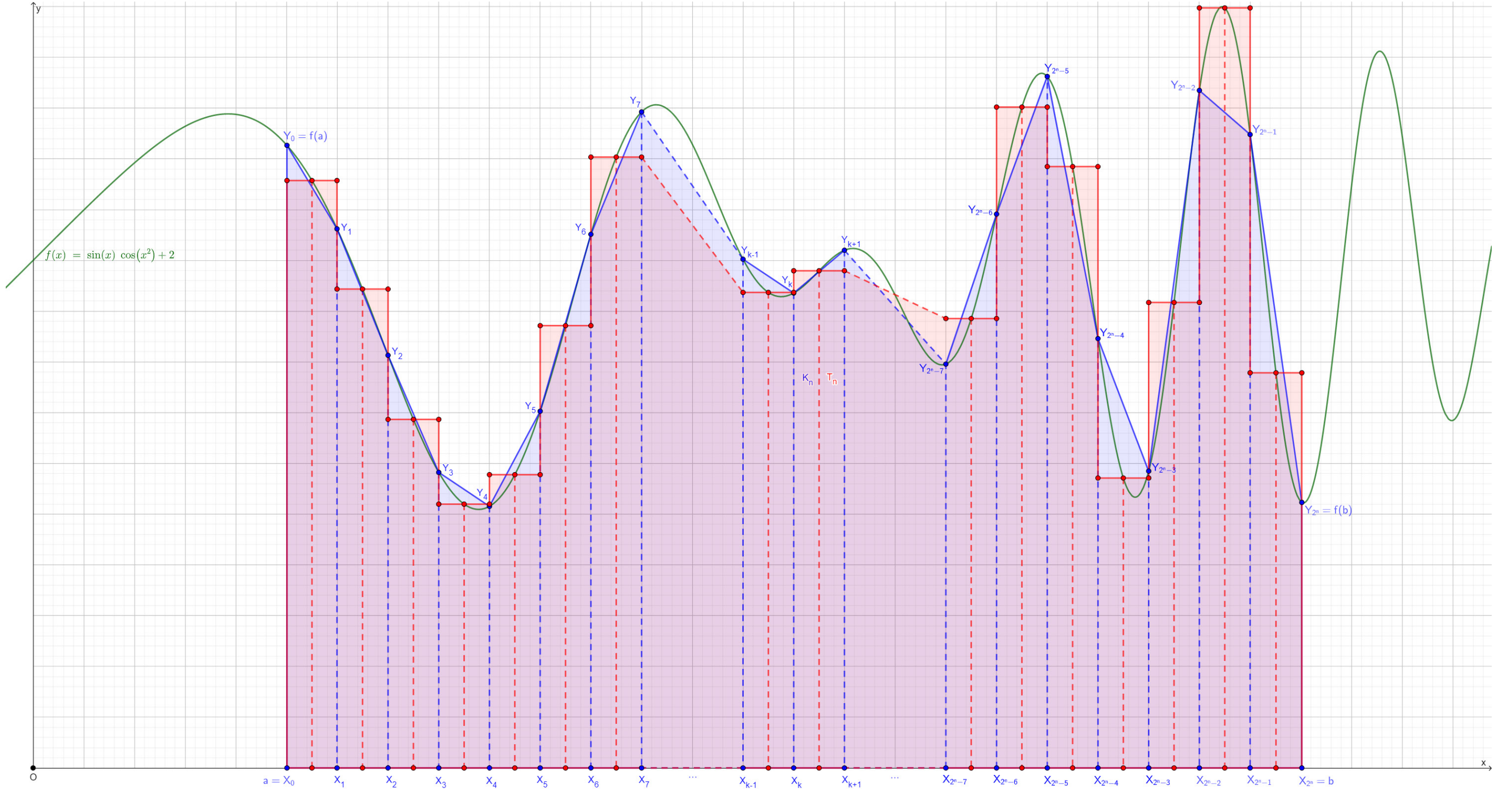


Bileşik Trapez Metodu. Genel olarak $I = \int_a^b f(x)dx$ integrali için bileşik trapez kuralına göre,



