümde $m_n = 3$ özel değeri alınırsa $(3{,}4{,}5)$ Kutsal üçgeni elde edilir ki, bu, ***Vitruvius***'a göre ***Pisagor*** tarafından keşfedilmiştir.

Oysa gerçekte bu bilgilerin doğru olmadığını görüyoruz. Çünkü ilkin ***Pisagor***'a atfedilen çözümün Babil kaynaklı olduğu açıktır. Örneğin ***Pisagor***'a atfedilen bu ikinci çözümün yukarıda Susa tabletinden ve özellikle YBC 6967 no'lu tabletinden elde edilebildiğini açık bir şekilde gördük. Ayrıca ***Vitruvius***'a göre ***Pisagor*** tarafından keşfedildiği söylenen $(3{,}4{,}5)$ geçiş üçgeni başta Plimpton 322 no'lu tableti olmak üzere birçok eski Babil tabletinde mevcuttur (Bkz. "*Si.427 no'lu tablet*"). Hatta eski Mısır'da bile! Örneğin ***Khafre***'nin piramiti buna göre yapılmıştır (Bkz. Testo 5.6, Not 5.6.13).

Khafre Piramiti $k(3,4,5)$ Dik Üçgenine Göre İnşa Edildi!

Petrie Khafre Piramidi'nin eğim açısını 1883'te 53°10'±4' verirken 1940'ta $(a_3, h_3, r_3) = (3k, 4k, 5k)$ olduğunu kabul ederek 53°07'48" vermek zorunda kaldı. Bu eğim açısını kabul etmesi 1940'ta, ölümünden 2 yıl önce, "*128 Çizimle Mısır Bilgeliği*" adlı kitabında RMP'deki "seked" konusunu öğrendikten sonra oldu (Bkz. "*Babil ve Mısır II'si*"). Dolayısıyla ***Pisagor***'un keşifleri olduğu söylenen bu bilgiler kendisini bağlar. Bununla birlikte ***Öklit*** (M.Ö. 365-300) "*Elemanlar: 10. Kitap, Önerme 29, Lemma 1*"de Şekil 5'teki Susa tabletinde $O_nH_nC_n$ dik üçgeninin kenar uzunlukları olarak bulunan $(p_n - r_n, q_n, r_n) = \left(\frac{p_n^2 - q_n^2}{2p_n}, q_n, \frac{p_n^2 + q_n^2}{2p_n}\right)$ sıralı üçlüsünün p_n katı olan $\left(\frac{p_n^2 - q_n^2}{2}, p_n q_n, \frac{p_n^2 + q_n^2}{2}\right)$ çözümünü vermiş ve matematik tarihine bu formülleri ilk yayınlanan matematikçi olarak geçmişti ama bu da doğru değildi!

Ölümcül Hata!

Ancak Plimpton 322 no'lu tabletindeki 15. satırdaki bir hata bütün bu olaylar zincirinin çözülmesine neden oldu. Çünkü 15. satırdaki dik üçgenin genişliği 56 olarak doğru yazılırken hipotenüsünün 53 olarak yanlış yazılmış olması Babilli kâtibin Pisagor bağıntısını kullanırken kritik bir hata yaptığını gösterir.

Bu kritik hatayı aşağıdaki bulgumda şöyle açıklayabilirim.

Bulgu 2. Tablo 12'deki 15. Satır-2. Sütun'da hipotenüs uzunluğunun "**53**" olarak yanlış yazılması Babilli kâtibin Susa tabletindeki çözüme göre [58] ya da [81]'deki p_n ve q_n çifte parametreli çözüme birden geçmediğini gösterir. Kâtip Şekil 5'teki Susa tabletine göre $(p_{15} - r_{15}, q_{15}, r_{15}) = \left(\frac{p_{15}^2 - q_{15}^2}{2p_{15}}, q_{15}, \frac{p_{15}^2 + q_{15}^2}{2p_{15}}\right) = \left(\frac{9^2 - 5^2}{2.9}, 5, \frac{9^2 + 5^2}{2.9}\right) = (3;6{,}40{,}5;0{,}5{:}\,53{,}20)$ sıralı üçlüsünü ilkin $p_{15} = 9$ ile çarpıp $\left(\frac{p_{15}^2 - q_{15}^2}{2}, p_{15}q_{15}, \frac{p_{15}^2 + q_{15}^2}{2}\right) = 9.(3;6{,}40{,}5;0{,}5{:}\,53{,}20) = (28{,}45{,}53)$ buluyor ve sonra bunun 2 katını alarak $(a_{15}, h_{15}, r_{15}) = (p_{15}^2 - q_{15}^2, 2p_{15}q_{15}, p_{15}^2 + q_{15}^2) = 2.(28{,}45{,}53) = (56{,}1;30{,}1;46)$ elde ediyor (Bkz. "*Plimpton 322 No'lu Tabletteki Pisagor Sayıları, 1949*", ***E.M. Bruins*** 630. (PDF'de 2.) sayfadaki tablodaki son satırda $(28{,}45{,}53)$ sıralı üçlüsünü alır ama bu doğru değildir). Fakat kâtip bu sayıları tablete kazırken 56'yı doğru yazarken 1;46 yerine unutkanlıkla 53'ü yazar. Bu sonuç kâtip için "basit hata"yı ama diğerleri için "ölümcül hata"yı gösterir!

Kâtip bu hesapları yaparken ${p_n}^2 - {q_n}^2$ için

$$[197] \quad {p_n}^2 - {q_n}^2 = (p_n - q_n)(p_n + q_n)$$

(ki bu özdeşlik 10. Sınıf matematik ders kitabındaki Ünite 3: Polinomlar'daki Çarpanlara Ayırma Yöntemleri'nde 2) İki Kare Farkı Özdeşliği olarak geçer. Bu özdeşliğin ilk verildiği yer 8. Sınıf matematik ders kitabındaki Ünite 3: Cebirsel İfadeler ve Özdeşlikler'deki İki Terimin Farkının Karesi Özdeşliği'dir. Bkz. S. 146) ve ${p_n}^2 + {q_n}^2$ için

$$[198] \quad {p_n}^2 + {q_n}^2 = \begin{cases} (p_n - q_n)^2 + 2p_n q_n, \\ (p_n + q_n)^2 - 2p_n q_n \end{cases}$$

özdeşliklerini kullanır. Bu özdeşliklerin her ikisi birden IM 67118 ve bir kopyası olan VAT 3971 no'lu tabletlerde kullanılmıştır (Bkz. "*A Remarkable Collection of Babylonian Mathematical Texts*", S. 251-252. Bu özdeşliklerin elde edilmesinde kullanılan şekil, 8. Maddedeki Çinlilerin (3,4,5) üçgenini elde etmede kullandıkları kare içindeki kare şeklidir. Bkz. "*Eski Mısır ve Eski Babilonya Matematikleri Arasındaki Beklenmedik Bağlantılar*", S. 125-126, 3.1. Ayrıca Babilliler 2 sayının çarpımı için de bu son özdeşliğe benzer özdeşlikler kullanmışlardır. Bkz. "*Eski Babil Matematiği (MÖ 2000-1600)*". Bu konuda Karatsuba yöntemiyle yapılan çarpma işlemi için 9. Sınıf matematik ders kitabındaki Ünite 3: Algoritma ve Bilişim'in sonundaki Ölçme ve Değerlendirme'deki 5. soruya bakabilirsiniz).

Bu nedenle kâtip bu özdeşliklere göre

$$[199] \quad \frac{9^2 - 5^2}{2.9} = \frac{(9-5)(9+5)}{2.9} = \frac{4.14}{18} = 56.0; 3,20 = 3; 6,40$$

ve

$$[200] \quad \frac{9^2 + 5^2}{2.9} = \frac{(9-5)^2 + 2.9.5}{2.9} = \frac{4^2 + 90}{18} = \frac{16 + 90}{18} = \frac{106}{18} = 106.0; 3,20 = 5; 53,20$$

sonuçlarını bulur.

Sonuçta yine ilk kez ***Neugebauer*** ve ***Sachs*** tarafından "*Teorem (1. Dynastie von Babylon)*" olarak önerilen [81]'deki ([58]) p_n ve q_n çifte parametreli çözümün Plimpton 322 no'lu tabletteki dik üçgenlerin kenarlarının uzunluklarında bulunmasında 2 adımda kullanılmış olduğu sonucu çıkmaktadır (Bkz. "*Matematiksel Çivi Yazıtları (Mathematical Cuneiform Texts), New Heaven, Conn., 1945*", S. 40, (2) ve "*Otto Neugebauer: The Exact Sciences in Antiquity (1951,1957,1969), 2nd ed./Princeton, NJ: Brown University Press; reprint ed./New York: Dover, 1969*", S. 39. Ayrıca ***Neugebauer*** tarafından 1. Babil Hanedanlığına tarihlenen Pisagor bağıntısını "*YBC 7289 No'lu Tablet*" makalesinin 11. sayfasındaki Resim 1.3.1'de görebilirsiniz. ***Neugebauer***'in 4 Mayıs 1928'e tarihli araştırma notlarından aldığım Resim 1.3.1'de şunlar yazılıdır: "$a^2 + b^2 = c^2$ *also Pythagoras in der 1. Dyn. von Bab. (1. Babil Hanedanlığındaki Pisagor bağıntısı* $a^2 + b^2 = c^2$*)*). Bu şekildeki çözüme ***Dionfant***'ın "*Arithmetica*" adlı eserinde tekrar rastlamaktayız (Bkz. "*İskenderiyeli Diofant; Yunan Cebir Tarihi Üzerine Bir Çalışma*", S. 93, 105 ve uygulama için Kitap 3'teki Problem 19, Kitap 4'teki Problem 15, Kitap 5'teki Problem 6'ya ait Lemma 2 ve daha bir sürü örnek. ***Diofant*** Pisagor bağıntısını eski Babilliler gibi probleme uygun yani ***Pisagor***'daki gibi $\left(\frac{m_n^2-1}{2}, m_n, \frac{m_n^2+1}{2}\right)$ tek parametreli, ***Öklit***'teki gibi $\left(\frac{p_n^2-q_n^2}{2}, p_n q_n, \frac{p_n^2+q_n^2}{2}\right)$ çift parametreli ya da [81]'deki gibi bunun 2 katı alınmış $(p_n^2 - q_n^2, 2p_n q_n, p_n^2 + q_n^2)$ bağıntılarını kullanır). Alman filozof ***Schopenhauer***'e göre, ***Öklit*** 1. Kitap'taki Önerme 47 Pisagor bağıntısı için geometrik bir ispat değil sanatkârane bir "faretuzak" kurmuştur (Bkz. "*Alemuddin Kaysar ve Bir Geometri Teoremi*").

Jason M. Costanzo, ***Schopenhauer***'in "***Öklit***'in fare kapanı gösterisini" 18 sayfalık makalesinde inceler. Bu makaleden can alıcı bölümleri aşağıya çıkarttım.

Öklit'in Fare Kapanı

Schopenhauer'in Geometrideki Sentetik Yönteme Eleştirisi

Özet. ***Arthur Schopenhauer***, "*Yeterli Temel İlkesi Üzerine*" adlı doktora tezinde, Kantçı idealizmin bir sonucu olarak matematiğin ve dolayısıyla matematiğin değişen doğası temelinde Öklit geometrisinin bir eleştirisinin ana hatlarını çizer. ***Schopenhauer***'a göre ***Öklit*** geometriyi sentetik olarak ele alır: Basitten karmaşığa, bilinenden bilinmeyene doğru ilerler, daha sonraki ispatları daha öncekiler temelinde "sentezler". Böyle bir yöntem, her ne kadar durumu mantıksal olarak kanıtlasa da yine de varlığın varoluş nedenine ulaşmayı başaramaz. Bunu elde etmek için, ***Schopenhauer***'in "analiz" olarak adlandırdığı ayrı bir yöntem gereklidir, böylece bazı önemli farklılıklarla birlikte erken Yunan geometricileri arasında zaten uygulanmakta olan bir yöntemi yankılamaktadır. Bu makalede, ***Schopenhauer***'in ***Öklit***'in "*Elemanlar*"ındaki sentez eleştirisini ve kendi analiz yönteminin doğasını ve uygunluğunu tartışıyorum.

Arthur Schopenhauer'in daha sonra işaret edeceği gibi, ***Kant***'ın Kopernik devrimi zorunlu olarak tüm bunları değiştirir. ***Schopenhauer*** bunu eserlerinde, ***Öklit***'in kullandığı sentez yöntemine yönelik eleştiriler yoluyla belirtir ve ***Öklit***'in "*Elemanlar*"daki 1. Kitap'taki Önerme 47'deki Pisagor teoreminin kanıtına "fare kapanı gösterisi" olarak atıfta bulunur. ***Schopenhauer***'a göre, özne için ideal nesneler olarak matematiksel varlıklar, artık bu tür varlıkların herhangi bir keşfinin, bu varlıkların ilk ortaya çıktığı ve biliş içinde karşılaşıldığı sezgisel zeminin incelenmesini veya "analizini" gerektirdiği anlamına gelir. ***Schopenhauer***, bu analiz yöntemini, antik geometriciler arasında kullanılan önceki sentetik yöntemden üstün görür, çünkü analiz yalnızca herhangi bir varlığın varlığının veya yokluğunun doğrulanmasına yol açmakla kalmaz, aynı zamanda ortaya çıktığı sezgisel zemini ortaya çıkararak varlığın neden olduğu gibi olduğunu da ortaya çıkarır. Bu, sentetik yöntemle çarpıcı bir tezat oluşturur. Çünkü matematiğin sezgisel zemininden rasyonel soyutlamaya doğru uzaklaşırken, bu yöntem mantıksal kesinlik sunmasına rağmen, yine de varlığın var olma nedeninin kaybına yol açar. Bunun daha geniş sonuçları, takip eden bölümlerde işlenir, ana tez, ***Schopenhauer***'in ***Öklit***'teki sentez yöntemine yönelik eleştirisinin önemi ve ***Schopenhauer***'in analiz yöntemine ilişkin anlayışı ve yorumunun tartışılması etrafında toplanır.

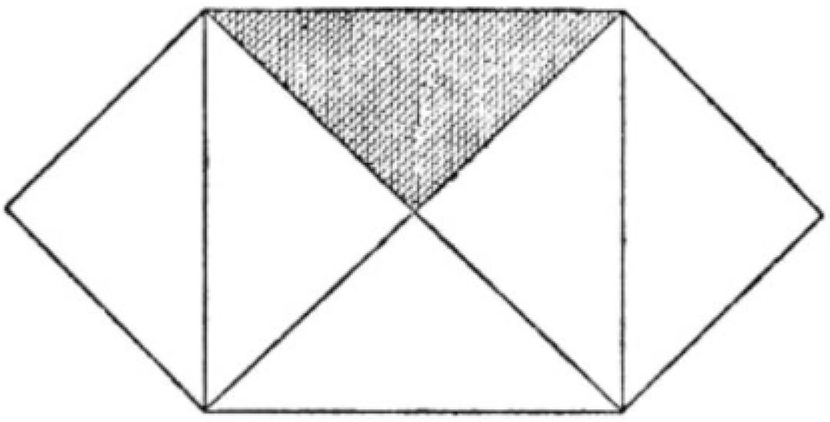
"Analiz ve sentez" başlıklı sonraki bölümde, bu iki yöntemin antik Yunan geometri uzmanları tarafından anlaşıldığı ve uygulandığı şekliyle anlamını açıklıyorum. Bir sonraki bölüm olan "***Öklit***'in Fare Kapanı Gösterimi"nde, ***Schopenhauer***'in, ***Öklit***'in *Elemanlar*'daki Pisagor teoreminin sentetik yöntemle ispatına yönelik eleştirisini incelemeye devam ediyorum. ***Schopenhauer***'in bu yöntemi reddetmesinin nedenleri orada ayrıntılı olarak açıklanıyor.

Bir sonraki bölüm olan "***Schopenhauer***'in analitik yöntemi"nde, ***Schopenhauer***'in analiz anlayışını ve bunun antik geometri uzmanları tarafından uygulanan yöntemle nasıl ilişkili olduğunu ve yine de nasıl farklılaştığını ele alıyorum. Son bölüm olan "Sonuç gözlemleri"nde, ***Schopenhauer***'in idealizmle ilgili eleştirel açıklamalarının önemini ve özellikle ***Friedrich Nietzsche*** gibi filozoflar arasında rasyonalizmin daha sonraki reddini tartışıyorum.

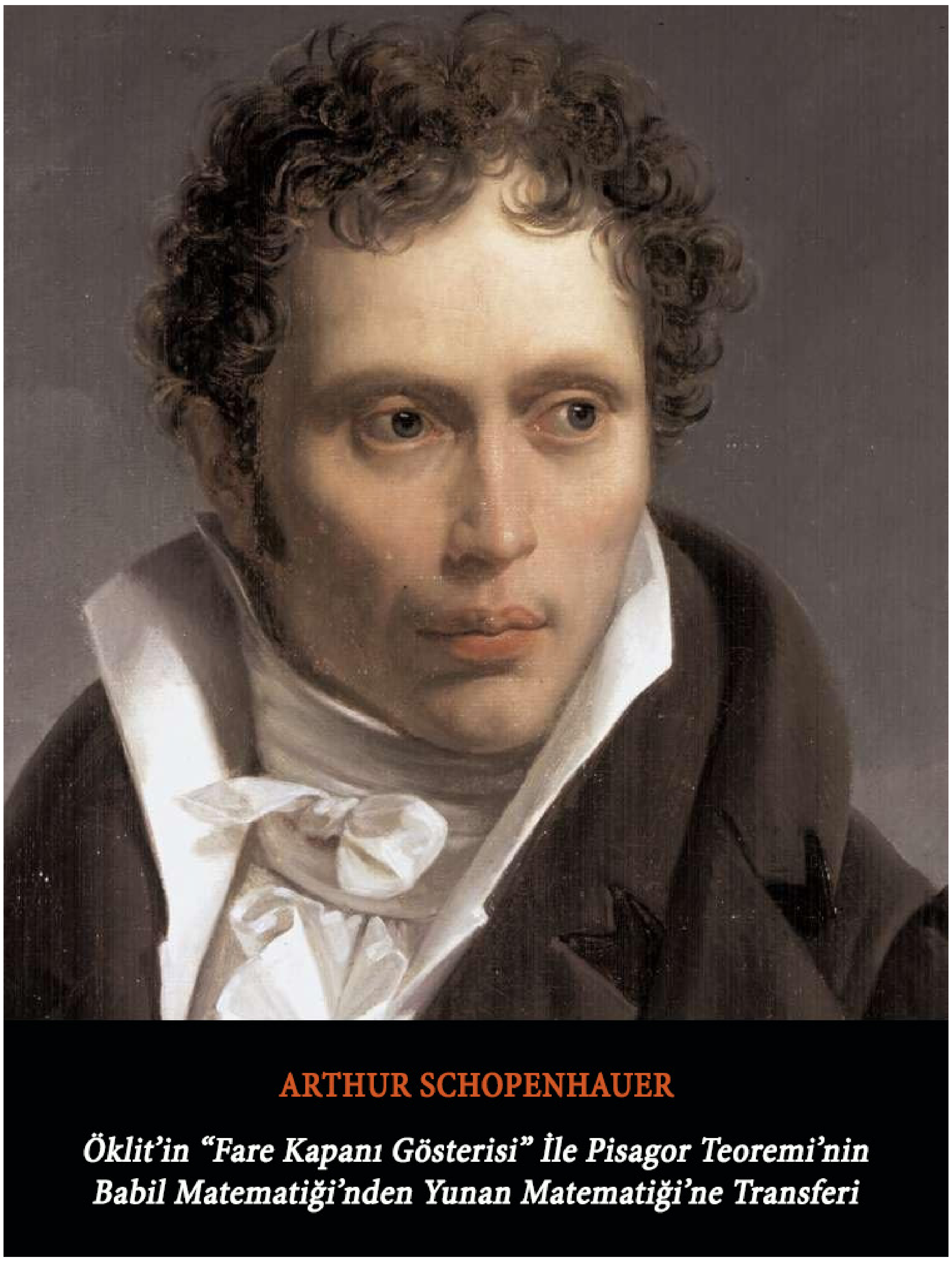
Yukarıda sadece anılan makalenin ilk 3 sayfasının çevirisini verdim ve bunlardan sadece ***Schopenhauer***'in "***Öklit***'in Fare Kapanı Gösterisi" ile ilgili 9. sayfadaki ilk paragraftan 13. sayfadaki "Sonuç gözlemleri (Concluding observations)"ne kadar olan bölümün çevirisini aşağıda veriyorum.