Şekil 1. $f(x)$ eğrisindeki [bileşik trapez metodu](#). Bu bileşik metoda göre hem trapez yönteminin hem de orta nokta yönteminin anlaşılması açısından $f(x)$ eğrisini (ki bu fonksiyon sol üst köşede hemen eğrinin altında yazar) dalgalı bir fonksiyon olarak seçtim. Böylece hangi yöntemin $f(x)$ 'in altındaki alanı en iyi şekilde topladığını açık bir şekilde görülür hale getirmiş oldum. Fakat her bir alt aralıktaki dikdörtgen ile trapezin $f(x)$ 'in altında kalan alana yaklaşımlarında göz yanıltıcı olabiliyor. Örneğin, (soldaki ilk 3 alt aralıktaki trapezler daha yakınmış gibi gözükür ama gerçekte dikdörtgenler daha yakındır. Bunun neden böyle olduğunu araştırdığımızda (ki her bir alt aralıktaki yani $k = 1, 2, \dots, 2^n$ için trapezin alanı K_k , dikdörtgenin alanı T_k ve $f(x)$ 'in altında kalan alan I_k olmak üzere), $k = 1, 2, 7, 2^n - 5, 2^n - 4, 2^n - 1$ için $K_k \lesssim I_k \lesssim T_k$ iken $T_k - I_k \cong 2(I_k - K_k)$ ve diğer k değerlerinde $T_k \lesssim I_k \lesssim K_k$ iken $K_k - I_k \cong 2(I_k - T_k)$ sonuçlarının mevcut olduğunu görürüz (ki bunları fark etmemeniz mümkün değil. Bkz. "[Bileşik Trapez Metodu.ggb](#)"). Bunlar Snellius bağıntılarını gösterir. Çünkü her bir dikdörtgenin alanı "[1.1. Trapez Metodu](#)"nda gösterdiğim üzere orta noktalardan $f(x)$ 'e çizilen teğetlerle yani [tanjant doğruları](#)yla elde ediliyordu ve bu yüzden ilk bağıntı *Snellius*'un π için düzgün çokgenlerde kullandığı orijinal bağıntı iken ikincisi bunun ekstrapolasyonda karşılığı olan [\(2.24\)](#)'teki bağıntıdır. Bu son bağıntı ilk kez 1911'de *Becker* tarafından keşfedildi ama ekstrapolasyonda ilk kez [\(2.24\)](#)'te gösterilmiştir. Bunu ekstrapolasyonda aritmetik özellikten sonra 2. özellik olarak kazandırırken tıpkı "[Holland lässt den König jubeln](#)" haberindeki [Hollanda Kralı](#)'nda olduğu gibi büyük

bir sevinç içindeydim. Eğer giriş olarak K_n trapez formülü ve T_n orta nokta formülü yerine, bunların bir ağırlıklı ortalaması olan $E_{n+1,1}(K) = \frac{4K_{n+1} - K_n}{3} = \frac{4 \cdot \frac{K_n + T_n}{2} - K_n}{3} = \frac{2T_n + K_n}{3}$ yaklaşımını alırsanız, (1.76)'daki *Ole Amble*'in $\hat{T}_2^n$ ve $\hat{U}_2^n$ yaklaşıklıklarıyla I 'ya aynı mertebeden yaklaşırsınız. *Romberg* bu durumu biliyordu (ki *Snellius*'un $\frac{2T_n + K_n}{3}$ algoritmasını değil; *Huygens*'in $\frac{4K_{n+1} - K_n}{3}$ algoritması olarak biliyordu), dolayısıyla *Ole Amble*'in yaklaşıklıklarını geçmeyi asla düşünmedi!

Önsöz

şeklindeki $\forall x \in [a, b]$ aralığının 2^n tane eş alt aralığa bölünmesiyle oluşan $\forall x_k \in [x_{k-1}, x_k]$ eş alt aralıklarında tanımlı $x_k = x_0 + kh_n$ (ki $x_0 = a$ ve $x_{2^n} = b$ 'dir) apsisleri için trapezin (yamuk) alanı, yüksekliği $\Delta x_{k-1} = x_k - x_{k-1} = x_0 + kh_n - x_0 - (k-1)h_n = h_n = \frac{b-a}{2^n}$ ve tabanları $f(x_{k-1})$ ve $f(x_k)$ olan trapezin alanından $\Delta x_{k-1} \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}$ olduğundan,

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{2^n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{2^n} \Delta x_{k-1} \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} = \frac{\Delta x_{k-1}}{2} \left(\sum_{k=1}^{2^n} f(x_{k-1}) + \sum_{k=1}^{2^n} f(x_k) \right) = \frac{\Delta x_{k-1}}{2} \left(\sum_{k=0}^{2^n-1} f(x_k) + \sum_{k=0}^{2^n-1} f(x_k) - f(x_0) + f(x_{2^n}) \right) \\ &= \Delta x_{k-1} \frac{f(x_{2^n}) - f(x_0)}{2} + \Delta x_{k-1} \sum_{k=0}^{2^n-1} f(x_k) = \Delta x_{k-1} \frac{f(x_{2^n}) - f(x_0)}{2} + \Delta x_{k-1} f(x_0) + \Delta x_{k-1} \sum_{k=1}^{2^n-1} f(x_k) = \Delta x_{k-1} \frac{f(x_0) + f(x_{2^n})}{2} + \Delta x_{k-1} \sum_{k=1}^{2^n-1} f(x_k) \\ &= h_n \frac{f(a) + f(b)}{2} + h_n \sum_{k=1}^{2^n-1} f(x_0 + kh_n) = h_n \frac{K_0}{h_0} + h_n \sum_{k=1}^{2^n-1} f(x_0 + kh_n) = \frac{K_0}{2^n} + h_n \sum_{k=1}^{2^n-1} f(a + kh_n) = K_n \end{aligned}$$

eşitliklerine göre I 'ya alttan (üstten) yaklaşım gösteren K_n trapez formülünü şu şekilde elde etmiş oluruz:

$$(1) \quad K_n = \frac{K_0}{2^n} + h_n \sum_{k=1}^{2^n-1} f(a + kh_n).$$

Diğer taraftan, şekildeki her bir $[x_{k-1}, x_k]$ aralığının orta noktasının apsisi $\frac{x_{k-1}+x_k}{2} = \frac{x_0+(k-1)h_n+x_0+kh_n}{2} = x_0 + \frac{(2k-1)h_n}{2} = a + (2k-1)h_{n+1}$ ve ordinatı $f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right) = f(a + (2k-1)h_{n+1})$ 'dir ve bu orta noktalardan geçen dikdörtgenin alanı, tabanı Δx_{k-1} ve yüksekliği $f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)$ olan dikdörtgenin alanından $\Delta x_{k-1} f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)$ olduğundan,

$$I = \int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{2^n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{2^n} \Delta x_{k-1} f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right) = h_n \sum_{k=1}^{2^n} f(a + (2k-1)h_{n+1}) = h_n \sum_{k=0}^{2^n-1} f(a + (2k+1)h_{n+1}) = h_n \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(a + \left(k + \frac{1}{2}\right)h_n\right) = T_n$$

eşitliklerine göre I 'ya üstten (alttan) yaklaşım gösteren T_n orta nokta formülünü de şöyle elde etmiş oluruz:

$$(2) \quad T_n = h_n \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(a + \left(k + \frac{1}{2}\right)h_n\right).$$

Bu formüllerden ilkinin [Teorem 1.3](#)'te geniş bir şekilde ele almış ve buna “**İndirgeme Bağıntısı**” adını vermiştim. Ama bu bağıntının bu şekildeki kullanımı yani indirgeme anlamındaki kullanımı kaynaklarda geçmez. Bunun yerine tüm kaynaklarda ve üniversitelerdeki kullanım şekli, Michigan Devlet Üniversitesi'nden **Wayne Eugene Hoover**'ın 1977'deki “[Numerical Methods In Multiple Integration](#)” adlı doktora tezinin 31. sayfasındaki (3.5.1) formülündeki gibidir!

Fakat bu formül **Prof. Byrnjulf Owren**'in 2011 tarihli “[Werner Romberg: Vereinfachte numerische Integration](#)” makalesinde ya da [\(1.45\)](#)'teki 1. bağıntıda şöyle geçer: $0 < k$ için $f_0 = \frac{f(a)+f(b)}{2}$ ve $f_k = f(a + kh_n)$ olmak üzere

$$(3) \quad K_n = h_n \sum_{k=0}^{2^n-1} f_k.$$

Bu, bir zorlama tanımdır; çünkü f_0 , toplamdaki ilk ve son terimlerin toplamından oluşur.

Ama madem böyle bir tanım kullanılmış, o zaman ben de makalemdeki ispatlarda şu tanıma kullanayım:

$$(4) \quad K_n = h_n \sum_{k=0}^{2^n} f(a + kh_n).$$

Yalnız bu toplamın ilk ve son terimlerin katsayılarının $\frac{1}{2}$ ve diğer terimlerin katsayılarının 1 olarak alındığına dikkat ediniz!

Owren, (2) formülünü de anılan makalesinde (ya da [\(1.45\)](#)'teki 2. bağıntı) şöyle yazmıştı: $f_{k+\frac{1}{2}} = f\left(a + \left(k + \frac{1}{2}\right)h_n\right)$ olmak üzere

$$(5) \quad K_n = h_n \sum_{k=0}^{2^n-1} f_{k+\frac{1}{2}}.$$

Fakat o, (3)&(5)'i sadece **Romberg**'in metodunda kullandığı yaklaşıklıkları açıklamak için kullandı (Bkz. (5) no'lu orta nokta formülü için “[Numerical Methods In Multiple Integration](#)” tezinin 22. sayfasındaki (3.4.1)'in üzerindeki formüle). Ancak bu formüller 19. yy.'da biliniyordu! (Bkz. **D.C. Joyce**'nin “[Survey of Extrapolation Processes In Numerical Analysis/3. Numerical integration](#)” makalesinde (11) ve (23) no'lu formüller olarak geçen **Sheppard**'ın 1900 tarihli “[W. F. SHEPPARD \(1900\). Some quadrature formulas, Proc. London Math. Soc., 32, pp. 258-277](#)” makalesindeki (1) ve (27) no'lu trapez ve orta nokta formüllerine. Ama bu formüller de 19. yy.'dan geliyordu). Buradan **Prof. Byrnjulf Owren**'e, 19. yy.'dan kalma bu hatırlatmayı yaptığı için bir kez daha teşekkür ederim!

Bir Sürpriz!

Çok ilginçtir, “[Numerical Methods In Multiple Integration](#)” tezini 02.05.2021, 22:48'de aldıktan sonra incelerken 34. sayfadaki (3.7.1) örneğini görünce bayağı bir şaşırmıştım. Ne şaşırması, resmen şok geçiriyordum! Çünkü sırf bu örnek için [RİK 3](#)'ü yeniden düzenlediğimi çok iyi hatırlıyorum. Hatta bu dosyayı web sitemden

Önsöz

kaldırdıktan sonra bir arkadaşım heyecan ve merakla neden kaldırdığımı sormuştu ve ben de ona **Romberg**'in örneğinden birkaç problem (4 tane) türettiğimi, onları da makaleye ekleyip yeniden yayınlacağımı söylemiştim. Bu örnek orada 28.01.2020, 13:52 tarihli olarak (1.73)'te geçer ve buna "**Romberg'in Örneğinin Dualitesi**" demiş, tüm yönleriyle incelemiştim. Çünkü o sırada **Romberg**'in (1.55)'teki örneği nasıl çıkardığına kafa yormuştum! (1)