Arthur Schopenhauer'a göre, Öklit teoremin doğru olduğunu başarıyla kanıtlamış olsa da yine de bir dik üçgenin neden zorunlu olarak Pisagor teoremine yol açması gerektiğine dair bir anlam eksiktir. Bu, ***Schopenhauer***'in, parlak bir kanıt sunmasına rağmen, yine de süreçte oldukça önemli bir şeyi kaybettiğine olan inancından kaynaklanmaktadır; bu kanıta komik bir şekilde "***Öklit***'in fare kapanı gösterisi" olarak atıfta bulunur. Eleştirisinin ardındaki temel fikir, ***Öklit***'in teoremi tartışmasız bir şekilde kanıtladığıdır; ancak sorun, kanıtın doğası gereği, söz konusu şeyin içeriğinin, teoremin nedeninin geri dönülemez bir şekilde kaybolmasıdır. ***Schopenhauer***'a göre, bu nedenle alternatif bir yöntem gereklidir; her durum için varlığın nedenini ortaya çıkarabilen bir yöntem ve bunu analizle özdeşleştirerek şu sonuca varır: *"Genellikle, matematiği açıklamak istediğim için, **Öklit**'in kullandığı sentetik yöntem yerine analitik yöntemdir."*

Schopenhauer, Pisagor teoreminin ispatı için ***Öklit***'in sentetik yöntemine karşıt olarak, daha açık ve doğrudan bir ispat öneriyor; tekil bir görüntü biçiminde, bu görüntünün Pisagor teoreminin neden olduğu gibi olduğunu sezgisel olarak ortaya koyduğunu düşünüyor; ***Öklit***'in yönteminin bir sonucu olarak başvurmak zorunda kaldığı el çabukluğu numaralarına başvurmadan:



Şekil 12. *Schopenhauer:* *"Daha önce başka bir yerde sunulmuş olmasına rağmen (bkz. "[71. Geometrik İspat]"), Şekil 6'yı tekrar vermekten kendimi alamıyorum; çünkü bu şeklin kelimeler olmadan sadece görülmesi bile Pisagor teoreminin doğruluğu konusunda **Öklit**'in fare kapanı gösterisinden 10 kat daha fazla ikna edicidir."* (Bkz. "*Arthur Schopenhauer: İrade ve Temsil Olarak Dünya, Cilt 1*", S. 187 ve "*Arthur Schopenhauer: Yeterli Temel İlkesinin Dörtlü Kökü Üzerine ve Diğer Yazıları*", S. 253). Bu şekle göre ***Schopenhauer***'in istediği ispat, 2 kareyi üçüncü karenin içine olduğu gibi sokmaktır. Ama böyle bir ispat mümkün değildir ve ***Öklit*** sadece bu 2 kareyi dikdörtgenleştirerek üçüncü karenin içine sokabilmişti (Bkz. S. 61, 2. ve 3. Şekil). Ancak ***Öklit***'in amacı bu değildi, teoremi Babil Matematiği'nden Yunan Matematiği'ne transfer etmekti. Aranılan ispat sadece genel bir dik üçgenin özel durumunda, ikizkenar dik üçgende mevcuttur ve yukarıdaki şekilde bu gösterilmiştir! Acaba genel bir dik üçgende dik kenarların üzerlerindeki kareler hipotenüs üzerindeki karenin içine olduğu gibi transfer edilebilir mi? Eğer böyle bir ispat ortaya koyulabilirse ***Schopenhauer***'in isteği gerçekleşmiş ve böylece felsefi tartışma son bulmuş olacaktır. Çünkü 370 farklı ispatın bir derlemesi olan "Pisagor Önermesi"nde böyle bir ispat yoktur! Şahsen ***Öklit***'in ispatını uzayda araştırdığımda daha şık sonuçlar elde ettim ama ***Schopenhauer***'in istediği ispata ulaşamadım (Bkz. 2026-02-06 211317).



Bu görüntüde ne ortaya çıkıyor? ***Schopenhauer*** için bir "kare"nin ve onun aracılığıyla "4 eşit kenarın" doğasını hemen tanırız. Kareyi kesen 2 köşegen çizgi de açıkça eşittir ve ortaya çıkan iç üçgenler eşit ve diktir. Benzer şekilde, köşegenlerdeki 2 küçük kare, görüntünün simetrisini tamamladığı için, 2 üçgenin bunları işgal etmesi nedeniyle, her bir iç üçgenin alanının 2 katı olduklarını daha da gösterir. Son olarak, iç üçgenlerin hipotenüsüne eşit bir uzunluğa sahip olan daha büyük kare, böylece 2 küçük karenin toplamına eşit bir alanı kapsar. Pisagor teoremi böylece, sanki varlığın varoluş sebebine dair bir içgörüyle, hemen ve doğrudan kanıtlanır. Gerçekten de yukarıdaki görüntüden teoremin neden böyle olduğunu tam olarak "görebiliriz".

Schopenhauer için yukarıdaki görüntü (karenin dışındaki dik üçgenler içte temsil edildiklerinden ve bunlar da karenin yarısı olduklarından), Pisagor teoreminin özelliklerinin doğasına dair doğrudan ve sezgisel bir içgörü sunar. Bunun nedeni, ona göre matematiğin başlangıçta bilişsel ve sezgisel bir biçimsel temsile (*Vorstellung*) dayanmasıdır; bu temsil, algısal anlama yeteneği (*Verstand*) aracılığıyla ortaya çıkar ve daha sonra akıl yeteneği (*Vernunft*) içinde kavramsal soyutlamaya getirilir -oldukça Kantçı bir kavram. Sezgisel ve soyut arasındaki temel fark, birincisinin verisinin çok daha ilkel, doğrudan ve özel olmasına karşın, ikincisinin verisinin esasen türetilmiş, dolaylı ve evrensel olmasıdır. Dünya hakkındaki tüm bilgimiz başlangıçta sezgisel deneyimden ve ikinci olarak bu deneyimin rasyonel soyutlamamızdan kaynaklanır ve ***Schopenhauer*** bu ayrı kaynaklara kökler olarak atıfta bulunur. Her ne kadar sezgisel olanın bir alt bölümü olarak 4 kökten, bir soyut ve 3 ek kökten bahsetse de, bu makalenin amaçları doğrultusunda, yalnızca ikisini dikkate almak gerekir: Akıl yoluyla bilmenin soyut kökü ve zaman ve mekânın biçimsel temsili yoluyla var olmanın sezgisel kökü.

Dahası, her bir varlık için deneyim içinde ve deneyim yoluyla ortaya çıktığı şekliyle bir açıklama, yani varoluşu için bir neden veya yeter sebep verebiliriz, ancak bunu doğru bir şekilde ve bilgi için yapabilmek için her şeyden önce her bir şeyin doğru kökünü tespit etmek gerekir. Bu ayrıca, başlangıçta sezgisel olan bir varlığı soyutlama temelinde açıklamaya yönelik her türlü girişimin yeter sebebin kaybına yol açtığı anlamına gelir, çünkü bu şekilde, söz konusu varlığın varlığının doğrulanması, onun yalnızca bir gölgesi veya yansıması, yani "temsillerin temsilleri" temelinde aranır. En temel anlamıyla, ***Schopenhauer***'in eleştirisi esasen sezgisel verilerin soyut olan temelinde doğru bir şekilde doğrulanamayacağı fikrine işaret eder ve ona göre ***Öklit***'in *Elemanlar*'da yaptığı da tam olarak budur.

Schopenhauer'a göre, geometride, matematikle ilgili tüm bilgilerimizi edindiğimiz sezgisel varlık köküne karşıt olarak akıldaki soyut bilme kökü temelinde ilerleyen herhangi bir kanıtlama, her ne kadar yapının gerçek varlıkla mantıksal tutarlılığını "kanıtlasa" da (bir gölgenin karşılık geldiği şeyin varlığını ima etmesi gibi), varlığın varlık nedeni yine de kaybolur. ***Öklit***'in Pisagor teoremine ilişkin fare kapanı ispatında da tam olarak bu durum söz konusudur. Orada teorem, rasyonel bilgi için mantıksal ve soyut bir temelde kanıtlanır, ancak dik üçgenin iç doğasını ortaya çıkarmada başarısız olur. Bu nedenle ***Schopenhauer Öklit***'in kanıtının bilgi için yalnızca "mantıksal kesinlik" sunduğunu ve ayrıca "kuşkusuz kanıtlanan teoremin doğru olduğu inancını taşırken, yine de iddia ettiği şeyin neden olduğu şey olduğuna dair hiçbir fikir vermediğini" belirtir.

Schopenhauer'in eleştirisi, ***Aristoteles***'in *Posterior Analytics*'teki genel tavsiyelerinden yola çıkar: Bir varlığın nedenini ortaya koyan bilgi, yalnızca öyle olduğunu ortaya koyan bilgiden üstündür. ***Schopenhauer***'in anlayışına göre analizin başarması gereken tam da budur. Çünkü analizle birlikte her ayrı problem ya da teorem, deyim yerindeyse "şeyin kendisine", kendisinden çıktığı ilk sezgiye geri götürülür ve böylece uzay ve zamandaki varlık zemini temelinde doğrulanır. Bu nedenle ***Schopenhauer***, sağladığı yukarıdaki imgenin Pisagor teoremini yeterince gösterdiğini düşünmektedir. Dahası, bu tür imgelerin hazırda bulunmadığı ya da aşırı karmaşık olduğu durumlarda, ***Schopenhauer***'a göre doğru adımlar yalnızca "geometrik bir kanıtın ilk keşfindeki düşünce sürecinin analizini" gerektirir. Başka bir deyişle, söz konusu varlık, varlık içindeki zeminine ilişkin orijinal sezgi, kökü tespit edilene kadar analiz edilir.

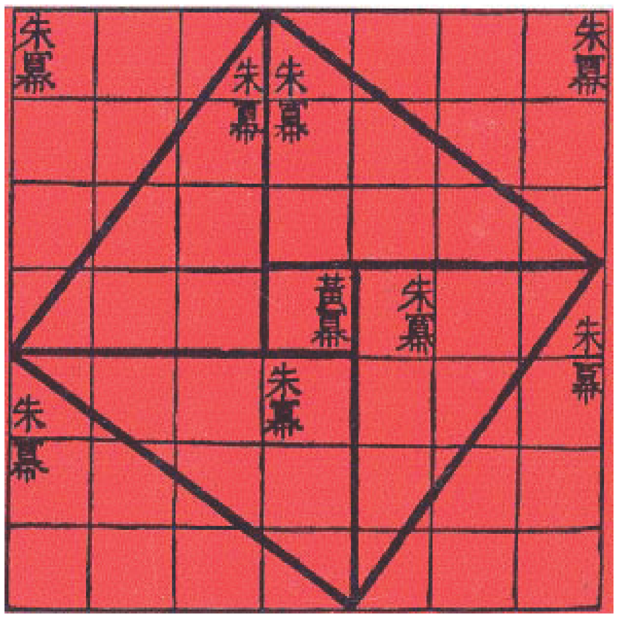
Ancak bu son anlamda ***Schopenhauer***'in analiz yöntemi, antik geometricilerin onu anlama ve uygulama biçiminden kesinlikle farklıdır. Önceki bölümlerde açıklandığı üzere, eski geometriciler için analiz ya bir geometri ilkesine ya da önceki sentezler temelinde kurulmuş önceki teoremlere ve problemlere gerilemeyi ima ediyordu. İkinci durumda, problemin varlık zemini hala gizli kalmaktadır. Bu zemini ortaya çıkarmak için analizinin bir aksiyoma ulaşana kadar sürdürülmesi gerekecektir, ancak o zaman da söz konusu gerçek varlık kaybolacaktır, zira yalnızca parçaları ve unsurları ortaya çıkacaktır. İlk durumda, sadece bazı çok temel aksiyomlar geometriciler tarafından daha fazla sorgulanmadan, "sezgisel" olarak kabul edilmiştir. Gerçekten de bu tür aksiyomlar geometri için hem ispatlanamaz hem de vazgeçilmez olarak görülüyordu, çünkü onlar olmadan bilimde daha fazla ilerleme mümkün olmazdı. Öte yandan ***Schopenhauer***'a göre her geometrik varlık aksiyomatiktir ve uzaya ilişkin bilişsel sezgilerimizde kök salmış uzamsal bir yapının temsilcisidir ve bu nedenle şöyle der: *"Varlığın nedeni kesinlikle her durumda bu kadar açık değildir… yine de ne kadar karmaşık olursa olsun her teoremde kanıtlanabileceğine ve önermenin her zaman böyle basit bir sezgiye indirgenebileceğine ikna oldum."*

Yukarıdaki açıklamalara ek olarak şunu söyleyebilirim: ***Schopenhauer***, Pisagor teoremi için ***Öklit***'in Önerme 47'deki ispatı yerine Şekil 12'yi önerir ama bu şekil yalnız ikizkenar dik üçgenler için geçerlidir. Dolayısıyla ***Schopenhauer***'a göre bir dik üçgenin dik kenarları üzerindeki karelerin toplamının hipotenüs üzerindeki kareye eşit olduğunu gösteren "eş parçalama metodu"na göre yapılan ispatlar varlığın nedenini ortaya koyduğundan akılda daha kalıcı olur. Bu "analitik çözüm"dür ve ***Öklit***'in ispatı ise varlığın öyle olduğunu gösterdiğinden "sentetik çözüm"dür. Buna göre ***Schopenhauer***'in aradığı şey şöyle bir şey olsa gerek: *"Pisagor Bulmacası"*. Yani dik kenarlar üzerindeki kareleri hipotenüs üzerindeki karenin içine sığdırmak. Herhalde 4000 yıl önceki eski Babil öğrenci tabletlerini kast ediyor!

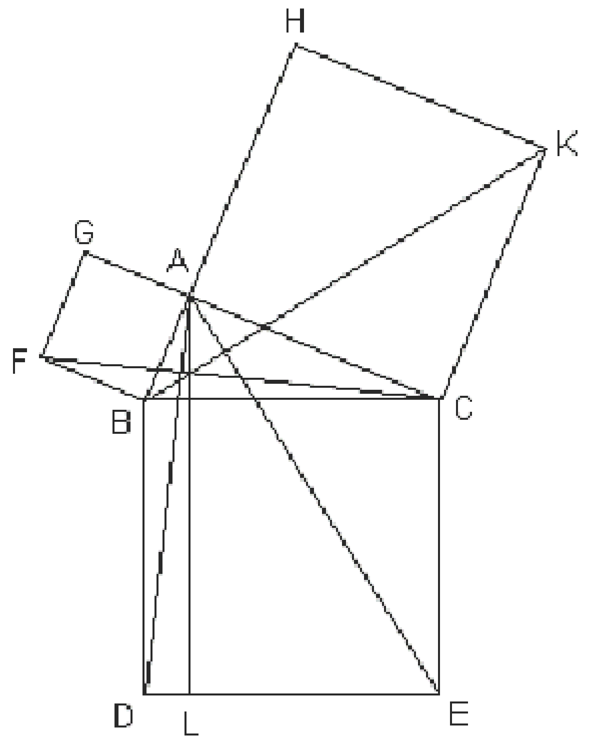
Özetle yine de ***Öklit***'in 1. Kitap'taki Önerme 47 ve 6. Kitap'taki Önerme 31'de dolaylı olarak kaydettiği diğer ispatlarla daha sonra pek çok matematikçinin ispatları bir araya getirildiğinde bugün Pisagor bağıntısı için matematik tarihinde 100'lerce ispat verilmiştir (Bkz. *"Pisagor Teoreminin Çeşitli İspatları"*). Örneğin 13. yy'ın ileri gelen bilgilerinden ***Alemuddin Kaysar***'ın (ki Alman imparatoru ***II. Friedrich***'in felsefe, tıp ve matematik sahasında cevaplandırılması için ***el-Melik el-Kamil***'e gönderdiği sorulara verdiği yanıtlarla dikkat çeker) teoremi her ne kadar Pisagor bağıntısını kullanarak başka bir geometrik yapıyı inşa ediyorsa da, farklı bir açıdan, ***Öklit***'in kareleri yerine daireleri kullanarak bağıntının başka bir ispatını verir. Bir diğer dikkat çekici ispat, 4 ay sonra bir suikaste kurban giden 20. ABD başkanı ***James A. Garfield***'in ispatıdır ve ***Garfield*** bu bakımdan matematiğe özgün katkıda bulunan tek ABD başkanıdır. İspat önemsiz değildir ve matematik tarihçisi ***William Dunham***'a göre, *"**Garfield**'inki gerçekten çok zekice bir ispattır"*. İspat 370 farklı ispatın bir derlemesi olan "Pisagor Önermesi"nde 231. ispat olarak yer almaktadır (Bkz. *"Garfield'in Pisagor Teoremi İspatı"*. İspatın orijinali *"Matematiksel Hazine: James A. Garfield'ın Pisagor Teoremi İspatı"*nda yer alır. Eğer ***Garfield*** bu ispatı 1876'da Kongre üyesiyken değil ortaokuldayken yapsaydı matematik öğretmeni ona gıptayla bakardı. Çünkü ortada parlak bir başarı var. Bkz. *"Garfield'in Pisagor Teoremi İspatı"*. Örneğin ***Ne'Kiya D Jackson*** ve ***Calcea Johson*** adlı 2 lise kız öğrenci Pisagor teoreminin geometrik seriye göre yeni bir ispatını buldular. Bkz. *"Bu 2000 yıllık eski problemde hepimiz neyi kaçırdık?"*)