Bir Sürpriz De Benden Olsun: Ole Amble Algoritması

Burada dikkat ederseniz (1.73)'ü verdiğim yerde, Resim 1.4'te **Werner Romberg** ile birlikte çalışmış **Ole Amble**, **Tor Evjen** ve **Thomas Hysing**'in bir resmi vardır. Ama bu resim o sırada çok kötü bir şekilde renklendirilmişti ve şimdi onu en mükemmel şekilde aşağıda görebilirsiniz:



Resim 1. Soldan sağa doğru **Doç. Ole Amble**, **Thomas Hysing**, **Tor Evjen** ve sırtı dönük masadaki kişi ise muhtemelen daha sonra Elektrik Bürosu için CEO olan **Kjell Kveim**'dir. Ama onların **NUSSE**'nin (ki ZUSE'den türetilmiş Norveç'in ilk dijital bilgisayarıydı) çevresine akın etmesine neden olan kişi, Norveç'in gururu **Ole Amble**'dir, Oslo Üniversitesi'nin Fizik Bölümü'nün bodrum katı-1954. **Fotoğraf:** **Sverre A. Børretzen**/Norske Museum.

NUSSE, Mart/Nisan 1954'te ilk yapım aşamasında tamamlandı. Çalıştırılan ilk program bir bilgisayar oyunuydu. **Ole Amble**, **NIM** oyununun dijital bir varyantını geliştirdi (Bkz. "**NIM and the Powers of Two (Tanton Mathematics)**"). Makine kazanırsa "**Yaşasın (Hurra)**" yazardı. Eğer insan kazanırsa "**Bravo**" yazardı (Bkz. "**NUSSE**").

Werner Romberg'in tezinde bahsettiği **Ole Amble**, bu resimdeki sol baştaki kişidir. **Amble** o sırada **NTNU**'da (ki o sırada **NTH** idi) doçent idi ve 1994'ten beri **NTNU**'da görev yapan **Prof. Brynjulf Owren**'e kadar birkaç neslin geçmesi gerekiyordu. Bunlar arasında en çok tanınan, "**Romberg Metodu**" hakkında "**Tore Håvie-Remarks On Some Modified Romberg Algorithms For Numerical Integration, 1986**" makalesiyle şöhret olan **Tore Håvie**'dir. İnanır mısınız bu makaleyi Google kitaplığındaki "**Numerical Mathematics and Applications**" kitabının içinde görür görmez nasıl alabilirim diye bayağı bir uğraşmıştım: OneNote ile sayfa sayfa alıp Photoshop'ta PDF

(1) Orijinaldeki **RİK 3** dosyasını 3 sayfalık "**Önsöz**" ve 2 sayfaya yakın "**1.7.3. Romberg'ten Türetilmiş Örnekler**" ekleriyle güncelledim. Bunlardan, "**Önsöz**"de **Romberg**'in içinden geçtiği tarihsel süreci geniş bir şekilde ele aldım. Ben hayatımda böylesine ketum bir kimse görmedim. Özellikle Nazi Almanyası dönemine ilişkin hayatı bir sır gibi. Eee, Almanlar da anlatmadığına göre ne yapacaktım? O zaman madem onlar anlatmıyor ben de bir Nazi dönemi araştırmacısı olarak, "**iyi bir hikâye çıkarabilirim!**" düşüncesiyle bir "**Önsöz**" yazmaya karar verdim. **Romberg**'in politik ikizi gibi duran **Sabahattin Ali**, kesinlikle başat bir örnekti. Çünkü **Sabahattin Ali**'nin Almanyadaki öğrencilik anısı, **Romberg**'in öğrenciliğinin adeta izdüşümü gibiydi. İnanmazsanız **Reinhard Siegmund-Schultze** tarafından kaleme alınan **Romberg**'in Nazi dönemine ait bilinen tek anısının altına karbon kâğıdı koyun, **Sabahattin Ali**'nin Almanyadaki öğrencilik yıllarını görürsünüz (Bkz. "**1.6. Romberg'in Orijinal Metodu**"). İşin ilgin yanı şu ki, **Sabahattin Ali**'nin Almanyadaki öğrencilik yıllarını (1928-1930) şimdiye kadar kimseden duymadım; ne bir edebiyatçıdan, ne de bir solcudan. Resmen buradaki formüller gibi ben keşfetmek zorunda kaldım. Sanki bir sır gibi saklamışlar. Ama bu anıları **Rasih Nuri İleri**'nin "**40'lı Yıllar-2**" kitabında görür görmez **Romberg**'inkiyle örtüşmesi, daha doğrusu özdeşleşmesi bende şok etkisi yapmıştı. Çünkü **Sabahattin Ali**'nin öğrencilik anılarını okurken sanki **Romberg**'i okuyordum). **Sabahattin Ali**, **Orhan Dirik** ve adlarını burada veremediğim bizimkilerin bırakın Almanları, tüm dünyanın tir tir titrediği **Hitler**'in karşısındaki onurlu duruşunu her zaman takdir etmişimdir (Bkz. "**Werner Romberg Türkiye'de**", "**Romberg İntegrali Kronolojisi 3**"). İkinci ekte hiç abartmıyorum, **Romberg**'in (1.55)'teki örneği nasıl çıkardığını üniversitedeki hocalarımızın yaptığı gibi açık açık gösterdim ve bundan (1.73) örneğini türeterek bu örnekler arasındaki ilişkiyi en mükemmel şekilde ele aldım. **Örnek 2** bunun neticesinde ortaya çıktı. **Örnek 3** ve **Örnek 4**, **Romberg**'in ve onun dualitesi olan (1.73) örneklerinin genelleştirilmiş şekilleridir. Bu örnekleri π 'nin geometrik döneminde başat örnekler olması nedeniyle ele aldım ve aralarındaki ilişkiyi gösterdikten sonra 16-17. yy.'daki Avrupalı matematikçilerin çalışmalarından söz ettim!