Yeni Teoremler. Fakat Pisagor bağıntısıyla yapılabilecek en iyi iş, onu bir vasıta olarak kullanıp matematikte yeni teoremlerin kapısını açmak olacaktır. Örneğin ***Heron***'un üçgenin alanı için verdiği formül böyle bir şeydir. Formül yükseklikleri ortak 2 dik üçgenden elde edilir. Örneğin (5,12,13) ve (9,12,15) dik üçgenlerinin birleşmesinden (13,14,15) üçgeni elde edilir ve ***Heron*** bu üçgenin alanını formülle 84 bulur (Bkz. *"İskenderiyeli Heron: Opera Qvae Svpersvnt Omnia, Vol. 3"*, 1. Kitap, 5. Problem. Bu problem üçgenin alanı için verilen ilk problemdir ve sonraki problemler Pisagor bağıntısından arındırılır). Günümüzde ***Heron***'un üçgenleri olarak bilinen rasyonel üçgenler bu yolla türetilmiştir ve bu türetme metodu bir eski Babil tableti olan VAT 7531 no'lu tabletindeki 4. problemden gelir (Bkz. *"Jöran Friberg: Amazing Traces of a Babylonian Origin in Greek Mathematics, Copyright © 2007 by World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd."*, S. 48-50). İşte bu nedenle ***Heron*** üçgenin alan formülünün ispatı verirken sanatkârane bir şekilde "fare tuzağını" kurar. Ancak ***Friberg*** bu fare tuzağını 363-364. sayfalardaki *"14.2. Two Simple Metric Algebra Proofs of the Triangle Area Rule (Üçgenin Alan Kuralının 2 Basit Metrik Cebir İspatı)"*nda bozar. Çünkü ***Heron***'un 362-363. sayfalarda verdiği ispat yükseklikleri ortak 2 dik üçgenin alanlarının toplamından kolaylıkla elde edilirken ***Heron***'un bu ispatı üçgenin iç teğet çemberinde benzer üçgenleri kullanarak süslemesi yeni bir fare tuzak idi. Ben ise ***Friberg***'in ispatta kullandığı Babilonya metrik bağıntılarını üçgenin yeni bir alan formülü olan ATA Formülü'nde kullandım ve bu metrik bağıntıların Babil'den geldiğini övünerek söyledim (Bkz. *"Üçgenin Yüksekliklerinin Tabanlarda Ayırdığı Parçalar Hakkında Bazı Sonuçlar"*). Bu yüzden ATA formülü Pisagor bağıntısı için başat bir teoremdir (Bkz. *"Bölüm 1: ATA Formülü ve Uygulamaları"*. Bu formülün keşif hikâyesini *"Rasyonel Üçgenler"* adlı makalemde anlattım. Bu formülü 15 Temmuz 2000'de sadece Pisagor bağıntısı kullanarak keşfettiğimi biliyor muydunuz?). "ATA", geçmişte bu işle uğraşan tüm insanların büyük önderimiz ***Atatürk***'ün kişiliğinde toplandığı bir göndermedir. Dolayısıyla bu formülde ister istemez Babil matematikçilerini de anmış oluyorum. Muhtemelen ***Atatürk*** sağlığında böyle bir şeye şahit olsaydı çok mutlu olurdu diye düşünüyorum. Çünkü "Üçgen" ve geometrideki diğer terimleri dilimize kazandıran kişi O'dur!

8. Dik Üçgendeki Metrik Bağıntının Diğer Kaynaklarda Görülmesi



Bir Eski Çin Metni (MÖ 100). (3,4,5) Kutsal üçgeninin ispatı, Matematiksel Hazineler: ***Zhoubi suanjing*** (*Arithmetic Classic of the Gnomon and Circular Paths of Heaven*).



Öklit'in (MÖ 330-275) "*Elemanlar*", I. Kitap, Önerme 47'deki ispatı. İspat şöyledir: $[AL]$ dikmesini $[DE]$ tabanına indirin ve $[AD], [AE], [BK]$ ve $[CF]$'yi çizin. Bu durumda

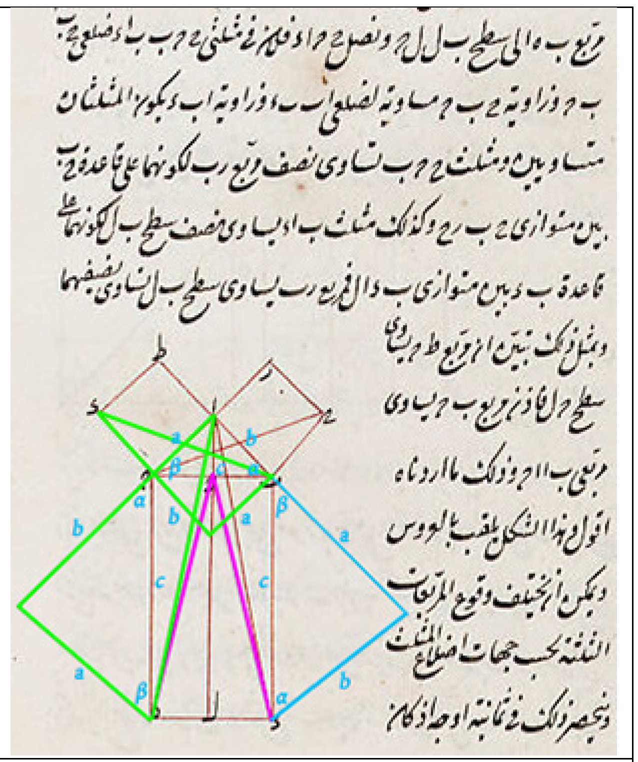
$$\begin{aligned} |BE|^2 &= Alan([BL]) + Alan([CL]) \\ &= 2Alan(ABD) + 2Alan(ACE) \\ &= 2Alan(FCB) + 2Alan(KCB) \\ &= |FA|^2 + |AK|^2 \end{aligned}$$

olduğundan $|BC|^2 = |AC|^2 + |AB|^2$ şeklinde Pisagor bağıntısı elde edilir. Bu eşitlikte köşegenleri $[BL]$ ve $[CL]$ dikdörtgenlerinin alanlarından söz edilmiştir, dolayısıyla bu ispatta kullanılan karelerin ve dikdörtgenlerin köşegenleri (ki bu kullanım şekli tüm Grek matematikçilerinde mevcuttur) eski Babil'den geliyordu.

İşte bu ispat 20. yüzyıla kadar okullarda Pisagor Teoremi'nin ispatı olarak kullanıldı. Bu nedenle Osmanlı döneminde okullarda "Pisagor Teoremi" olarak okutuldu. Fakat bunun doğru olmadığını dünyada yalnızca ve yalnızca bir kişi fark etti: ***ATATÜRK***.

Atatürk 3. Dil Kurultayı'ndan sonra 1936-1937'nin kış aylarında Dolmabahçe Sarayı'nda son kültür hamlesini yaparken öğrenciliğine geri döner ve "Geometri" kitabını yazmaya başlar. Bu kitaptaki Türkçe terimler içinde bir dik üçgendeki **"Hipotenüs"**e karşılık **"Dikeyin Çapı"** ve **"Pisagor Bağıntısı"** yerine **"Dikeyin Çap Karesi"** der (Bkz. S. 30-32. Daha fazla ayrıntılı bilgi için "*YBC 7289 No'lu Tabletin 2. Çözümü*" adlı makalemdeki 10-13. sayfalarındaki "*Atatürk'ün Antik Yunan Yüceltimine Karşı Bir Yanıtı: Dikeyin Çap Karesi*"ne bakınız). ***Atatürk***'ün bu çıkarımları yaptığı orijinal çizim de elimizde mevcuttur (Bkz. "*Atatürk'ün Ölümünün 84. Yıl Dönümü*", Şekil 3).

Atatürk ve maiyeti 13 Kasım 1937'de Sivas'a geldiklerinde ilkin 4 Eylül 1919'da tarihsel kongrenin toplandığı Kongre Salonunu ve özel odaları gezdiler ve duygulandılar. Sonra topluluk halinde lisenin 9-A sınıfında programındaki Geometri (Hendese) dersine girdiler ve ***Atatürk***'ün bu sınıfta Pisagor Teoremi'ni anlattığının söylenmesi "Geometri" kitabının henüz yetişmemesi üzerine eskiye bağlı kalmasından kaynaklanmış olmalıdır (Bkz. "*Atatürk'ün Matematik Alanında Yaptığı Çalışmalar*"). Fakat ölümünden hemen sonra ***Atatürk***'ün çıkarımları müfredattan kaldırılarak eskiye dönülür ve bu değişiklik halen geçerlidir (Bkz. "*YBC 7289 No'lu Tabletin 2. Çözümü*").



13. yüzyıl tarihli el yazmasında ***Nasirüddin Tûsi***'nin (1201-1274) ***Öklit*** tarafından verilen ispatın Arapça çevirisi (Bkz. *Alamy*. Aynı ispata ait bir diğer el yazması sayfası Harvard Müzesi'ndedir. ***Schopenhauer***'in Şekil 12'deki çizimi "Matematiksel Hazine: ***Tûsi***'nin ***Öklit***'in Elemanları"ndaki 5. son sayfadaki en alttaki sol baştaki şekildir. Bu ispat daha sonra 1873'te ***H. Perigal*** tarafından verilmiştir. Bkz. "*5. Geometrik İspat*"). Söz konusu bu ispata ait Arapça çeviri başta ***Sabit bin Kurra (821-901)*** olmak üzere diğer İslam matematikçileri tarafından devam ettirilmiştir (Bkz. "***Sabit bin Kurra**'nın İspatı*").

Nasirüddin Tûsi, yukarıdaki şekilde ***Öklit***'in yandaki şekline göre geometrik ispatı verirken sadece ACKH karenin alanının yarısı olan üçgenleri çizmiştir (ki bu çizim ***Sabit bin Kurra***'dan gelir. Yani Arapça çeviri eksik yapılmıştır), dolayısıyla hem onun şeklini tamamladım hem de ***Öklit***'in geometrik ispatını en basit şekilde açıkladım, çünkü Önerme 47'de bunlar verilmez!

Şimdi verdiğim bu ispat her seviyedeki öğrenciler için tamamen uygun hale gelmiştir. Çünkü ***Öklit***'in şekline göre $Alan(FCB) = \frac{Alan(ABFG)}{2} + Alan(ABC) = Alan(ABD)$ ve $Alan(KCB) = \frac{Alan(ACKH)}{2} + Alan(ABC) = Alan(ABD)$ iken ABD ve ACE üçgenlerinin ABC üçgeni içinde kalan parçaları A tepe noktasından indirilen dikmenin BCED karesini böldüğü dikdörtgenlerin pembe renkli köşegenleriyle oluşan küçük üçgenlerin alanlarına eşit olduklarından ABFG karesi dikdörtgenin sol tarafında yeşil renkli ve ACKH karesi de sağ tarafında turkuaz renkli dik üçgenler olarak toplanmışlardır ve böylece $|FA|^2 + |AK|^2 = |BE|^2$ bağıntısı elde edilmiştir.

Fakat MÖ 3. yy'a tarihlenen DMP 16. Problemde bu ispatın açık bir uygulamasını keşfettim (Bkz. "*DMP*", S. 28-29, 16 (PLATE 6: 19-25)). ***Friberg*** bu problemin çözümünü "*Eski Mısır ve Eski Babilonya Matematikleri Arasındaki Beklenmedik Bağlantılar*" kitabının 136-137. sayfalarında geçen 3.1'de verir ama bu tam da az önce sözüne ettiğim hipotenüs üzerindeki karenin A tepe noktasından indirilen dikmeyle 2 dikdörtgene bölünmesindeki gibidir. Çünkü 16. Problemde alanı 100 RC^2 olan bir dikdörtgene 40 RC^2'lik bir dikdörtgen eklenirse bir kare elde edildiğine göre, ilk dikdörtgenin kenarlarının uzunluklarının RC cinsinden bulunması isteniyor ve ***Friberg*** bu 2 dikdörtgenden oluşan karenin bir kenarına ya da dikdörtgenlerin yüksekliklerine $h = c$ ve ilk dikdörtgenin tabanına w der ama $a^2 = 100$ ve $b^2 = 40$ olmak üzere $w = \frac{a^2}{h}$ ve $h - w = \frac{b^2}{h}$ çözümleri söz konusu olmaktadır. Öyle görünüyor ki ***Öklit***'in yandaki ispatı bu problemden sonra ortaya çıktı!

Burada bir noktayı açıklamakta yarar var: Batı kaynaklarında Türk-İslâm bilginlerinin kendilerinden önceki oluşmuş eski Grek bilimini ve felsefesini körü körüne çevirdikleri ve hiçbir şey katmadan bu bilimsel düşüncenin devamcısı oldukları geçer. Örneğin ***Huneyn bin İshak*** (910'da öldü) ***Öklit***'in *Elemanlar*"ını, dolayısıyla I. Kitap'taki Önerme 47'yi Grekçeden Arapçaya çevirir ama çevirideki şekil yukarıdaki ortadaki şekle göre sadece sağ taraftaki ACKH karesinin alanının yarısının KCB ve ACE üçgenleriyle BCED karesinin sağ tarafındaki dikdörtgenin içine taşınmasını gösterir. Sonra ***Sabit bin Kurra*** (826-901) bu ispatı gözden geçirir ve ispat bu şekilde silsile yoluyla ***Nasirüddin Tûsi***'ye ulaşır. Bu yüzden Batılılar Türk-İslâm bilginlerine ***James Bond***'un Albay ***Tan-Sun Moon***'un etrafında aptal aptal dolaşırken, Albay ***Tan-Sun Moon***'un ***Gustav Greaves*** kimliğinde ***James Bond***'u seyretmesi gözüyle bakarlar (Bkz. "*Başka Gün Öl!*"). Fakat bu suçlama bilimsel olmayıp oldukça duygusal, şişirme ve bir yerde hususi kasıt taşırken Türk-İslâm bilginlerine ait özgün eserleri çevirileriyle birlikte karşılaştırmalı olarak ortaya koyamadığımız, ki bunun nedenleri ortadadır, ve eski Grek bilginleri ile Türk-İslâm bilginleri arasındaki ilişkileri açıklayamadığımız için bu suçun birazı da bize ait görünür.

Osmanlı Döneminde Pisagor Teoremi. ***Nasirüddin Tûsi***'nin "*Öklit Yazması (Manuscript of Tahrir Uglidis by Nasir al-Din Tusi)*" adlı el yazması 1710 tarihli Osmanlı dönemine ait olup şimdi Harvard Müzesi'ndedir. Bu el yazmasında ***Öklit***'in ispatı da (ki orijinali 1258 tarihlidir) mevcuttur (Bkz. "*Nasirüddin Tusi'nin Öklid'in Elemanlar'ı Üzerine Yazdığı Tahrir'in Türkçe Tercümesi*"). Buradan da anlaşılıyor ki, Osmanlı döneminde okullarda Pisagor Teoremi için ***Öklit***'in ispatı okutulurken "Eşek Davası"na dönüşmüş ve bu ispatı anlamayanlara "eşek" deniliyormuş. Çünkü dik açısı tepe açısı olmak üzere dik kenarlar üzerine kurulu kareler eşeğin kulaklarını benziyormuş!

İlk geometrik teoremler şöyle ifade ediliyordu (ki parantez içindeki ifadeler ***Atatürk***'e aittir):

Teorem 1. Müsellesin, zaviyetan-ı dahiletan mecmu'ü 180 derecedir (Üçgenin iç açıları toplamı 180 derecedir).

Teorem 2. Müselles-i mütesaviyü'l-adla, zaviyeleri birbirine müsavi müselles demektir (Eşkenar üçgen, açıları birbirine eşit üçgen demektir).

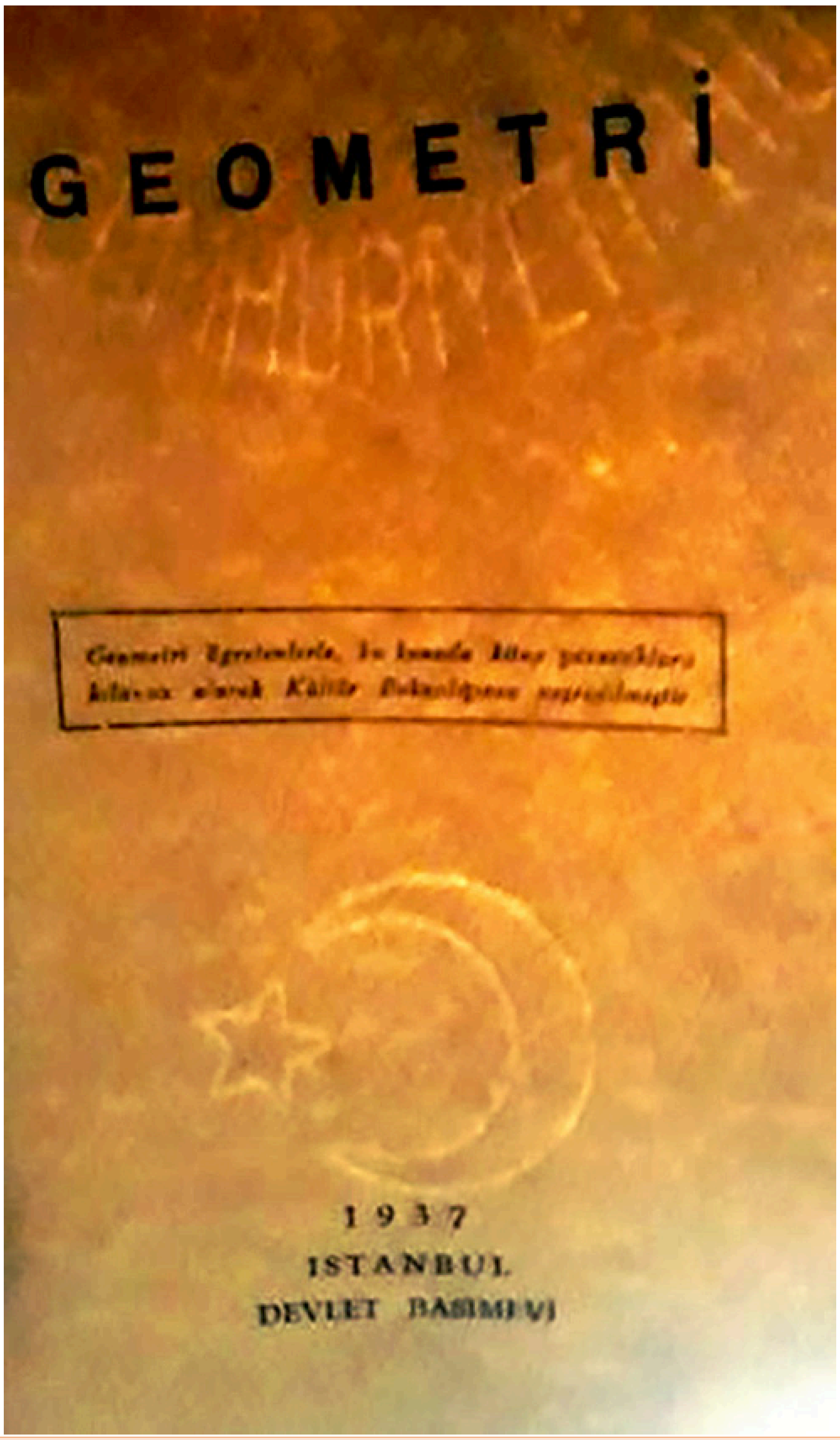
Teorem 3. Kaim zaviyeli bir müsellesin veteri kaimesi üzerine resm olunan murabbanın sahası, kaim dılılar üzerine resm olunan murabbanın sahasının mecnununa müsavidir (Bir dikey üçgenin dikeyin çapı üzerine çizilen kare, üçgenin diğer 2 kenarı üzerine çizilen karelerin toplamına eşittir).

Cumhuriyet Döneminde Pisagor Teoremi. Harf Devrimi'nden sonra meslek alanlarındaki terimlerin de Arapça ve Farsçadan Türkçeye çevirme işlemine geçilmiş ve bunların başında "matematik terimleri" geliyordu. Çünkü Cumhuriyetten önce yazılmış matematik kitapları ve formüllerinin hepsi Arapçaydı. Bu nedenle ***Atatürk***, öğrenciliğinden kalma matematik başarısıyla ve Yunanca ve Fransızca bilmenin verdiği avantajla (ki burada eğitimin hayat boyu devam ettiğini unutmayalım) bu işin üstesinden geleceğine inandı ve yukarıdaki Osmanlıca yazılmış teoremleri anlayabileceğimiz şekilde çevirdi yani Türkçeleştirdi. Daha Manastır İdadisi'ndeyken Fransızca gazeteleri okuyabildiğine göre, Arapça-Türkçe karışımından oluşan ve adeta tekerlemelere dönüşen bu teoremlerin ifadeleri saçma gelmiş olmalı. Çünkü bu teoremlerin Fransızca ifadelerini görüyor ve neden kendi dilinde aynı berraklıkta ifade edilemediğini düşünüyordu (Bkz. "*Atatürk ve Yabancı Dil*". Bunun nasıl gerçekleştiğini bir yabancı dille haşır neşir olan herkes tahmin edebilir). Fakat bu, yeni bir şey değildi. Özellikle Tanzimat dönemindeki Osmanlı aydınları bu durumu görmelerine rağmen hiçbirisi başarılı olamadı. Örneğin ***Enver Paşa*** Arap alfabesini ıslah edip Türkçeye uyarlamayı çalışmıştı ama okuma-yazma kolaylığına kapıldığı için başarısız oldu (Bkz. "*İnönü ve Harf Devrimi*").

Resim 10. ***Mustafa Kemal Atatürk***, Mekteb-i Harbiye-i Şahane'de 2.sınıf öğrencisiyken, 1901-1902, İstanbul.

Atatürk'ün Fransızcadan Türkçeye Geçişi

Atatürk'ün Fransızca ile ilk teması askeriyedeki Fransızca öğretmeni Yüzbaşı ***Nakiyüddin Bey*** sayesinde oldu. Henüz 15 yaşında iken şu notu düşmüş: *"Rüştiye 1. Sınıfında bir yüce kişiye rastladım. İlk ilham ana-baba kucağından sonra okuldaki eğitimcinin dilinden, vicdanından, terbiyesinden alınır"*. Öğretmeninin *"Sen bu Fransızcanın peşini bırakma!"* öğüdünü tutar ve tatillerde Selanik'teki Fransız Frerler Okulunu ziyaret ederek Fransızcasını geliştirir. Bu konuda *"Türk devletinin şekl-i hükümeti cumhuriyettir"* örneğini verebiliriz. ***Atatürk***, bunu Cumhuriyetin ilanından 1-2 gün önce hem Fransızca hem de Osmanlıca olarak yazmıştır (Bkz. "*Cumhuriyet ilanına karar verildiği gün*"). ***Atatürk***'ün 19 Ağustos 1928'de Fransızca öğretmeni ***Nakiyüddin Yücekök*** ve ***Tahsin Bey***'e yazdığı *"Daire-i intihabiyetiniz (seçim bölgeniz) hakkında verdiğiniz malumatı Türk harfleriyle yazdığınız için teşekkür ederim"* mektubundaki teşekkürü ise, Harf Devrimi'nden sonra bile eski harfleri kullananlar çoklukta olacak ki, yeni harflerle yazılmasına, yeni harflerin Türk'ün sesini yansıtmasına ve kendi düzenine uyması nedeniyle Latin harfleri yerine "Türk Harfleri" terimini kullanmasına bağlamıştır. Ama en çok da Fransızcadan Türkçeye geçişte rol oynadığı için teşekkür etmiş olmalı!



Resim 11. ***Atatürk***'ün hazırladığı Geometri kitabı. Yayıncısının özgün karton kapağında. Filigranlı kâğıda basılan ön kapakta yukarıda "TÜRKİYE CUMHURİYETİ HÜKÜMETİ" ve aşağıda ay yıldız figürü vardır.

Atatürk*'ün Geometri Kitabı.** Bilindiği üzere ***Atatürk, ölümünden 1.5 yıl önce son bir kültür hamlesine girişmiş ve Türkçe "Geometri" kılavuzunu hazırlamıştı. O sırada ***Atatürk***'ün yanında bulunan TDK Başuzmanı ***Agop Dilaçar*** bu kılavuzun nasıl hazırlandığını şöyle anlatır: *"Geometri kitabını* ***Atatürk****, ölümünden bir buçuk yıl kadar önce Üçüncü Türk Dil Kurultayı'ndan hemen sonra 1936-1937 yılı kış aylarında Dolmabahçe Sarayı'nda kendi eliyle yazmıştır.*

1936 sonbaharında bir gün ***Atatürk*** *beni, Özel Kalem Müdürü* ***Süreyya Anderiman****'ın yanına katarak Beyoğlu'ndaki Haşet (Hachette) Kitabevi'ne gönderip uygun gördüğümüz Fransızca Geometri kitaplarından birer tane aldırttı. Bunlar* ***Atatürk*** *ile birlikte gözden geçirildikten sonra, yazılacak Geometri kitabının genel tasarısı çizildi. Bir süre sonra ben ayrıldım ve kış aylarında* ***Atatürk*** *bu eser üzerinde çalıştı. Geometri kitabı bu emeğin ürünüdür."*

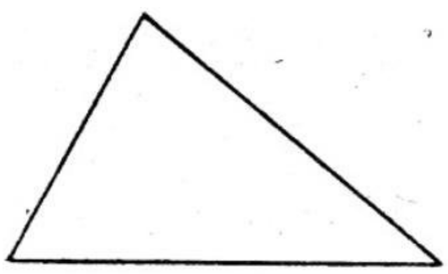
Atatürk, 44 sayfalık yapıtla ilk kez 1937'de solda orijinali üzerinde görülen **"Geometri öğretenlerle, bu konuda kitap yazacaklara kılavuz olarak Kültür Bakanlığınca yayınlanmıştır"** ibaresi altında ***"üçgen, dörtgen, beşgen, köşegen, eşkenar, ikizkenar, paralelkenar, yanal, yamuk, uzay, yüzey, düzey, çap, yarıçap, kesek, kesit, yay, çember, teğet, açı, açıortay, içters açı, dışters açı, taban, eğik, boyut, kırık, çekül, yatay, düşey, yöndeş, konum, artı, eksi, çarp, bölü, eşit, toplam, oran, orantı, türev, alan, varsayı, gerekçe"*** gibi yeni Türkçe terimlerle Türk halkının karşısına çıktı!

Atatürk'ün dil çalışmalarını da yakından izleme olanağı bulan ***Agop Dilaçar***, ***Atatürk***'ün yazdığı geometri kitabı üzerine şunları söyler:

*"**Atatürk** hep matematikle uğraşırdı (ki* matematiğe olan tutkusunu ve sayısal dünyaya yatkınlığını O'nun yaşamı boyunca kazandığı zaferlerin mayasında görmek mümkündür). *Eski geometri terimleri çok ağdalı idi. Ben bile uzun uzun bu terimleri okuduğum halde, şimdikiler karşısında güçlüğünü daha iyi anlıyorum. Pedagojide bir gerçek var: Fikir yolunun açık olması, bir ipucunun bulunması lazımdır. Yoksa bir külçe gibi çöker. Müselles kelimesini ele alalım. Arapça okullarımızdan kaldırılmıştır. Sülüs'ten müstak (türetilmiş) bir kelime olduğunu öğrenci nasıl bilsin? Arapça yoğurucu bir dildir. Örneğin müsteşrik, şark kelimesinden gelen bir kelimedir. Önüne, ortasına, arkasına birtakım ekler gelir. Bunun aslını bulmak başlı başına bir Arapça gramer meselesidir. Okullarımızdan Arapça, Farsça kaldırılmış olduğundan, öğrenci 'Müselles'i kütle kelime olarak karşısında görecek; 'Üç' aklına gelmeyecektir. Ama müselles yerine 'Üçgen' dersek, bir 'Üç' var. 'Gen',* ***Atatürk****'e göre 'Genişlik'ten alınmıştır; bir ipucu var. 'Dörtgen' dörtten gelmiştir; bir ipucu vardır. Eşit denk anlamına gelen 'Eş'ten gelmiştir. Ama müsavi Arapça bir kelimedir. Bu sebeple* ***Atatürk****'ün prensipleri burada da doğru idi. Onun için bu en ağdalı olan bilim dalını ele aldı ve kitabı örnek olarak bıraktı."*

Atatürk terim çalışmalarının ülkedeki etkilerini fiili olarak da inceledi. Ülkedeki pek çok okulu ziyaret ederek öncelikle matematik derslerine girdi ve öğrencilerin dersteki başarılarını gözlemledi. 13 Kasım 1937'de Kültür Bakanı ***Saffet Arıkan***, İçişleri Bakanı ***Şükrü Kaya***, ***Sabiha Gökçen***, ***İsmail Hakkı Tekçe*** ve yaveri ***Naşit Mengü*** eşliğinde bir heyetle Sivas Lisesi'ne gitti. Lisenin 9-A sınıfında programdaki Geometri (o zamanki adıyla Hendese) dersine girdi ve bu derste bir kız öğrenciyi tahtaya kaldırdı. Öğrenci, tahtada çizdiği koşut (paralel) iki çizginin, başka iki koşut çizgiyle kesişmesinden oluşan açıların Arapça adlarını söylemekte zorluk çekip yanlışlıklar yapınca durumdan etkilenen ***Atatürk*** tepki gösterdi. ***"Bu anlaşılmaz Arapça terimlerle, öğrencilere bilgi verilemez. Dersler, Türkçe yeni terimlerle anlatılmalıdır"*** diyerek tebeşiri eline aldı, tahtada çizimlerle 'zaviye'nin karşılığı olarak ***'açı'***, 'dılı'nın karşılığı olarak ***'kenar'***, 'müselles'in karşılığı olarak **'üçgen'** gibi Türkçe yeni terimleri kullanarak, birtakım geometri konularını ve bu arada ***Pisagor teoremini*** anlattı!

Dikeyin Çapı ve Dikeyin Çapının Karesi. Fakat ***Atatürk***'ün "Pisagor Teoremi" demesi mümkün değildi, çünkü Geometri kitabının 21. sayfasında dik üçgen için şunları yazmıştı: *"55. Dikey (Dik) Üçgen: Bir açısı dikey olan üçgendir.*



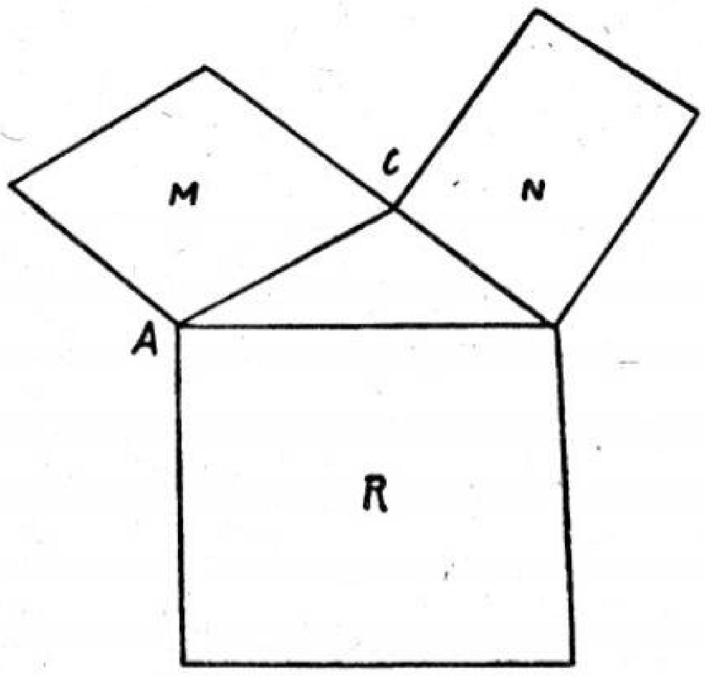
Şekil : 32

Bir dikey üçgende, dikey açı karşısında bulunan kenara **Dikeyin Çapı** *denir."*

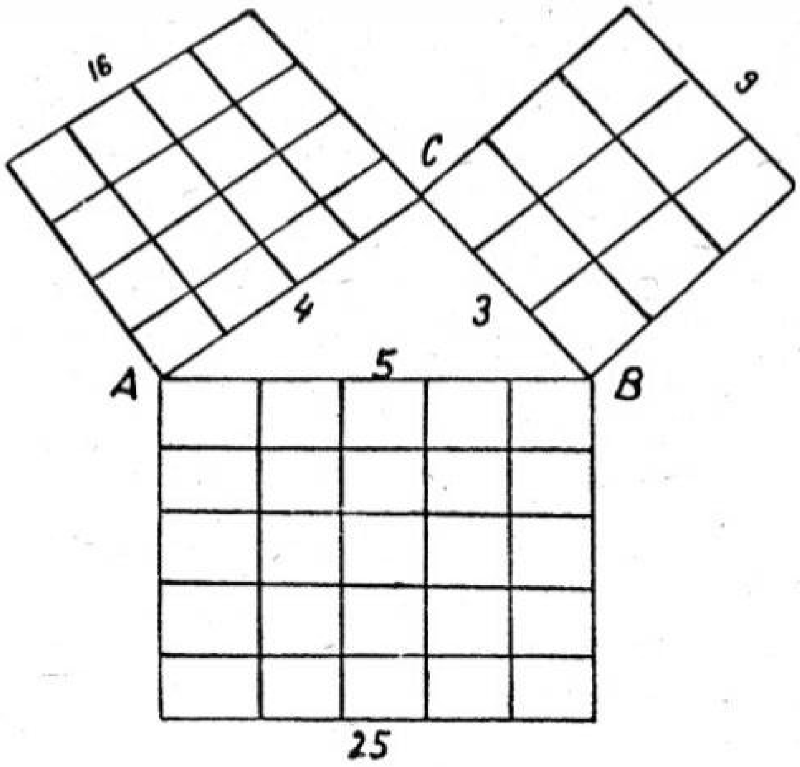
33-35. sayfalarda da ***Dikeyin Çap Karesi*** hakkında şunları yazar:

"95. Prensip: VII – Bir dikey üçgende dikeyin çapı üzerine çizilen kare, üçgenin diğer iki kenarı üzerine çizilen karelerin toplamına eşittir.

96. 5, 4 ve 3 sayılarını ele alalım. Bunların kareleri 25, 16 ve 9'dur. 25 = 16 + 9 olduğundan şu sonuca varırız ki, bundan önceki prensibe göre, kendi aralarındaki oran 5, 4 ve 3 sayıları gibi olan üç çizgi ile bir dikey üçgen çizilebilir.



Şekil : 61

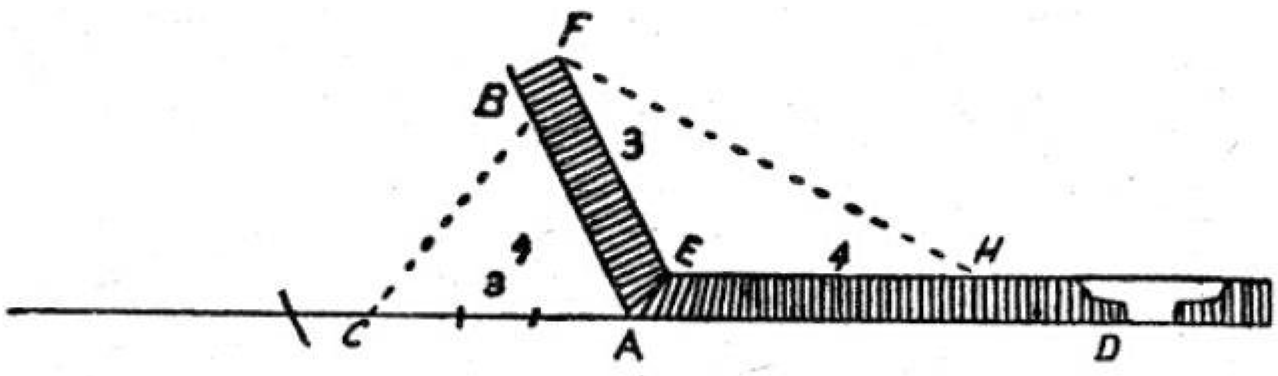


Şekil: 62

97. Bu 3, 4 ve 5 sayıları iki duvar arasındaki açının dikey olup olmadığını ortaya çıkarmaya da yarar.

Açının içinde olduğu gibi dışında da işlemek mümkündür.