Önsöz

kitapçığına dönüştürmüştüm. Ama bu ve benzeri aldığım kaynaklardan mutlaka bir şekilde yararlanmışımdır. Örneğin web sitemin girişindeki Mathematica Programları'ndaki "[4. Lineer Dışkestirimler](#)" ve "[5. Yüksek Mertebeden Dışkestirimler](#)"ın asimptotik hataları için **Tore Håvie**'nin makalesindeki (8)&(24)'teki katsayılardan yararlanmışım!

Fakat bu resim NUSSE'nin ilk çalıştırıldığı anda çekilen bir hatıra fotoğrafı idi:



Resim 2. [NUSSE](#), Alman mucit [Konrad Zuse](#)'nin ilki 1936'da olmak üzere 1930-1940'larda dünyada ilk sayısal ve hafızalı programlanabilir Z1-Z4 adını verdiği ZUSE serisinin Norveççe adıdır. Çünkü baş harfi N, "Norske (Norveç)"den ve çift S de ZUSE'nin Norveççe'de okunuşundan geliyordu (ki "S" harfi Norveççe'de "[ess](#)" olarak yani çift S ile birlikte okunur. Aynı şekilde, Norveççe'de F, J, L, N, R, Z harflerinin okunuşlarında da çift sessiz harfli seslendirmeler vardır). Adana-Urfa kebablardaki gibi bir şey yani. Ha Adana kebab, ha Urfa kebab. Aralarında fark yok. Bu konuda "[Datamaskin](#)"de NUSSE'nin APE (X) C (veya sadece Apex)'den geldiği söylense de (ki X Norveççe'de N ile değiştirildi), "[The Pioneer Era In Norwegian Scientific Computing \(1948-1962\)](#)" makalesinin 3. sayfasından da görüldüğü üzere, kurulması ilk planlanan makinenin bir ZUSE makinesi olduğu ve sonra plan değişikliği nedeniyle APEX C'ye yöneldikleri belirtilir. Yani ZUSE, oldu NUSSE. İnanmazsanız [Pål Waaktaar](#)'a sorun, o size ZUSE'yi ZUSSE diye okuyacaktır!

NUSSE, Mart/Nisan 1954'te Oslo Üniversitesi'nin Fizik Bölümü'nün bodrum katında ilk yapım aşamasında tamamlandı. Çalıştırılan ilk program, matematikçi [Ole Amble](#)'in [NİM](#) adlı oyunun dijital bir varyantıydı. Yukarıdaki Türkçe'deki gibi "MATEMATIKK" yazısı ve onun altındaki "(aslen sayılar, semboller ve bunların çözümde kullanımları üzerine yapılan çalışmalardır (-er opprinnelig læren om tall og symboler og bruk av disse til løsning av oppgaver))" açıklaması ve onun altında da çalıştırılan ilk programın şeması ve Resim 1'deki fotoğraf, NUSSE'nin ilk çalıştırıldığını anın hatırasına konulmuşlardır. NUSSE 1956'da yeni inşa edilen SI binasına taşındı ve 1961'e kadar orada hizmet verdi. 1961'de hizmet dışı bırakıldı ve şimdi Norveç Bilim ve Teknoloji Müzesi'nde duruyor. Teknik özellikleri şöyledir: Giriş-Çıkış: [Delik bandı](#), 32 Bit [sözcük uzunluğu](#), Bellek: 512 kelime (döner tambur), Hız: Operasyon başına 1-16 milisaniye ya da saniyede yaklaşık 500 kelime, Güç Tüketimi: 1.5 kW.

Romberg söz konusu [Ole Amble](#)'in algoritmasını "[Vereinfachte numerische Integration von Werner Romberg](#)" tezinde ele aldı ve şimdi "**Bileşik Trapez Kuralı**" denilen kendi metoduyla karşılaştırdı. Orada mavi tablo **Romberg**'in ve turuncu tablo ise [Ole Amble](#)'in algoritmalarından elde edilen sonuçları gösterir ve bu sonuçlara göre [Ole Amble](#)'in algoritmasının yakınsaklık hızının, **Romberg**'in algoritmasına göre 1 merteye önde olduğu görülmektedir. Ama **Romberg** bunu asla dert edinmedi, çünkü metoduna göre [Ole Amble](#)'in tablosunun her sütunundaki sonuçların benzerlerini bir sütun sonrasında görecekti (Bkz. Şekil 1). Ama **Romberg** bu sonuçları NUSSE'den değil [MADAS ATG-20](#)'den alıyordu!