Duvarın dışında, DA çizgisinin uzantısı üzerinde 3 metre ve AB çizgisi üzerinde 4 metre alırız. Eğer BC çizgisi 5 metreden daha az veya

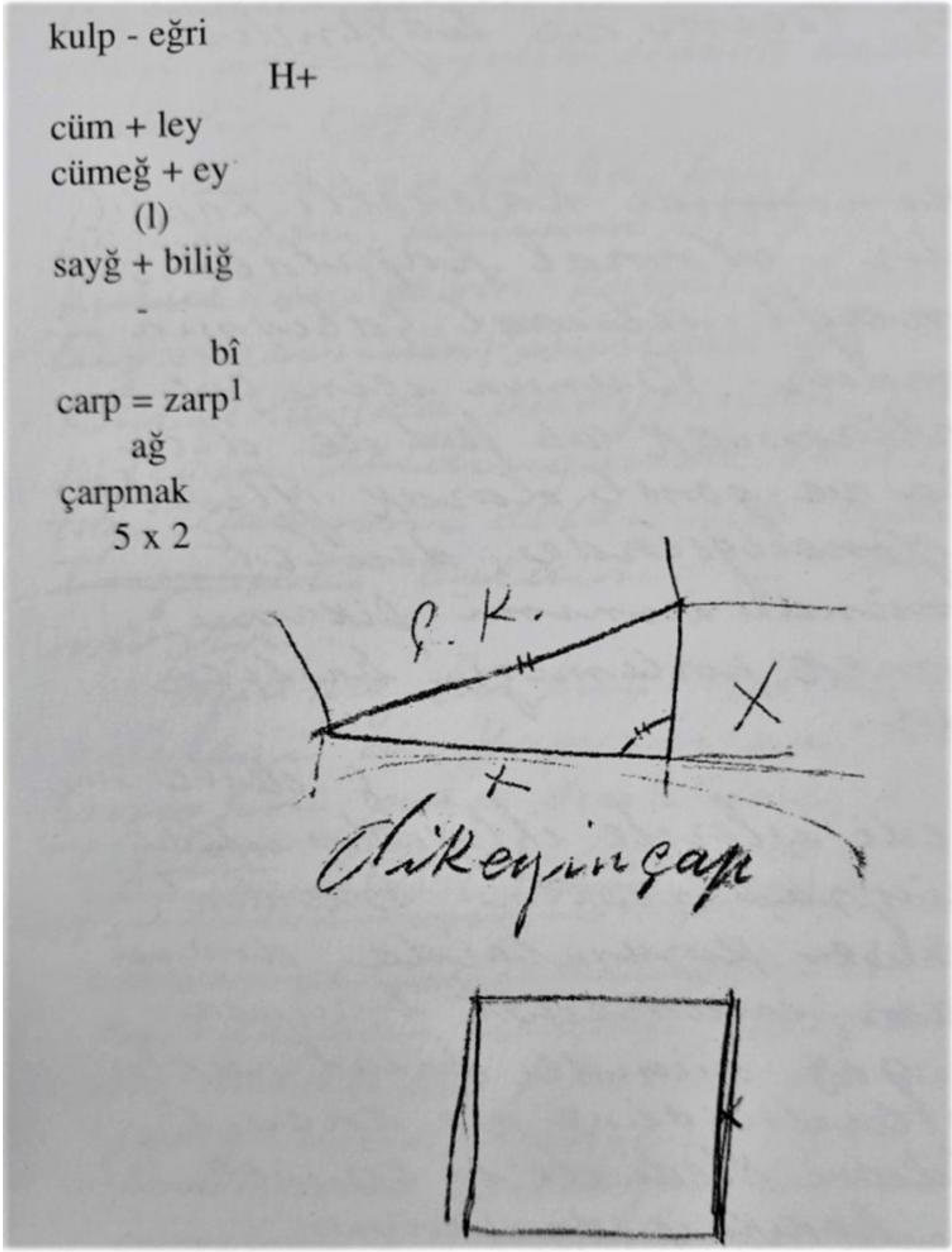


Şekil : 63

daha çok ise, iki duvarın açısı dikey değildir.

Açının içinde de aynı şekilde işlenebilir."

Burada ***Atatürk***'ün 55 ve 95-97'deki tanımları yaparken kendi elleriyle şu çizimleri yapmıştır:



Şekil 13. ***Atatürk***'ün Geometri kitabını hazırladığı günlerde aldığı notlardan bir bölüm. Bkz. *"[Atatürk'ün Geometri kitabı: Bilim dili Türkçe]"*.

Atatürk Öldükten Sonra Ne Oldu?

Yüce Önderimiz ***Atatürk*** 10 Kasım 1938'de öldükten sonra ne yazık ki Türk Milli Eğitim Sistemi de vefat etti. Çünkü 11 Kasım 1938'de toplanan TBMM'ne katılan 348 milletvekilinin oybirliğiyle ***İsmet İnönü*** Cumhurbaşkanı seçildikten sonra ***Atatürk***'e ve demokrasinin kurulacağına inananları şok etmiş ve bir avuç muhterisin haricinde kimse tasvip etmemişti. 26 Aralık 1938'de toplanan CHP Olağanüstü Kurultayı'nda yapılan tüzük değişikliğiyle ***Atatürk*** "Ebedi Şef" ve ***İnönü*** de "Führer" ve "Duce"nin Türkçe karşılığı olarak "Milli Şef" olarak ilan edilmiş, Atatürk dönemindeki politikacılar tasfiye edilmiş ve İnönü ekibi kurulmuştu. Böylece ***Atatürk*** dönemindeki **"Türk Devrimi"**nden vazgeçilerek Yunan-Latin kökenli **"Türk Hümanizmi"** kültür politikalarına geçilmişti. Kültür politikalarında **"Eski Yunan ve Roma Medeniyetine inmek"** olarak tarif edilen bu hümanist anlayış ***Atatürk***'ün ölümünden sonra resmi politika olarak görülmüştür. 2. Dünya Savaşının sıkıntılı günlerinde eğitim ve kültür hayatında "Hümanizma" temel ilke olarak kabul edilmiş ve geniş bir eğitim seferberliğine girilmiştir. Bu dönem aynı zamanda ***Atatürk***'ün kültür politikalarının da tartışılmaya başlandığı süreç olmuştur (Bkz. *"İnönü Dönemi Kültür Politikalarında Hümanizm"*). İşte bu hengâme içinde ne olup bittiğini anlamaya çalışan ***Oktay Sinanoğlu*** (ki 1963'te Yale Üniversitesi'nde dünyanın en genç profesörü oldu ve ömrünü Türkçeye ve Türk eğitimine adamıştı), 10 yaşındayken başından geçenleri 69 yıl sonra anlatırken ***İnönü***'yü ve kültür politikalarını yerden yere vurur (Bkz. *"İkna Odası: Oktay Sinanoğlu ve Dilek Sinanoğlu-22 Mayıs 2014"*).

Dönemin Milli Eğitim Bakanı ***Hasan Ali Yücel***'e göre modernleşmenin sağlam temellere dayanması milletin ruhça buna alışması için dünyanın en meşhur edebi ve felsefi eserlerinin Türkçeye kazandırılması gerekliydi. Bundan sonra yoğun bir şekilde dünya klasikleri Türkçeye çevrilmiştir. Örneğin arkeolojinin romanı olarak bilinen dünyaca meşhur ***C. W. Ceram***'ın *"Tanrılar, Mezarlar ve Bilginler"* adlı kitabının Türkçeye çevrilmesi bu dönemde oldu. ***Hasan Ali Yücel***, dünya klasiklerinin çevrilmesinin Türk hümanizmasının doğmasına katkısı konusunda şöyle der: *"Kültür anlayışımızda milliyetçiliğin tecellilerinden biri de Cumhuriyet'in daha ilk zamanlarında, Arapça ve Farsçayı kaldırmamız olmuştur. Bu boşluğu da o seneler ve bu yakınlarda Latince ve Yunanca ile doldurmaya başladık."*

Bu konuda İstanbul Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Bilim Tarihi Dalı'nda yüksek lisans yapan ***Burak Güngör***, 2013'teki *"Matematik Terimlerini Türkçeleştirme Hareketleri"* adlı yüksek lisans tezinin 102-103. sayfalarında Osmanlıca terimlerin Türkçeleştirilmesi hakkında şunları tespit eder:

*"1938 yılında basılan ve okullarda okutulan **Geometri I** adlı kitaba bakıldığında **yüzey, doğru, silindir, paralel, dikey, kare, dikey dörtgen, küp, dikey dörtgenler prüzması, açı, üçgen, bütey açı, yüre** (küre), **simetri, ikizkenar üçgen, dikey üçgen** gibi 3. Kurultay sonrası yenilenmiş halleri ile yer aldığını görmekteyiz. Aynı değişim 1938 yılında Kültür Bakanlığınca kurul tarafından kılavuz kitap olarak basılan **Aritmetik** adlı matematik kitabında da görülmektedir. Eserde **ekzey** (alıştırma), **sayı, ertey** (basamak), **toplay** (toplama), **çıkay** (çıkarma), **çarpay** (çarpma), **böley** (bölme) gibi yeni terimlere rastlanmaktadır. Ayrıca daha sonradan terk edilecek olan olan **onometre** (dekametre), **yüzometre** (hektometre), **binometre** (kilometre), **ondametre** (desimetre), **yüzdemetre** (santimetre), **bindemetre** (milimetre) gibi oldukça başarılı Türkçeleştirilmiş olan terimleri 3. Kurultayda alınan **'Kökü Türkçeden gelen Kültür dünyasında müşterek olan (elektrik, dinamo, metre, gram vb.) terimleri olduğu gibi almak'** prensibinden dolayı terk edildiğini görmekteyiz.*

*1939 yılında yayınlanan bir Kılavuz'da 1938 baskısı Aritmetik ve Cebir kitaplarındaki terimlerden bazılarının düzeltilmesi istenmiştir. Kılavuz **bindemetre** yerine **milimetre**, **ekzey** yerine **egzersiz**, **çıkay** yerine **çıkarma**, **çarpay** yerine **çarpma**, **toğ** yerine **faiz fiatı**, **böley** yerine **bölme**, **işlev** yerine **işlem**, **denkley** yerine **denklem**, **dikey dörtgen** yerine **dikdörtgen**, **dikeyin çapı** yerine **hipotenüs** gibi terim değişiklikleri önermektedir.*

*1939 yılında basılan **İlk Aritmetik** ve **Geometri** kitaplarında bu yenilenen terimlerin kullanıldığını görmekteyiz. Böylece eski (Osmanlıca) matematik terimleri 1938 yılından itibaren yerini yeni terimlere bırakmıştır."*

Demek ki 1939'daki Eğitim ve Öğretim için **"Dikeyin Çapı"** yerine Yunanca **"Hipotenüs"** önerilmekle kalmamış, değiştirilmiş ve bu değişiklikle birlikte ***Atatürk***'ün bir diğer çıkarımı olan **"Dikeyin Çap Karesi"** terimi de **"Pisagor Teoremi"**ne dönüştürülmüş, dolayısıyla bu değişikliklere göre ***İnönü*** Millî Mücadele'deki tarihi şahsiyetinden sıyrılıp kişisel bir tasarrufta bulunmuş gözükür!


Pazartesi 22 Eylül 1958

Hürriyet

Menderes: "İnönü kenara çekilsin„ dedi

Aksi halde tarihî şahsiyeti bırakılıp CHP lideri için muamele yapılacak

Menderes'e göre C.H.P. lideri yaşına uygun hareket etmiyor

Basından da bahseden Başvekil 112 dakika konuştu

DP mebusları

Kadeş vapuru rıhtımda

Resim 12. Başvekil ***Menderes***, *"**İnönü** kenara çekilsin. Aksi halde tarihi şahsiyeti bırakılıp CHP lideri için muamele yapılacak"* dedi. Çünkü CHP liderinin yaşına uygun hareket etmediğini belirterek (ki ***İnönü*** 70 yaşında olmasına rağmen kendisine mukavemet gösteriyordu) *"Bize yumruk atan **İsmet Paşa**'yı alır layık olduğu muameleyi yaparız"* dedi (Bkz. 22 Eylül 1958. Gazetenin kendisi sarı saman kağıdına basılmış ve resimler siyah-beyazdır ama ben resimleri gerçeğe çok yakın şekilde renklendirdim. Şu Kadeş Hadisesi, dünyada var mı ki eşi benzeri? Çanakkale şehitlerini ziyarete gitmek üzere yola çıkacak olan Kadeş vapurunda yaşananlar yazarların dikkatinden kaçmamış ve Üstat ***Necip Fazıl***, Kadeş olayları hakkında Son Posta gazetesinde "Zina Kooperatifi" başlıklı bir yazı kaleme almıştı. Bkz. *"Kadeş Rezaleti Hiç Unutulur Mu?"*).

Burada söz konusu olan "Hipotenüs" teriminin Osmanlı ve Türkiye Cumhuriyeti dönemlerindeki kullanımları şöyle olmuştur.

"Hipotenüs" Teriminin Osmanlı ve Türkiye Cumhuriyeti Dönemlerindeki Kullanımları. Öncelikle *"Hipotenüs"* kelimesi Apollodorus'taki "ἡ τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτείνουσα (γραμμή veya πλευρά)"dan türetilerek **"dik açıya karşı gelen kenar"** anlamına gelir. Yunanca "ὑποτείνουσα (*hupoteinousa)*" terimi Geç Latinceye "*hypotēnūsa"* olarak ödünç verilir ve oradan da "*-e"* sonekiyle *"Hypotenuse (Hipotenüs)"* yazımı Fransızcaya geçer (Estienne de La Roche-1520). Daha fazla bilgi için *"Hypotenuse"* sayfasındaki *"Etymology"* bölümüne bakınız.

Hipotenüs ile birlikte gelen Pisagor teoremi ise antik dönemde **"Hecatomb Teoremi"** ve Bizans döneminde, özellikle mimarlıkta **"Kareler (Skadras) Kuralları"** olarak anılıyordu. Bu son kural dik üçgenin kenarlarına çizilen kareler nedeniyle bu adı almıştır (Bkz. *"Visual Proof of The Pythagorean Theorem"*).

Eğer "Hipotenüs" kelimesini TDK'da taratırsanız Türkçe Batı Kökenli Kelimeler Sözlüğü'nde şu sonuçların verildiğini görürsünüz:

TÜRKÇEDE BATI KÖKENLİ KELİMELER SÖZLÜĞÜ

Hipotenüs
Fransızca hypoténuse

Bir dik üçgende, dik açının karşısında bulunan kenar: § *1. Veteri kaime, 2. Kaim veter, 3. Dikayin çap, 4. Hipotenüs. Bkz. "Peyami Safa: Osmanlıca Türkçe Uydurmaca"*, S. 41.

Osmanlıca-Türkçe Uydurmaca

Burada anılan kaynakta ***Peyami Safa***, 12 Kasım 1939 tarihinde aldığı bir mektupta bazı matematik terimlerini, geçirmiş olduğu aşamalarla birlikte, aynen şöyle verir (Bkz. *"Osmanlıca-Türkçe-Uydurmaca"*, Terim Rezaleti, S. 66):

I. 1. Veteri kaime, 2. Kaim veter, 3. Dikeyin çapı, 4. Hipotenüs.

Bu kelimelerden ilk ikisi Osmanlı döneminde, üçüncüsü ***Atatürk*** döneminde kullanıldı ve dördüncüsü ve sonuncusu 1939'dan itibaren günümüze kadar kullanılmıştır. İşte ***Atatürk*** (ki Osmanlıca, Yunanca, Fransızca ve Türkçeye hakimdi) bu ilk 2 kelimeyi 1937'de Türkçeye çevirirken 3. kelime ortaya çıktı. Fakat 1939'da devam eden terimlerin Türkçeleştirme çalışmalarında kelime sadece Batı ile iyi ilişkilerinin kurulması adına Fransızca kullanımına terk edildi ama bu haliyle ne Osmanlıcada ne de Türkçede hiçbir anlam ifade etmiyordu. Örneğin Covid-19 ile birlikte ortaya çıkan "Pandemi, Filyasyon, Entübe" gibi gündelik hayatımızda yer edinen tıbbi terimlerin karşılıklarının TDK tarafından 2022'deki Türkçe Sözlük'te yer alacağının belirtilmesiyle daha da açık hale gelmiştir.

II. 1. Yesari müstakimler, 2. Sapık doğrular, 3. Aykırı doğrular.

III. 1. İki meçhullü muadele heyeti, 2. Neğbileyli dengiley sistem, 3. İki bilinmeyenli dengilem sistemi.

IV. 1. Zaviyei münferice, 2. Aput açı, 3. Geniş açı.

Bunlardan 2. kelime Geometri kitabının 37. maddesinde "Oput açı" olarak geçer ve ***Atatürk*** bunu doğrudan Fransızcadan almıştı. Çünkü kelimenin Türkçesi yoktu. 1939'da bu kelime "Geniş açı"ya dönüştürüldü.

V. 1. Mütemmim iki zaviye, 2. Ütey iki açı, 3. Bütünler iki açı.

Yine 2. kelime aynı kitabın 41. maddesinde "Bütey açılar"a ve 1939'da da "Bütünler açılar"a dönüştürüldü.

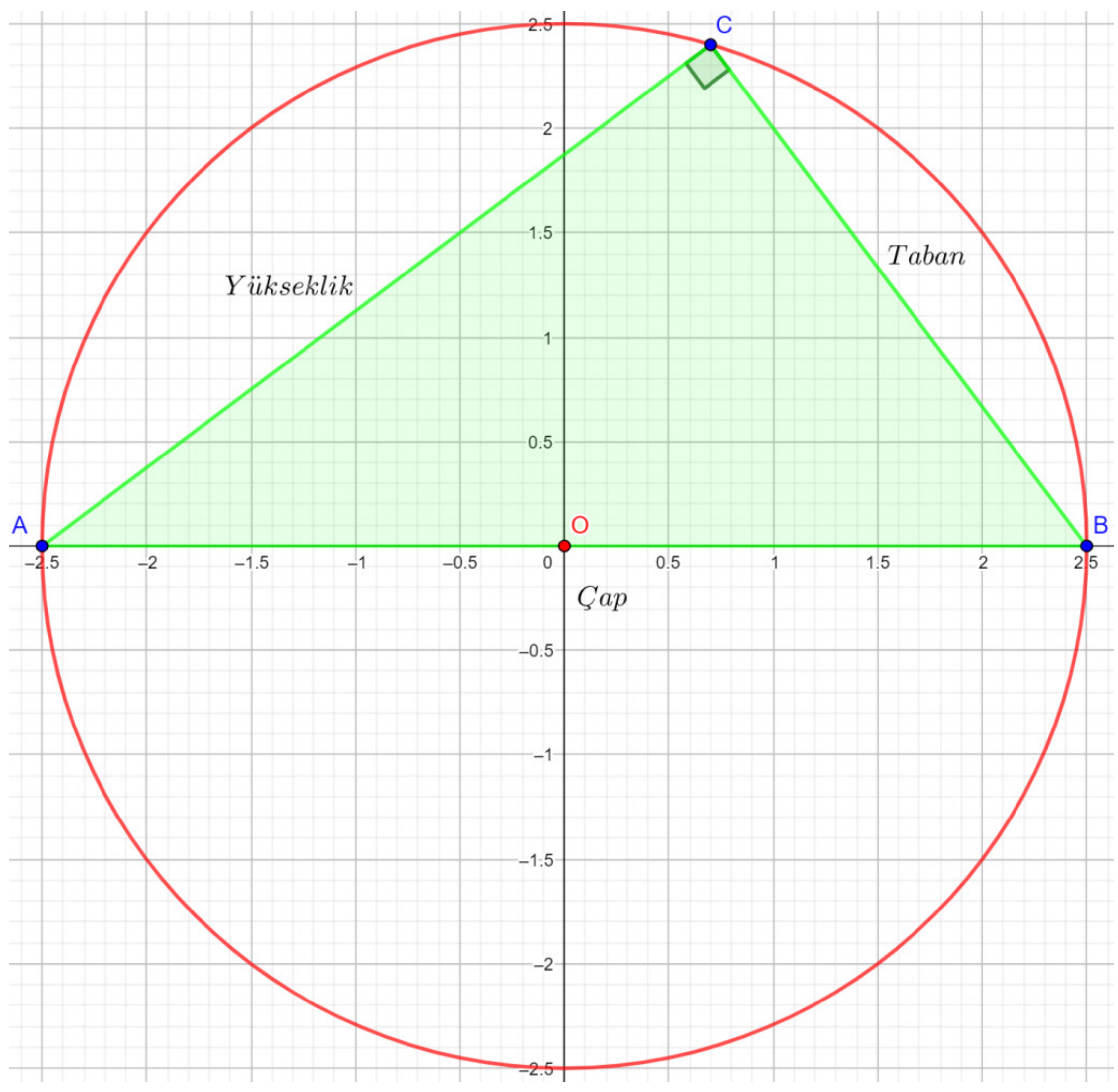
VI. 1. Temami iki zaviye, 2. Tümey iki açı, 3. Tümler iki açı.

Buradaki ilk kelimenin Türkçesi 40. maddesinde "Tümey açılar"a ve 1939'da da "Tümler açılar"a dönüştürüldü.

Özetle bu terimlerden görüldüğü üzere ***Atatürk***'ün Geometri kitabıyla başlattığı Türkçe terimlerin günümüzdeki kullanımları 1939'da büyük bir ölçüde ortaya konulmuş ve ortaya konulamayanlar ise Evrensel Kültür Dünyası'ndan olduğu gibi alınmıştır!

Atatürk'ün Metrik Bağıntıdaki Terimleri Türkçeleştirmesi

Burada Pisagor Teoremi'ni ***Atatürk***'e göre şöyle tanımlayabiliriz:



Şekil 14. ABC dik üçgeninin $[AC]$ ya da $[BC]$ dik kenarlarından birine **"Taban (Base)"** ve diğerine **"Yükseklik (Height)"** dersek $[AB]$'ye **"Çap (Diameter)"** deriz. Bu durumda ABC dik üçgeninde taban ve yüksekliğin ya da dik kenarların karelerinin toplamı bu kenarlar arasında kalan çapın karesine eşit olur. Şekle göre yarım çemberde ABC üçgenine eş olan bir çift üçgen (ki bunların tepe noktaları düşey çapa göre simetriktirler) ve tam çemberde simetrik olarak 2 çift yani 4 tane eş üçgen mevcuttur.

Bu şekilde $[AB]$ hipotenüsüne sadece **"Çap"** dememiz yeterlidir. Çünkü böyle dediğimizde TDK Başuzmanı ***Agop Dilaçar***'ın belirttiği gibi hipotenüs için bir ipucu vardır: *"Çapı gören (çevre) açı diktir!"* (***Thales***, Çember Teoremi, MS 6. yy. Bu bilgi Eski Babil'den geliyordu. Bkz. BM 85194 no'lu tabletteki 21-22. problemlere. Benzer problemleri MS 3049 no'lu tabletin 1-a ve 1-b'de görebilirsiniz). Yunancada bu dik açıya karşı gelen kenara **"Hipotenüs"** denir. ***Atatürk*** bu terimi Yunanca, Osmanlıca ve Fransızcadan **"Dikeyin Çapı"** olarak çevirdi ama buna gerek yoktu, çünkü sadece **"Çap"** demek yeterliydi ve siz bunu söylediğiniz zaman, ***Thales***'e göre zaten bu çapa karşılık gelen dik üçgendeki açı dik oluyordu. ***Atatürk*** bu durumun gayet farkındaydı ve bu yüzden Şekil 13'teki notta çapın üzerine **"Ç. K. (Çapın Karesi)"** yazdı. Bunları yazdığında Pisagor teoremine ilişkin arkeolojik araştırmalardan, örneğin ***Neugebauer***'de olduğu gibi arkeo-matematiksel çalışmalardan ve kitaplardan haberi yoktu (ki okuduğu antik döneme ait yabancı kitaplar arasında böyle bir kitap yoktur). ***Atatürk*** sadece Osmanlı dönemindeki matematik terimlerini bilimsel olarak Türkçeleştirmeye çalışıyordu. Yani ***İnönü*** ve uzmanları, 1938'den 1950'ye kadar Batıdaki kitapları Türkçeye çevirirken (ki bunun için bir tercüme bürosu kurmuşlardı) ***Atatürk***, sadece bilimsel düşünceye dayanarak Batılı bilim adamlarının elde ettiği en son gelişmeleri çoktan Türkçeye çevirmişti bile (Bkz. *"Atatürk ve İnönü Arasındaki Fark"*).

Not 8. Yukarıda MÖ 2000'lere dayanan bir dik üçgendeki metrik bağıntının Osmanlı ve Cumhuriyet dönemlerindeki gelişmelerini kısaca aktarmaya çalıştım (Bkz. *"Atatürk'ün Ölümünün 84. Yıl Dönümü"*. Diğer gelişmeler için *"YBC 7289 No'lu Tabletin 2. Çözümü"* adlı makaleme bakabilirsiniz). Bu konuda ne yazık ki bir makale, araştırma, tez ya da kitap bulabilmeniz mümkün olmamakla birlikte, ben sadece Albay ***Tan-Sun Moon***'un *"Avın heyecanı takiptedir"* dediği gibi izleri takip ettim ve 61. sayfadan buraya kadar elde ettiğim sarsıcı bulgularımı sıraladım. Buna göre dik üçgendeki metrik bağıntıyı nasıl anarsanız anın ama Albay ***Tan-Sun Moon***'un aşağıdaki uyarısına göre hareket etmeniz en doğrusu olacaktır.

Batının İkiyüzlülüğü!

"Başka Gün Öl!" filminin girişinde şöyle bir diyalog mevcuttur:

Albay Tan-Sun Moon: *"Bay **Van Bierk**. Görüşmeyi dört gözle bekliyordum".*

James Bond: *"Ben de. Afrika'daki asker dostlarım size teşekkür borçlu Albay **Moon**.*

-Ambargo yüzünden çok az insan savaş elmaslarını alıyor."

Moon: *"BM'i bilirim. Oxford ve Harvard'da okudum. Batılı ikiyüzlülüğünde mastır yaptım."*

9. Bu Tablet, Bir Astronomi Tableti Mi İdi?

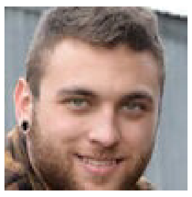
Tabletin modern analizini yaparken Tablo 3'deki sonuçlar, bana tabletteki dik üçgenlerin $(30°, 45°)$ aralığında $30'$ aralıklarla yazılmış olduğu izlenimini verdi. Hatta bu öyle bir izlenimdir ki, ardışık fark açıları $30'$ civarında olan tablete hâkim dik üçgenlerle birlikte ardışık fark açıları $1°$ ile $2°$ arasında olan dik üçgenlerin de interpolasyon yöntemine elverişli olduğunu görmüştük. Ayrıca 4. sütunundaki sayılara göre –ki bu sayılar yardımıyla [98]'de tanımlı k_n katsayıları Resim 8'deki dik yamukların alanları arasındaki ilişkileri göstermektedir, [101]'deki k_n katsayıları ile ardışık dik üçgenlerin eğim açılarının oranları arasında ilişkiler açıktır– tabletin bu yönde değerlendirilmesine ait kapının açık bırakıldığı sonucu çıkmaktadır. Burada dikkatimi çeken bir diğer önemli nokta şudur: ***Zecharia Sitchin***, *"12. Gezegen"*, R&M Yayınları, 2004, Birdenbire Uygarlık, S. 42'de *"Bu sistem bazı bakımlardan günümüzde kullandığımız 10 tabanlı sayma sisteminden de üstündür."* demişti ve bunun doğru olduğunu aynı çalışmayı kendi sistemimizde yapamamakla görmekteyiz.

Bu arada Si. 427 no'lu tablet için 2019 Haziran'ında İstanbul Arkeoloji Müzesi'ne gelen Dr. ***Mansfield***'in Plimpton 322 no'lu tablet hakkındaki bulguları aşağıdaki haberde verilir (Bkz. *"Genelleştirilmiş Piobert-Parmantier Metodu"*, S. 9-11, 23. Ayrıca Plimpton 322 no'lu tablet hakkında Dr. ***Mansfield***'in ***N. J. Wildberger*** ile birlikte yazdıkları ve 24.08.2017 tarihli *"Plimpton 322 is Babylonian exact sexagesimal trigonometry"* makalesine bakabilirsiniz. Linki tıkladıktan sonra makaleye PDF formatında ulaşabilmek için sol üst köşedeki "View PDF"ye tıklamanız gerekir).

3.700 Yıllık Babil Kil Tableti Matematik Tarihini Sonsuza Dek Değiştiriyor!

Avustralyalı bir matematikçi, dünyanın en eski uygulamalı geometri örneğini ortaya çıkararak matematik tarihini sonsuza dek değiştirdi.

Yaklaşık 3700 yıl öncesine ait bir tabletin, matematik tarihindeki en eski uygulamalı geometri örneği olduğu tespit edildi.



Jak Connor
Tech and Science Editor

Published Aug 5, 2021 6:19 AM CDT
Updated Sep 7, 2021 3:34 AM CDT

UNSW Bilim Matematik ve İstatistik Okulu'ndan Avustralyalı matematikçi Dr. ***Daniel Mansfield***, MÖ 1900 ila 1600 yılları arasındaki Eski Babil dönemine tarihlenen Plimpton 322 adlı 3700 yıllık bir kil tablet üzerinde uygulamalı geometrinin bilinen en eski kökenlerini ortaya çıkardı. Foundations of Science dergisinde 4 Ağustos'ta yayımlanan yeni bir çalışmaya göre, kil tablet, araziyi doğru dik açılar yapmak için kullanılan "Pisagor üçlüleri" ile ölçmek için kullanılıyordu.

Dr. ***Mansfield*** şöyle diyor: *"Tabletin keşfi ve analizi matematik tarihi açısından önemli sonuçlar doğuruyor. Örneğin bu, **Pisagor**'un doğumundan 1,000 yıldan fazla bir süre öncesine ait."* Dr. ***Mansfield*** sözlerine şöyle devam etti: *"Matematiğin üçgenlerle ilgili dalı olan trigonometrinin MÖ 2. yüzyılda gece gökyüzünü inceleyen eski Yunanlılar tarafından geliştirildiği genel olarak kabul edilir. Ancak Babilliler gökyüzünü değil, yeri ölçmekle ilgili sorunları çözmek için kendi alternatif 'proto-trigonometrilerini' geliştirdiler."*

Bu hikâye hakkında daha fazla bilgi edinmek isterseniz *"Matematikçi dünyanın en eski uygulamalı geometri örneğini ortaya çıkardı"* adlı makalesine göz atabilirsiniz.

Aşağıdaki çalışmam, ***Robson***'un Plimpton 322 no'lu tabletinde kayıp sandığı satırlardaki doğuranların bulunması ve bununla birlikte gelen yeni bir trigonometrik cetvelin nasıl bulunduğunu gösteren ek çalışmamdır.

4.4. *Robson*'un Plimpton 322 No'lu Tabletindeki "Muhtemel Kayıp Satırlar"ı. Dr. ***Eleanor Robson*** (şimdi Profesör), *"Ne Sherlock Holmes Ne Babil: Plimpton 322 No'lu Tabletin Yeniden Değerlendirilmesi (Neither Sherlock Holmes nor Babylon: A Reassesment of Plimpton 322), 2001"* makalesinin 197. sayfasındaki (PDF'de 31. sayfa) *"Plimpton 322'de Muhtemel Kayıp Satırlar (Possible Missing Lines in Plimpton 322)"* başlıklı Tablo 8'de Plimpton 322 no'lu tablette mevcut olmayan ama 15 dik üçgenin aralarında mevcut sandığı 6 tane Pisagor üçlüsü verir ve bunlardan bazılarını 198. sayfadaki *"Seçilmiş Ters Çiftler İçin Kriter (Criteria for Choosing the Reciprocal Pairs)"* başlıklı Tablo 9'da tekrar verir. Buna göre Tablo 8'deki ilk 3 Pisagor üçlüsü olan 4a, 8a ve 11a satırlarındaki $x = \frac{p}{q}$ (ya da m) eğimlerini Tablo 9'da verir ve 6a, 9a ve 12a satırlarındaki x (ya da m) eğimlerinin de mevcut olması gerektiğini söyler.

Resim 13. İngiliz Asurolog ve akademisyen Prof. Dr. ***Eleanor Robson***.

Robson, bu yeni eğimler, dolayısıyla p ve q doğuranları için anılan makalesinin 193. sayfasındaki *"Ters Çiftler ve Kayıp Satırlar (Reciprocal Pairs and Missing Rows)"* başlığı altındaki 196. ve 199. sayfalarda şunları söyler: *"Plimpton 322'ye geri dönersek, tüm ters sayıların 4 basamaklı veya daha kısa olduğunu ve her çiftteki toplam basamak sayısının her zaman 7'den az olduğunu görüyoruz. Bu seçim koşulları altında, Tablo 8'de 4a, 8a ve 11a satırlarında gösterildiği gibi, tablodan 3 ters çiftin eksik olduğu görülür. Plimpton 322'nin sütunlarındaki karşılık gelen 3 giriş de burada verilmiştir; ayrıca üçgenin uzun kenarı ve benzer p, q doğuranları da verilmiştir.*

*Bir an için, kâtibin bir 'doğuran fonksiyona' [bkz. **Friberg** 1981a, 284–289] erişimi olmadığını, ancak standart çarpım tablosu derleyicilerinin muhtemelen yaptığı gibi çeşitli kriterler kullanarak ters çiftleri derlediğini veya atladığını varsayalım. Neden tablonun türetildiği çiftleri seçmiş ve Tablo 8'deki 3'ünü atlamış olsun ki? Karşılıklı çiftler, referans kolaylığı için ondalık karşılıkları da verilmiş olarak Tablo 9'da tamsayılar olarak listelenmiştir. Kâtibin, güzel Pisagor üçlüleri vereceğini bildiği (veya hesapladığı) tablonun üst ve altındaki 2 basamaklı karşılıklı çiftleri seçerek başladığını varsayalım. Şimdi aralarında bulabildiği kadar çok çift bulması gerekiyordu ve hesaplamayı kolaylaştırmak için kendini 4 basamaklı veya daha kısa sayılarla sınırlamayı tercih etti (bu, tablonun son sütunlarında da 4 basamaklı veya daha kısa sayılarla sonuçlanacaktı). Doğal olarak, aralığındaki çiftlerin sadece birkaçı standart ters sayılar listesinde yer alıyordu, ancak çok daha fazlası, standart ters sayı çiftleri art arda yarıya indirip 2'ye katlamak ya da 3'e katlayıp 3'e bölmek gibi basit (ve kanıtlanmış) bir yöntemle bu listeden türetilebilirdi. Bu şekilde, kâtibimizin aralığındaki 11 çift, standart ters sayı tablosundan basitçe türetilmiştir; diğerlerini ise standart çarpım tablolarından, katsayı listelerinden ya da sadece 60'lık sistem hakkındaki pratik bilgisinden seçmiş olabilir. Atladığı 3 çiftten sadece 4a ve 8a, kanıtlanmış yöntemler kullanılarak temel Eski Babilonya aritmetik ortamından kolayca türetilememiş gibi görünmektedir. Seçme ve sıralama süreçlerinin eşzamanlı olması gerekmez; gördüğümüz gibi, sayısal verileri büyüklüğüne göre sıralamak normal bir yazman uygulamasıydı.*

*Ayrıca, II. ve III. sütunlardan geriye doğru da bir analiz yapabiliriz. Kısa kenarlara, köşegenlere ve dolaylı olarak uzun kenarlara baktığımızda (Tablo 1), hiçbir uzun kenarın uzunluğunun 60'lık sistemde 2 basamaktan fazla olmadığını ve hiçbir kısa kenar ya da köşegenin uzunluğunun 60'lık sistemde 2.5 basamaktan fazla olmadığını, yani 3 basamaktan en büyüğünde 10'luk basamak bulunmadığını fark ederiz. Eğer yer uzunluğunun bu parametrelerin istenen bir özelliği olduğunu ve sadece tesadüf olmadığını varsayarsak, o zaman ne 4a ne de 11a dahil edilmemeliydi: 4a'nın kısa kenarı ve köşegeni yarım bir basamak fazla uzunken, 11a'nın uzun kenarı tam 1 basamak fazla. Bu hipotez altında tabloda sadece 8a satırı yer almalıydı — ve bu, Eski Babilonya yöntemleriyle kolayca bulunamadığını az önce gördüğümüz 2 karşılıklı çiftten biriydi. Bu açıklama, şok edici derecede geçici niteliğine rağmen, yazıcının seçimlerine ilişkin önceki akademisyenlerin açıklamalarından [örn. **Friberg** 1981a 285–288] tarihsel olarak daha az makul mu? Unutmamalıyız ki (bkz. Kriter 1–2), yaklaşık 4000 yıl önce gerçek bir insanın Plimpton 322'deki rakamları üretmek için ne düşünmüş ve ne yapmış olabileceğini (yeniden) inşa etmeye çalışıyoruz; örtük olarak modern kurallara göre çalışan idealize edilmiş bir matematiksel otomatı değil. Tarihsel makuliyetin matematiksel estetikten tamamen farklı bir konu olduğunu bir kez daha hatırlatarak, kararı okuyucuya bırakıyorum.*

(Returning to Plimpton 322, we note that all the reciprocals are four-place or less, with the total number of places in each pair always less than seven. Under these selection conditions, it happens that three reciprocal pairs are missing from the table, as shown in Table 8, lines 4a, 8a, 11a. The three corresponding entries in the columns of Plimpton 322 are also given there, as well as the long side of the triangle and the analogous p, q generators.