Bu konuda **Romberg** ile 14.10.1996'da [Heidelberg'in meşhur kalesi](#) ve şehrin yukarıdan izlenebildiği mükemmel bir restoranda röportaj yapan [Seiji Fujino](#), **Romberg**'e metodu nasıl bulduğunu sorduğunda, şu yanıtı aldı: "Sonrasında profesöre **Romberg İntegrali**'ni nasıl bulduğunu sordum. O dönem profesörün kullandığı bilgisayar İsviçre malı "**MADAS**" adında ([MADAS ATG-20](#)) bir hesap makinesiymiş ve hafızası yalnızca 30 kelimeyi barındırabiliyormuş. Bir seferinde nümerik integrali Simpson integral metoduyla denediğinde, kesin sonuca bir türlü ulaşamamış. Bu sebeple Gauss integral yöntemiyle denemiş, fakat bu sefer de katsayıları depolarken hafıza doluvermiş. İşte bu şartlar altında Romberg integrali fikri aklına gelmiş. Hem kodlaması kolay, hem fazla hafıza gerektirmiyor, hem de yakınsaklığı bulmak kolay.", [Romberg integralinin mucidi Werner Romberg ile bir röportaj gerçekleştirdim, Seiji Fujino, 14.10.1996.](#)

Önsöz

Demek ki **Romberg**, tezindeki hesapları [MADAS ATG-20](#) yerine NUSSE ile yapmış olsaymış, o zaman adıyla anılan yöntemi bulamayacakmış. Çünkü yöntemin keşfi [MADAS ATG-20](#)'nin hafıza yetersizliğinden kaynaklanıyordu. Yani **Romberg** Trondheim'dan Oslo'ya uçakla gitse (ki bu 1 saat alır) ve bu hesapları NUSSE'de yapsaydı, şimdi adıyla anılan yöntemi keşfedemeyecekti. Çünkü [MADAS ATG-20](#)'nin hafızası 30 kelime iken NUSSE'ninki 512 kelimeydi. Bu durumda **Romberg** NUSSE'de Simpson yöntemi ya da Gauss yöntemiyle rahat rahat hesaplar yapabilir ve sonuçlarını milisaniyeler içinde alırdı. Ama bunların önce Resim 2'deki program şemasında görüldüğü üzere programlarının yapılması (ki [MADAS ATG-20](#)'de Simpson yöntemiyle kesin bir sonuç elde edememesinin nedeni budur. Bkz. Web sitemdeki "[Mathematica Programları](#)" adlı 5. menüye) ve sonra NUSSE'de çalıştırılması gerekiyordu. Galiba bundan kaçınıldı ve **Romberg** hesaplarını NUSSE yerine bir hesap makinesinde ([MADAS ATG-20](#)) yapmayı tercih etti. Ama bu kararı verdikten sonra çok pişman olmuş olmalı. Çünkü hiçbir nümerik integral yöntemini çalıştıramadı ve sonrasında hibrit bir yöntem icat etmek zorunda kaldı. Bu yöneme daha sonra onun adı yani "**Romberg İntegrali Yöntemi**" adı verildi!

Romberg'in II İle İmtihanı!

Romberg, tezindeki hesaplara geçtiğinde ilkin $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7, F_8$ trapez yaklaşıklıklarını hesaplar. Ama bunlardan önce $F(a) = 1.570796327$ ve $F(b) = 0$ değerlerini verir. Öyle görünüyor ki **Romberg** ilk ve son değerlerin hesabında $\pi = 3.141592653589 \dots$ sabitini 10 basamaktan fazla aldı. Çünkü [MADAS ATG-20](#)'nin kapasitesi 10 basamak idi ve ötesindeki rakamları gösteremiyordu!

Bilindiği üzere **Romberg** trapez yaklaşıklıklarının hesaplarına geçmeden önce ilkin,

$$(6) \quad F(a) = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot a\right) = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 0\right) = \frac{\pi}{2} \cdot 1 = \frac{\pi}{2} \cong 1.570796327$$

değerini hesapladı. Ama bu işlemi [MADAS ATG-20](#) ile yaptığınız zaman, o size bu işlemin sonucunu $\frac{\pi}{2} \cong \frac{3.141592653}{2} = 1.570796326$ olarak verir. Örneğin, **Robert Mařík** [MADAS ATG-20](#)'de π için 355/113 bölme işlemini yaptı ve makine tıkr tıkr [3.141592920](#) sonucunu verdi (ki günümüzdeki hesap makineleri bu sonucu yuvarlatmadan dolayı 3.14159292 olarak verir. Bkz. "[Casio FX-702P](#)"). Ama $\pi \cong \frac{355}{113} = 3.14159292035 \dots$ sonucundan görüldüğü üzere 9. ondalığa devretme olmadığından makinenin günümüzdeki hesap makinelerindeki gibi yuvarlatma işleminin yapıp yapmadığı anlaşılmaz. Ancak **Mařík** bir diğer hesabında aynı işlemi bu sefer 6 ondalık olacak şekilde yaptığı zaman, makine [3.141592](#) sonucu verdi. Demek ki [MADAS ATG-20](#) günümüzdeki hesap makinelerindeki gibi yuvarlatma işlemi yapmıyormuş. Çünkü eğer öyle olsaydı, makine [3.141592](#) yerine 3.141593'ü gösterirdi!

Bununla birlikte **Romberg**, $F_{8,0} = F_0$ son trapez yaklaşıklıklığını hesaplarırken karşısına yine π çıktı ve bu sefer 4'e bölerek şu sonucu buldu:

$$(7) \quad F_0 = (b - a) \cdot \frac{F(a) + F(b)}{2} = (1 - 0) \cdot \frac{F(0) + F(1)}{2} = 1 \cdot \frac{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 1\right)}{2} = \frac{\pi}{4} \cong \frac{3.141592653}{4} = \frac{1.5707963265}{2} = 0.78539816325 \cong 0.785398163.$$

Burada şuna dikkat ediniz: **Romberg**, $\frac{\pi}{2}$ için eğer (6)'daki sonucu alsaydı şu sonucu bulacaktı:

$$(8) \quad F_0 = \frac{\pi}{4} = \frac{\frac{\pi}{2}}{2} \cong \frac{1.570796327}{2} = 0.7853981635 \cong 0.785398164$$

Tamam, [MADAS ATG-20](#)'de 1.570796327'yi 2'ye böldüğünüz zaman yine 0.785398163'ü bulursunuz ama π 'nin tüm basamaklarını doğru girip 2'ye bölerseniz bile, 1.570796327'yi göremezsiniz! Ya da tersini düşünelim: $F(a) = \frac{\pi}{2} \cong 1.570796327$ işlemindeki π 'yi bulmak isterseniz $\pi \cong 3.141592654$ sonucunu bulursunuz ki günümüzdeki 10-basamaklı tüm hesap makineleri yuvarlatmayla şu sonucu verir (Bkz. "[Casio FX-603P](#)"):



Resim 3. Üniversitedeyken bunun bir alt modeli [Casio FX-880P](#)'yi kullanıyordum. Her ikisinde de π tuşu aynı yerdeydi ve ekrandaki π değerini görüntüleyebilmek için SHIFT'e bastıktan sonra sağ alt köşedeki sağdan 2. tuşa basmanız gerekiyordu!

Fakat bu sonuç π 'nin tüm basamaklarını, en azından son basamakta, doğru göstermez. Yani (6)'da bir yuvarlatmanın yapıldığı açıktır ama bunun **Romberg**'in mi yaptığı, yoksa Oslo'daki **Ole Amble**'a telefon açarak bu işlemin NUSSE'de mi yaptırıldığı belli değil! Ama bana kalırsa **Romberg** elle düzeltti!

Peki **Fujino**, **Romberg** ile neden görüşmüştü?

Bu konuda hiçbir açıklama bulamadım ve elimdeki 2 sayfalık **Fujino**'nun **Romberg** ile röportajında da herhangi bir açıklama göremedim. Orada **Fujino**, **Romberg** ile görüşmeye 1996'nın Haziran'ında karar verdiğini ve bunun için Nagoya Üniversitesi'nden **Prof. Mitsui Enomito** ve **Prof. Rolf Rannacher** ile iletişime geçerek şu sonuca ulaşıyor: "E-postayı yazan profesör de (**Prof. Rolf Rannacher**) Amerikalılar gibi '**Romberg İntegrali**' terimini kullanıyordu. **Prof. Romberg**'in Almanya'nın yakın tarihinin talihsiz fırtınasıyla birlikte sürüklenip günümüzde hayatta olan biri olduğunu öğrenince birden onun hayatına ilgi duymaya başladım. Bu sebeple, yukarıda belirttiğim teze ulaştı ve literatür arama sisteminde profesörün diğer çalışmalarını araştırınca, gerçekten de 70'li yıllarda Heidelberg üniversitesine mensup olduğunu fark ettim. Ayrıca, isminin '**Werner**' olduğunu buldum fakat bundan daha ileriye götürecek bir ipucuna erişemedim."

Bu açıklamalara göre **Fujino**'nun **Romberg** ile görüşmesi, sadece onun hümanistliğinden yani insancılığından kaynaklanıyormuş. Ama gerçek bu değil. Toplanın bakalım: **RIK 3**'teki 2. Bölüm'ün girişinde **Takebe** ve Türk-Japon İlişkileri'ne 1.25 sayfa (A4'te 2.5 sayfa) ayırmış ve **RIK 4**'teki 2.4.1'de de **Takebe**'nin algoritmasını orijinal çalışmadan modernleştirerek günümüze aktaran **Naoki Osada**'dan bahsetmişim. Peki bu makalelerde **Takebe**'ye neden bu kadar çok yer verdim? Çünkü günümüzde "**Richardson Ekstrapolasyonu**" olarak bilinen ekstrapolasyonun 1710'da, muhtemelen 1695'ten önce, **Takebe** tarafından keşfedilmiş olduğunu öğrenmişim ve bunun izini sürüyordum. İşte **Fujino**'nun da **Romberg** ile görüşmesinin asıl nedeni, **Edo dönemi**nin matematikçilerinden **Takebe Katahiro**'nun anısının izini sürmekten başka bir şey değildi. Ama o, bu izi sürerken **Romberg**'in dramatik hayatından etkilendi ve bu görüş ağır basmaya başladı. Yukarıdaki açıklamaları bunu gösterir!

İçimizdeki Şeytan!