*Let us for a minute suppose that the scribe did not have access to a 'generating function' [cf. **Friberg** 1981a, 284–289], but collected or omitted his reciprocal pairs using a variety of criteria just as the compiler(s) of the standard set of multiplication tables presumably had. Why would he have chosen the ones from which the table is derived, and omitted the three in Table 8? The reciprocal pairs are listed as integers in Table 9, with their decimal equivalents given for ease of reference. Let us assume that the scribe started off by choosing the two-place reciprocal pairs at the top and bottom of the table, which he knew (or had calculated) would yield nice Pythagorean triples. He now had to find as many pairs as he could between them, and chose, for ease of calculation, to restrict himself to four-place or shorter numbers (which would also result in four-place or shorter numbers in the final columns of the table). Naturally, only a few pairs in his range occur in the standard reciprocal list, but many more are derivable from it through the simple (and well-attested) expedient of successively halving and doubling standard reciprocal pairs, or tripling and dividing by 3. In this way, 11 pairs in our scribe's range are simply derived from the standard reciprocal table; others he may have picked from the standard multiplication tables, coefficient lists, or simply his working knowledge of the sexagesimal system. Only 4a and 8a, two of the three pairs he omitted, do not seem to have been easily derivable, using attested methods, from the basic OB arithmetical environment. The selecting and sorting processes need not have been concurrent; as we have seen, it was normal scribal practice to sort numerical data by size.*

*And we can also argue backwards, from Columns II and III. Looking at the short sides and diagonals and the implicit long sides (Table 1), we notice that no long side is more than two sexagesimal places long, and no short side or diagonal is more than two and a half sexagesimal places long—that is, with no tens in the largest of the three places. If we suppose that place-length was a desired attribute of these parameters and not simply coincidental, then neither 4a nor 11a should have been included: the short side and diagonal of 4a are half a place too long, while the long side of 11a has a whole place too many. Only line 8a ought to have been in the table under this hypothesis—and this was one of the two reciprocal pairs which we have just seen was not easily found using OB methods. Is this explanation for the scribe's choices any less historically plausible than previous scholars' [e.g., **Friberg** 1981a 285–288], despite its shockingly ad hoc nature? We have to remember (cf. Criteria 1–2) that we are trying to (re)construct what a real human being, nearly 4000 years ago, might have thought and done to produce the figures on Plimpton 322, not an idealised mathematical automaton operating according to implicitly modern rules. I leave it for the reader to decide, with another reminder that historical plausibility is a completely different issue from mathematical aesthetics.)"*

Aslında ***Robson***'un sözüne ettiği 6 satır (4a, 8a, 11a, 6a, 9a, 12a) Plimpton 322 no'lu tablette kayıp değildi, çünkü Babilli kâtip Plimpton 322 no'lu tablette 15 dik üçgene ait sıralı üçlüleri yazarken ne yaptığını çok iyi biliyordu ve aradan 4000 yıl geçtiğinden Babilli kâtibi anlamaktan uzaklaştık. Öyle ki, Grekler Babil problemleri anlamaktansa yeni çözüm yolları aradılar!

Şimdi ***Robson***'un sözüne ettiği kayıp satırları içinde barındıran yeni bir trigonometrik cetveli "Babilonya Seçme Metodu"na göre aşağıda verebilirim.

4.4.1. *Robson*'a Göre Trigonometrik Cetvel. Eğim açıları $(0°, 45°)$ aralığında olan (a_n, h_n, r_n) dik üçgenlerini doğuran (p_n, q_n) çiftindeki her

$$[201]\quad 1 < q_n < 300 = 5{,}0$$

düzgün sayısına göre

$$[202]\quad 1 = m_{77} < \cdots < m_2 < m_1 < \overline{m_0} = 1 + \sqrt{2}$$

sıralamasındaki $m_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}, m_n = \frac{p_n}{q_n}$'nin **E.B.A.S.**'ıdır (**E.B.A.S. (EBAS): En Büyük Alt Sınır**. En Büyük Alt Sınır. EBAS dizilerdeki "ASEB" gibi de yazılabilir). Fakat buradaki EBAS'ın kullanımı dizilerdeki gibi değildir, çünkü burada sadece iyi bir sıralama yapılmaktadır!

Bu durumda [201]'e göre q_n düzgün sayıları

$$[203]\quad q_n = \{2,3,4,5,6,8,9,10,12,15,16,18,20,24,25,27,30,32,36,40,45,48,50,54,60,64,72,75,80,81,90,96,100,108,120,125,128,135,144,150,160,162,180, 192,200,216,225,240,243,250,256,270,288\}$$

şeklinde toplam 53 tanedir. Burada 1 düzgün bir sayıdır ve tersi yine kendisidir. Ama 1 triviyal (açık) olduğundan alınmaz!

Buna göre $m_1 = \frac{p_1}{q_1}$ eğiminde $\sqrt{2}$ için $1;25 = 1 + \frac{25}{60} = \frac{17}{12}$ üst sınırını alırsak (bkz. "*YBC 7289 No'lu Tablet*", YBC 7243 (Tablo 1.3.2, S. 21), AO 6484 (Tablo 1.4.1, S. 29))

$$[204]\quad \frac{p_1}{q_1} = m_1 < \overline{m_0} = 1 + \sqrt{2} < 1 + 1;25 = 2;25 = 2 + \frac{25}{60} = \frac{29}{12} =: m_0 = \frac{p_0}{q_0} \Rightarrow p_1 < 2;25 q_1 = \frac{29}{12} q_1$$

eşitsizlikleri geçerli olduğundan $q_1 = q_n$ düzgün sayılarına göre

$$[205]\quad \begin{cases} Min(p_1) < \frac{29}{12} Min(q_1) = \frac{29}{12} \times 2 = 4\frac{5}{6}, \\ Max(p_1) < \frac{29}{12} Max(q_1) = \frac{29}{12} \times 288 = 696 \end{cases}$$

eşitsizliklerinden p_1 düzgün sayıları

$$[206]\quad p_1 = \{4,6,9,12,12,18,20,24,27,36,36,40,48,54,60,64,72,75,81,96,108,108,120,128,144,150,162,180,192,192,216,225,240,256,288,300,300,324,324, 360,384,384,432,450,480,512,540,576,576,600,600,648,675\}$$

şeklinde toplam yine 53 tanedir.

O halde [203] ve [206]'daki (p_1, q_1) çiftlerini sıralı olarak $m_1 = \frac{p_1}{q_1}$ eğiminde oranlar ve bu oranları küçükten büyüğe doğru sıralarsak şu şekilde olur:

$$[207]\quad m_1 = \frac{p_1}{q_1} = \begin{cases} 2 = 2 = 2 < \frac{20}{9} = \frac{20}{9} < \frac{9}{4} = \frac{9}{4} = \frac{9}{4} = \frac{9}{4} = \frac{9}{4} = \frac{9}{4} = \frac{9}{4} = \frac{9}{4} = \frac{9}{4} < \frac{75}{32} = \frac{75}{32} = \frac{75}{32} = \frac{75}{32} = \frac{75}{32} = \frac{75}{32} = \frac{75}{32} < \frac{64}{27} = \frac{64}{27} = \frac{64}{27} = \frac{64}{27} \\ = \frac{64}{27} = \frac{64}{27} = \frac{64}{27} < \frac{12}{5} = \frac{12}{5} = \frac{12}{5} = \frac{12}{5} = \frac{12}{5} = \frac{12}{5} = \frac{12}{5} = \frac{12}{5} = \frac{12}{5} = \frac{12}{5} = \frac{12}{5} = \frac{12}{5} = \frac{12}{5} = \frac{12}{5} = \frac{12}{5} = \frac{12}{5} = \frac{12}{5} = \frac{12}{5} = \frac{12}{5} = \frac{12}{5} \\ = \frac{12}{5} = \frac{12}{5} = \frac{12}{5} = \frac{12}{5} = \frac{12}{5} = \frac{12}{5} = \frac{12}{5}. \end{cases}$$

Bu sıralamada [204]'e göre $m_1, \overline{m_0}$'ın, dolayısıyla m_0'ın alt sınırların en büyüğü olduğundan şöyle bulunmuş olur:

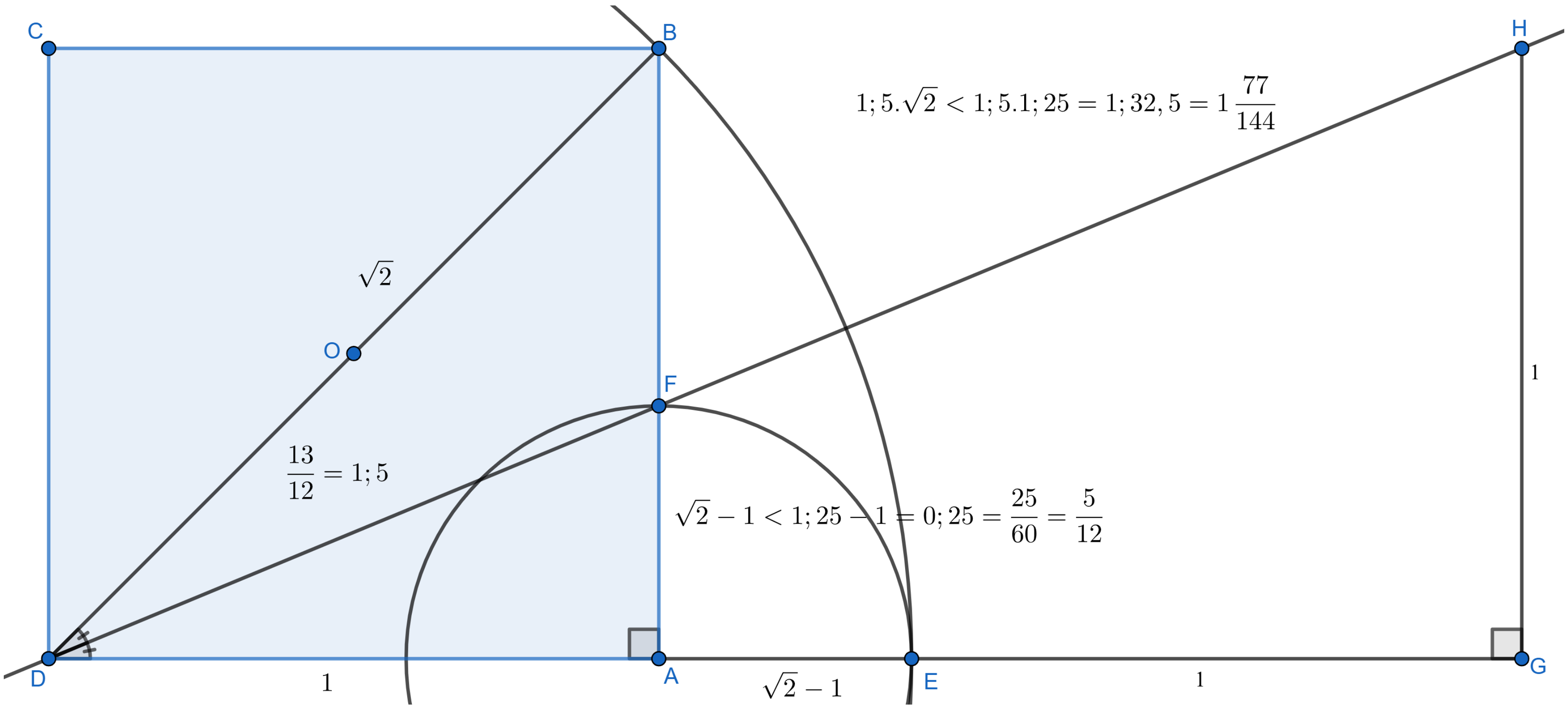
$$[208]\quad m_1 = \frac{p_1}{q_1} = \frac{12}{5}.$$

Burada Babilli kâtip $q_1 = 5$'i bildiğinden $p_1 = 12$'yi de bilmiş olmaktadır!

4.4.1.1. $\mathbf{m_1}$, $\overline{\mathbf{m_0}}$ ve $\mathbf{m_0}$'ın Geometriden Bulunması

Şimdi m_1'i $\overline{m_0}$, dolayısıyla m_0'ın alt sınırı olarak [208]'de cebrik olarak nasıl bulunduğunu gösterdiğime göre, [204]'e göre $m_1 < \overline{m_0} = 1 + \sqrt{2} < 1 + 1;25 = 2;25 = m_0$ eşitsizliklerindeki eğimleri de geometrik olarak gösterebilirim.

Aşağıdaki şekilde bir kenar uzunluğu 1 birim olan ABCD karesindeki bir köşegen uzunluğu $|DB| = \sqrt{2}\ birim$'dir ve D merkezli $[DB]$ yarıçapında bir çember çizerseniz, bu çember $[DA]$ kenarının uzantısını E noktasında ve A merkezli $[AE]$ yarıçapında bir ikinci çember daha çizerseniz, bu çember de $[AB]$ kenarını F noktasında keser. F noktası ADB açısının açıortayının $[AB]$ kenarını kestiği noktadır ve $|AF| = \sqrt{2} - 1\ birim$'dir ve ADB açısının açıortayı $[BC]$ kenarının uzantısını H noktasında kestiğinden $|DG| = |DA| + |AE| + |EG| = 1 + \sqrt{2} - 1 + 1 = \sqrt{2} + 1\ birim$ olur. Buna göre $\overline{m_0} = \frac{|GD|}{|GH|} = \frac{\sqrt{2}+1}{1} = \sqrt{2} + 1$ ve $\overline{m_0}^{-1} = \frac{|AF|}{|AD|} = \frac{\sqrt{2}-1}{1} = \sqrt{2} - 1$ oranları elde edilir. Burada eğer Eski Babillilerin $\sqrt{2} < 1;25$ yaklaşık değerine başvurursak $\overline{m_0} = \sqrt{2} + 1 < 1;25 + 1 = 2;25 = 2 + \frac{25}{60} = 2\frac{5}{12} = m_0$ ve $\overline{m_0}^{-1} = \sqrt{2} - 1 < 1;25 - 1 = 0;25 = \frac{25}{60} = \frac{5}{12} = m_1^{-1}$'den $m_1 = \frac{12}{5}$ elde edilir (Bkz. "*YBC 7289 No'lu Tablet*", YBC 7243 (Tablo 1.3.2, S. 21), AO 6484 (Tablo 1.4.1, S. 29)).



Şekil 15. DAF dik üçgeninin eğimi $\overline{m_0}^{-1} = \frac{|AF|}{|AD|} = \frac{\sqrt{2}-1}{1} = \sqrt{2} - 1$ ve HGD dik üçgeninin eğimi $\overline{m_0} = \frac{|GD|}{|GH|} = \frac{\sqrt{2}+1}{1} = \sqrt{2} + 1$'dir ve $DAF \sim DGH$ dik üçgenleri benzerdir.

Diğer taraftan Eski Babil Matematiği'nde düzgün bir d sayısı ile tersinin çarpımı $d.d^{-1} = 1$ olduğundan

$$[209] \quad \overline{m_0}.\overline{m_0}^{-1} = |DG|.|AF| = (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) < (1;25+1)(1;25-1) = 2;25 \times 0;25 = \frac{29}{12}.\frac{5}{12} = 1\frac{1}{144}$$

olduğuna dikkat ediniz. Yani Babilli matematikçiler $\overline{m_0}^{-1} = \sqrt{2} - 1 < 1;25 - 1 = 0;25 = \frac{25}{60} = \frac{5}{12} = m_1^{-1}$'dan bir şekilde $m_1 = 2;24 = \frac{12}{5}$'e kolayca geçebiliyorlardı. 5 ve 12'nin birbirinin tersi oldukları YBC 6967 no'lu tablette ayrıca gösterilmiştir (Bkz. "*Cingöz Recai Babil'de*", S. 27).

Şu hâlde aşağıdaki tablonun 2. satırdaki doğuranların ilk satırdaki doğuranlardan cebrik ve geometrik olarak nasıl elde edildiğini gösterdiğime ve diğer satırlardaki doğuranlar da bu şekillerde elde edilebileceklerine göre şu trigonometrik tabloyu (cetvel) verebilirim:

n	p_n	q_n	a_n	h_n	r_n	$\theta_n = Sec^{-1}\left(\frac{r_n}{h_n}\right)$
0	$\frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{2}$	$\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$45^\circ 00' 00''$
1	12	5	119	120	169	$44^\circ 45' 37''$
2	64	27	3367	3456	4825	$44^\circ 15' 10''$
3	75	32	4601	4800	6649	$43^\circ 47' 14''$
4	125	54	12709	13500	18541	$43^\circ 16' 17''$
5	288	125	67319	72000	98569	$43^\circ 04' 32''$
6	512	225	211519	230400	312769	$42^\circ 33' 12''$
7	9	4	65	72	97	$42^\circ 04' 30''$
8	20	9	319	360	481	$41^\circ 32' 40''$
9	625	288	307681	360000	473569	$40^\circ 31' 10''$
10	54	25	2291	2700	3541	$40^\circ 18' 55''$
11	32	15	799	960	1249	$39^\circ 46' 13''$
12	135	64	14129	17280	22321	$39^\circ 16' 16''$
13	512	243	203095	248832	321193	$39^\circ 13' 15''$
14	25	12	481	600	769	$38^\circ 43' 05''$
15	500	243	190951	243000	309049	$38^\circ 09' 37''$
16	256	125	49911	64000	81161	$37^\circ 56' 57''$
17	81	40	4961	6480	8161	$37^\circ 26' 14''$
18	2 (60)	1 (30)	45	60	75	$36^\circ 52' 12''$
19	160	81	19039	25920	32161	$36^\circ 17' 54''$
20	125	64	11529	16000	19721	$35^\circ 46' 30''$
21	243	125	43424	60750	74674	$35^\circ 33' 25''$
22	48	25	1679	2400	2929	$34^\circ 58' 34''$
23	243	128	42665	62208	75433	$34^\circ 26' 38''$
24	256	135	47311	69120	83761	$34^\circ 23' 26''$

25	15	8	161	240	289	$33^{\circ}51'18''$
26	50	27	1771	2700	3229	$33^{\circ}15'43''$
27	9	5	56	90	106	$31^{\circ}53'27''$
28	16	9	175	288	337	$31^{\circ}17'04''$
29	225	128	34241	57600	67009	$30^{\circ}43'47''$
30	125	72	10441	18000	20809	$30^{\circ}06'58''$
31	216	125	31031	54000	62281	$29^{\circ}53'01''$
32	128	75	10759	19200	22009	$29^{\circ}15'53''$
33	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$30^{\circ}00'00''$
34	27	16	473	864	985	$28^{\circ}41'55''$
35	5	3	16	30	34	$28^{\circ}04'21''$
36	400	243	100951	194400	219049	$27^{\circ}26'33''$
37	81	50	4061	8100	9061	$26^{\circ}37'38''$
38	8	5	39	80	89	$25^{\circ}59'21''$
39	405	256	98489	207360	229561	$25^{\circ}24'22''$
40	128	81	9823	20736	22945	$25^{\circ}20'51''$
41	25	16	369	800	881	$24^{\circ}45'41''$
42	125	81	9064	20250	22186	$24^{\circ}06'48''$
43	192	125	21239	48000	52489	$23^{\circ}52'06''$
44	243	160	33449	77760	84649	$23^{\circ}16'31''$
45	3	2	5	12	13	$22^{\circ}37'12''$
46	40	27	871	2160	2329	$21^{\circ}57'41''$
47	375	256	75089	192000	206161	$21^{\circ}21'35''$
48	36	25	671	1800	1921	$20^{\circ}26'40''$
49	64	45	2071	5760	6121	$19^{\circ}46'34''$
50	45	32	1001	2880	3049	$19^{\circ}09'57''$
51	25	18	301	900	949	$18^{\circ}29'32''$
52	27	20	329	1080	1129	$16^{\circ}56'32''$
53	4	3	7	24	25	$16^{\circ}15'37''$
54	320	243	43351	155520	161449	$15^{\circ}34'32''$
55	125	96	6409	24000	24841	$14^{\circ}57'05''$
56	162	125	10619	40500	41869	$14^{\circ}41'31''$
57	32	25	399	1600	1649	$14^{\circ}00'09''$
58	81	64	2465	10368	10657	$13^{\circ}22'25''$
59	5	4	9	40	41	$12^{\circ}40'49''$
60	100	81	3439	16200	16561	$11^{\circ}59'06''$
61	243	200	19049	97200	99049	$11^{\circ}05'17''$
62	6	5	11	60	61	$10^{\circ}23'20''$
63	32	27	295	1728	1753	$09^{\circ}41'17''$
64	75	64	1529	9600	9721	$09^{\circ}02'58''$
65	125	108	3961	27000	27289	$08^{\circ}20'45''$
66	144	125	5111	36000	36361	$08^{\circ}04'49''$
67	256	225	14911	115200	116161	$07^{\circ}22'30''$
68	9	8	17	144	145	$06^{\circ}43'59''$
69	10	9	19	180	181	$06^{\circ}01'32''$
70	27	25	104	1350	1354	$04^{\circ}24'19''$
71	16	15	31	480	481	$03^{\circ}41'43''$
72	135	128	1841	34560	34609	$03^{\circ}02'57''$
73	256	243	6487	124416	124585	$02^{\circ}59'04''$
74	25	24	49	1200	1201	$02^{\circ}20'18''$
75	250	243	3451	121500	121549	$01^{\circ}37'37''$
76	128	125	759	32000	32009	$01^{\circ}21'31''$
77	81	80	161	12960	12961	$00^{\circ}42'42''$
78	1	1	0	2	2	$00^{\circ}00'00''$

Tablo 19. Bu tablonun Mathematica'daki doğrulanması şu dosyadadır: Tablo 19, Oluşturma Tarihi: 14.03.2026, 21:21:23-Son Kaydetme Tarihi: 21.03.2026, 14:10:38.

Bu tabloda gördüğünüz gibi ***Robson***'un muhtemel kayıp dik üçgenleri mevcuttur. Çünkü ***Robson***'un Tablo 8'deki dik üçgenleri bu tablodaki dik üçgenler satır olarak şöyle eşleşirler: 4a-5, 8a-12, 11a-20, 6a-9, 9a-16 ve 12a-24.

Robson'un dik üçgenlerini ortaya çıkarabilmek için Tablo 17'deki dik üçgenlerin sayısını 2'ye katladım (ki Tablo 17'de toplam 41 satır var ve bunlardan 0, 17 ve 40. satırlardaki triviyal dik üçgenleri çıkarırsak $41 - 3 = 38$ ve buradaki tabloda triviyal olmayan dik üçgenlerin sayısı $79 - 3 = 76$ tanedir). ***Robson***'un hatası 4a, 8a, 11a, 6a, 9a ve 12a'daki dik üçgenlerin doğuranları 60'a bölmesi ve böylece onları Tablo 17'deki satırların arasına yerleştirmesidir. Fakat bunlardan sadece 4a, 8a ve 11a'nın Tablo 9'a yerleşmiş olması bile ***Robson***'u uyandırmadı. Çünkü Tablo 17'de görüldüğü üzere doğuranların hepsi birer tam sayı idi ve ***Robson*** bu 6 dik üçgenin birer tam sayı olan doğuranlarını 60'a bölerek kesirli olarak yerleştirmişti!

4.4.2. Sonuç. Genel olarak (α, β) eğim açıları aralığındaki (ki $\alpha < \beta$ açıları birbirine ne kadar yakın olursa olsun) (a_n, h_n, r_n) dik üçgenlerini doğuran $q_n \to \infty$ iken

$$[210] \quad Tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) < \cdots < m_2 < m_1 < \overline{m_0} = Tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right)$$

sıralamasındaki $m_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, $m_n = \frac{p_n}{q_n}$'nin **E.B.A.S.**'ı olmak üzere sonsuz tane (p_n, q_n) düzgün sayı çifti vardır. Çünkü $p_n \to \infty$ olduğundan (α, β) aralığında $m_n \to \infty$ tane doğuran eğimi vardır. Örneğin $(30^\circ, 45^\circ)$ aralığında Tablo 17'de 16 tane dik üçgen varken (ki ilk 15'i Plimpton 322 no'lu tablette mevcuttur) yukarıdaki Tablo 19'da 32 tane dik üçgen vardır.

Şimdi Plimpton 322 no'lu tabletin astronomik olarak kullanılmasına ilişkin ilkin şu bilgilendirmeyi yapmam gerekiyor.

4.4.3. Larsa'nın Fethi ve Sonuçları. ***I. Rim-Sin***, MÖ 1822-1763 arasında yaklaşık 60 yıl tahtta kalarak en uzun hüküm süren İlk Çağ krallarından biri oldu. Kardeşi ***Warad-Sin***'in halefidir. Larsa ve Isin'in Mezopotamya'da hakimiyet kurmak için mücadele ettiği bir dönemde tahta çıktı.

Hükümdarlık döneminin 13. senesinde Uruk kenti önderliğindeki bir birleşik orduyu yendi. MÖ 1794'te Isin'i ele geçirmesi en parlak başarısı oldu. Böylece Babil'in güneyinde kalan bölgenin kontrolünü ele geçirdi.

Resim 14. *Hammurabi* Larsa'nın fethindeyken!

Elam'a karşı kurulan ittifaka girmekte tereddüt edince ***Hammurabi***'nin öfkesini çekti ve MÖ 1763'teki kuşatmasına 6 ay dayanabildi (***Hammurabi***'yi duyuyor musun ***Trump***? Burası beni bayağı güldürdü). Oğulları ile birlikte Babil'e götürüldü ve muhtemelen orada öldü. Bu zafer, ***Hammurabi***'nin Mezopotamya'nın güneyini birleştirerek Babil'i bölgesel bir imparatorluğa dönüştürmesini sağladı.

Larsa'nın fethi, Mezopotamya toplumunda önemli değişimlere yol açtı. ***Hammurabi***, fethedilen şehirlerde tapınakları ve rahipleri Babil'in Marduk kültüne entegre ederek dini birliği güçlendirdi. Bu, Mezopotamya'da dini merkezileşmenin erken bir örneğidir. Toplumsal hiyerarşi, artı ürünün kontrolüyle daha karmaşık hale geldi; yazmanlar, rahipler ve askeri liderler gibi elit sınıflar güç kazandı. Örneğin Plimpton 322 no'lu tablet ***Edgar J. Banks***'in bildirdiğine göre Larsa'da keşfedildi ve MÖ 1800 civarında yazıldığına inanılmaktadır. Spesifik olarak, üzerinde açıkça tarih yazılı olan Larsa'da bulunan diğer tabletlerdeki biçimlendirme özelliklerine dayanarak, MÖ 1822-1784 dönemine ait olması muhtemeldir. ***Robson***, Plimpton 322 no'lu tabletin dönemin matematiksel olarak değil, idari belgeleriyle aynı biçimde yazıldığını belirtir. Larsa'nın fethinden sonra Plimpton 322 no'lu tablet de diğer tabletlerle birlikte Babil'in malı oldu ve Babilli kâtipler tarafından incelenerek Eski Babilonya Matematiği geliştirildi. Bunun gibi Larsa'daki seramik ve heykel buluntuları, fetih sonrası sanatsal üretimin devam ettiğini, ancak Babil etkisinin baskın hale geldiğini gösterir. Ayrıca, fetih, köle emeğinin tarım ve inşaat projelerinde yaygınlaşmasını hızlandırdı.

4.4.4. Thuban'ın MÖ 1820'lerdeki Larsa'daki Yüksekliği

Öncelikle Larsa'nın MÖ 1822'deki enlemi için şimdiki enlemini bilmemiz gerekiyor. Eğer Google Earth'te "Ara" çubuğunda "Larsa, Ancient City" yazarsanız size kırmızı renkli iğneyle yerini gösterecektir ve yer gösterici kırmızı iğnenin üzerine sarı renkli bir iğne koyarsanız Larsa'nın bugünkü enlem ve boylamının $(30^\circ 55'58.97''K, 46^\circ 7'57.63''D)$ olduğunu görürsünüz (Bkz. 2026-03-22 045417.png). Diğer taraftan Dünya'nın MÖ 1822'deki ve şimdiki eksen eğiklikleri için "Obliquity Applet" programına bakarsanız (ki linke tıkladığınızda "Güvenilir olmayan bir web sitesinin ziyaret edilmesi engellendi" uyarısı çıkar ama siz "Ayrıntıları göster"den "Riskleri anlıyorum ve devam etmek istiyorum" diyerek devam edin, çünkü sitede güncel olmayan SSL sertifika sorunu var. Fakat uygulamayı çalıştırabilmeniz için bilgisayarınızda Java'nın kurulu olması gerekiyor. Eğer sisteminizde yüklü değilse bunu Java sitesine girdinizde "Masaüstü Bilgisayarlar için Java İndir"den hallederseniz artık) karşınıza "Obliquity Applet (Eğiklik Uygulaması)" çıkacaktır. Burada "Start Year (Yıl Başlangıcı)" için -2000, "Stop Year (Yıl Sonu)" için -1500 ve "Intervall (Aralık)" için de 1'i seçiniz ve -1822 satırını bulunuz. Bu satırda Tablo 5.6.6'da gördüğünüz gibi "True" yazan 5. sütundaki değerin $23^\circ 54'15.88''$ olduğunu göreceksiniz. Bu, MÖ 1822'deki Dünya'nın eksen eğikliğinin gösterir. Aynı şekilde Dünya'nın 2026'daki eksen eğikliği $23^\circ 26'17.32''$ olduğundan aradaki fark $23^\circ 54'15.88'' - 23^\circ 26'17.32'' = 27'58.56''$ olur. Şimdi Larsa'nın MÖ 1822'deki enlemini bulabilmek için Resim 5.6.18'deki Stonehenge'deki gibi Larsa'nın şimdiki enlemine bu farkı eklersek $30^\circ 55'58.97'' + 27'58.56'' = 31^\circ 23'57.53''$ olur.

İkinci olarak Larsa'nın MÖ 1822'deki $(31^\circ 23'57.53''K, 46^\circ 7'57.63''D)$ koordinatlarını Starry Night Pro Plus programında girmeniz gerekiyor (ki programın 8.1.1.2094 sürümünü bilgisayara nasıl yükleyeceğinizi Tablo 5.6.7'de açıkladım). Bu programı bilgisayarınıza yükledikten sonra "Options (Seçenekler)" menüsündeki "View Location (Konumu Görüntüle)"yi seçin ve orada "Latitude/Longitude (Enlem/Boylam)"da Larsa'nın enlemi $31^\circ 23'57.53''K = 31^\circ 23.9588333\ldots' K$ ve boylamı $46^\circ 7'57.63''D = 46^\circ 7.9605'D$ olduğundan $(31^\circ 23.96'K, 46^\circ 7.96'D)$ koordinatlarını girmeniz yeterlidir (ki aslında Larsa'nın MÖ 1822'deki enlemi değişirken boylamı da değişmektedir ama bunun için çok güçlü bir simülasyon gerekir ve bunu belirleyemediğimiz için boylamı olduğu gibi bıraktım. Fakat Larsa'nın MÖ 1822'deki boylamını tam olarak bilmemize gerek yoktur, çünkü şimdiki $(30^\circ 55'58.97''K, 46^\circ 7'57.63''D)$ noktasının kuzeydoğusunda ama yakında olacak ve saat dilimi değişmeyecektir. Bu nedenle burada esas ilgilendiğimiz koordinat Larsa'nın enlemidir ve bunu da en hassas bir şekilde belirlemiş bulunuyorum). Eğer bu koordinatları ve "Time zone (Saat Dilimi)"ne 3.0'ı girdikten sonra "Save As New Observing Site (Yeni Gözlem Sitesi Olarak Kaydet)"i seçer ve "Site Name (Site Ad)"nda "Larsa" olarak yazarsanız "My Sites (Sitelerim)"de "Larsa" kaydedilmiş olacaktır. Eğer programdan çıkar ve yeniden Larsa'ya ihtiyacınız olursa "My Sites (Sitelerim)"deki "Larsa"ya tıklamanız yeterlidir, çünkü aksi takdirde yeniden koordinatları girmeniz gerekir. Şimdi "My Sites (Sitelerim)"de Larsa'yı seçerseniz sol üstte saatin sağında "Larsa" yazısı görünecektir ve sol üstte gün olarak "Mart 21", yıl olarak "1822 BCE" ve saati "01:34:47" yaparsanız Thuban'ın yüksekliğinin (Altitude) $36^\circ 54.926'$ olduğunu görürsünüz (Bkz. 2026-03-22 043920.png. Bu ekran görüntüsündeki Thuban kutup yıldızı sağ üstteki arama çubuğunda "Thuban" yazarak ve düşeydeki kuzey meridyeni "View" menüsündeki "Alt/Az Guides"da "Meridian" seçilerek elde edilmektedir). Bu, MÖ 21 Mart 1822'deki kutup yıldızı Thuban'ın Larsa'daki yüksekliğini gösterir. Dikkat ederseniz bu ekran görüntüsünde Thuban'ın azimutu (Azimuth) $359^\circ 59.996'$ olduğunda (ki bu Thuban'ın düşeydeki kuzey meridyeninden $0.004' = 0.24''$ eksik olduğunu yani solunda (Batı tarafında) olduğunu gösterir ve kuzey meridyenine bundan daha iyi yaklaşamazsınız) yüksekliği $36^\circ 54.926'$ olmaktadır (ki bu yükseklik kuzey meridyeninde bir çember çizen Thuban'ın maksimum noktasıdır). Diğer taraftan Tablo 17'deki 11. satırdaki ya da yukarıdaki Tablo 19'daki 18. satırdaki (3,4,5) dik üçgeninin eğim açısı $36^\circ 52'12''$ olduğundan demek ki birçok Eski Babil tabletinde gördüğümüz (3,4,5) dik üçgeninin esrarı buymuş. Çünkü aradaki fark $36^\circ 54.926' - 36^\circ 52'12'' = 2'43.56''$ dir.

Şüphesiz bu fark sıfırlanabilir ama "Obliquity Applet"teki MÖ 1800'lerdeki Dünya'nın eksen eksen eğikliği dengesizdir. Örneğin 2026-03-20 074127.png ekran görüntüsünde MÖ 20 Mart 1830'da Larsa'da Thuban'ın yüksekliğini $36^\circ 52.319' = 36^\circ 52'19.14''$ görmüştüm ve bu bende şok etkisi yapmıştı ama üstünkörü bir bakış attığım için ayarlar doğru değildi. Çünkü bu sırada Larsa'nın MÖ 1831'deki enlemini almıştım (ki aynı uygulamaya göre Dünya'nın eksen eğikliği $23^\circ 54'26.3''$ idi) ve Starry Night Pro Plus 8.1.1.2094'te MÖ 20 Mart 1830, 01:39:43'e ayarlamıştım. Eğer yukarıdaki ayarlamalara göre yani Larsa'nın MÖ 1822'deki enlemine göre yılı MÖ 1830 yaptığınızda $36^\circ 52.321' = 36^\circ 52'19.26''$ sonucu buna yakın olur ki buradan Larsa'da MÖ 1820'lerde Thuban'ın yüksekliğinin (3,4,5) dik üçgeninin $36^\circ 52'12''$ eğim açısındaki gibi olduğu sonucu çıkar. Burada anlaşılması gereken sonuç budur (ki bu sonucu anlamın en iyi yolu, Larsa'nın enleminin MÖ 1810-1840'a kadar belirlenmesi ve Starry Night Pro Plus'ta Thuban'ın yüksekliğini gözlemlemek olacaktır. 31 yıllık bu simülasyonda Thuban'ın yüksekliğinin (3,4,5) dik üçgeninin $36^\circ 52'12''$ eğim açısındaki gibi en iyi gözlemlendiği aralığın MÖ 1820'lerde ve en iyi gözlemlendiği yılın MÖ 1822'de olduğu görülecektir).

4.4.4.1. Thuban'ın Hüküm Sürdüğü Dönem

Thuban'ın kuzey meridyeninde bir kutup yıldızı olarak hüküm sürdüğü dönem MÖ 3900-1800'dedir. MÖ 1800'lerden sonra Thuban'ın yerini Kochab aldı ve o da MÖ 1800-300'e kadar hüküm sürdü. Mısır Piramitleri yapımı sırasında Thuban'ın konumu fena değildi. Örneğin Büyük Piramit'teki Kral Odası'nın kuzey şaftı Thuban'a yönlendirilmişti ve piramit yapımcıları $+47'23.66''$ hata yapmışlardı. Bu sırada Büyük Piramit'in enlemi (5.6.273)'e göre $30^\circ 31'20.18''$ iken Thuban'ın yüksekliği $31^\circ 40'52.34''$ idi (Bkz. Testo 5.6, Kral Odası'ndaki Kuzey Şaftı: Kutup Yıldızlarının Kralı Thuban, S. 64-65). Fakat MÖ 1820'lere geldiğimizde Thuban kuzey meridyeninden ayrılmak üzereydi ve yerine Kochab geliyordu. Örneğin MÖ 1822'de (ki bu sırada Larsa'nın kralı ***I. Rim-Sin*** idi) Larsa'nın enlemi $31^\circ 23'57.53''$ iken Thuban'ın yüksekliğinin $36^\circ 54.926' = 36^\circ 54'55.56''$ olması bu bozulmayı açıklar. Çünkü aradaki fark $31^\circ 23'57.53'' - 36^\circ 54'55.56'' = -5^\circ 54'32.56''$ olduğundan Thuban kuzey meridyeninden oldukça uzaklaşmış ve büyük bir çember çiziyordu (ki bu çemberin kuzey meridyenin kestiği 2 nokta vardır. Alttaki nokta Thuban'ın minimum yüksekliğini ve üstteki nokta maksimum yüksekliğini gösterir. Örneğin Thuban'ın MÖ 1822'de Larsa'daki $36^\circ 54.926'$ yüksekliği maksimum noktadaki yüksekliğidir). Bu sırada Thuban'a bakan Larsa'daki Rahipler (ki o günün astronomları onlardı), Thuban'ın gökteki yüksekliğinin (3,4,5) dik üçgeninin $36^\circ 52'12''$ eğim açısındaki gibi olduğunu gördüler ve (3,4,5) dik üçgeni hem Eski Babilonya'daki tabletlerde hem de Eski Mısır'daki piramitlerde demirbaş oldu. Fakat (3,4,5) dik üçgeninin ilk kullanıldığı yer Khafre'nin Piramiti'nde oldu (Bkz. Testo 5.6, Khafre Piramiti $k(3,4,5)$ Dik Üçgenine Göre İnşa Edildi, S. 57-58).

D. PAMUKTULUM, 22.03.2026, 07:35.