Bu arada kimsenin içinde bir ukde kalmaması için şuna bir bakalım: "**Terzi, kendi söküğünü dikemez!**" Ne demek bu? Örneğin, dünyada o kadar matematikçi var ve hiç kimse 1955'e kadar bu yöntemi göremezken neden **Romberg** gördü? Peki **Romberg**, 1955'te (**2.43**) ile **Tablo 2.4**'ün ilk sütunundaki sonuçları elde ederken, (**2.44**) ile ikinci sütundaki sonuçları ve genelde de (**2.34**) ile diğer sütunlardaki sonuçları neden veremedi? Bu soru diğer matematikçiler için de geçerlidir. Kaldı ki **Romberg** çoğumuza nasip olmayacak 94 yıl (1909-2003) gibi uzun bir süre yaşadı. Bu konuda **Fujino**, **Romberg** ile yaptığı röportajın girişinde şunları söylüyordu: "1996 yazında Danimarka'daki toplantıdan bir gün önce Almanya'nın Heidelberg şehrinde **Prof. Werner Romberg** ile görüştük. **Prof. Werner Romberg** 1955 yılında bir integral metodu olan "**Romberg İntegrali**"ni dünyaya duyuran kişidir. Profesör şu an oldukça yaşlı, 87 yaşında, fakat eli ayağı tutuyor. Kendisiyle çeşitli konular üzerine konuşma fırsatım oldu."

Tam burada duralım, çünkü **Knut Hamsun Hitler** ile görüşmeye gittiğinde 84 yaşındaydı ama bir **Viking** gibi karşısında dimdik duruyordu. Şimdi buradan **Hamsun**'u eleştiren tüm Norveçlilere soruyorum: Bugün Norveç'te 84 yaşında kaç kişi şu şekilde ayakta durabiliyor? Gerçekten merak ediyorum!



Resim 4. **Knut Hamsun** 29.06.1943'te **Hitler** ile gerilimli toplantı öncesi Fornebu'da Ulusal Komiser **Josef Terboven** tarafından karşılandı (Bkz. "**Hamsun støttet tyskerne under krigen**"). Ancak **Hamsun**, elini öpen **Terboven**'in rejimini şiddetle eleştirdi ve **Hitler** ile tanıştığı zaman da Norveç işgalini eleştirme fırsatı buldu!

Ne ilginçtir ki 1996 yapımı "**HAMSUN**" filminde **Hamsun**'u canlandıran **Max von Sydow** ⁽²⁾ **RIK 3**'ü web sitemde yayımladıktan 27 gün sonra öldü ve ondan geriye kalan **RIK 3**'ün 6. sayfasındaki **resim**den görüldüğü üzere **Hamsun**, gerçekten de **Hitler**'in karşısında ayakta durabiliyor ve onunla tartışabiliyordu. Başlangıçta 2 saat olarak planlanan ama **Hamsun**'un Norveç'in Yeni Avrupa'da yer alması isteğinin **Hitler** tarafından reddedilmesi ve toplantıyı terk etmesiyle 45 dakika sürdü (Bkz. "**Hamsun: His meeting with Hitler**"). Buna göre **Hamsun** bir hain değil **Yahuda** (**Judas**) gibi bir kahraman olduğu sonucu çıkar!

Kusura bakmayın, araya **Hamsun** girdi. Şimdi kaldığım yerden devam edersem, **RIK 3**'te (2.34) ve **RIK 4**'te (2.39) ekstrapolasyonunu her 2 dosyadaki Alıntı 2.1'in altında söylediğim gibi **Romberg** 05.02.2003'te öldükten sonra 2003 yazında yazmıştım. Bu, Batı'da "**Richardson Ekstrapolasyonu**" olarak anılan ekstrapolasyonun

⁽²⁾ **Max von Sydow**'u **Lars von Trier**'in "**Europa**"sından tanıyordum (Bkz. "**The Making of EUROPA**"). O, bu filmten 20 yıl sonra, 64. Cannes Film Festivali'nde "**Hitler'i anlıyorum!** O kadar iyi bir adam değil ama onu çok iyi anlıyor ve ona biraz sempati duyuyorum." dedi. Açıklamalarına göre filmin senaryosunda kendi ailesinden esinlendiği anlaşıyor. Tıpkı "**Epidemic (Salgın)**" filminin 36:19'undaki "**Tredie Dag-Tyskland (3. Gün-Almanya)**" bölümünde olduğu gibi.

Önsöz

genelleştirilmiş şekillerinden sadece biri idi. **Romberg** ve diğerlerinin bunu görememesini “[Terzi, kendi söküğünü dikemez!](#)” sözüyle küçük düşürmeye çalışmak, [bir çocukluk hastalığı](#)ndan başka bir şey değildir. Çünkü onların yanıldığı nokta şu idi: “[Şans ve Raslantının Matematiği: Olasılık](#)”. Bildiğiniz gibi en büyük keşif ve icatlar şans ya da tesadüf sonucu ortaya çıkmıştır. Peki buradaki şans ve tesadüf ne anlama geliyor? Galiba bunu en iyi açıklayan söz **Louis Pasteur**’ünküdür: “*Şans, yalnızca hazır olan zihinlere güler!*”, Bkz. “[KHAFRE’NİN DEFİN ODASI VE DEFİN ODASINA GİDEN YATAY KORİDOR](#)”, S. 11. Ama bu sözün orijinali “[Gözlem sahasında şans, yalnızca hazırlık zihinlerden yanadır!](#)” olduğundan **Louis Pasteur**, gözlem sahasında şans ya da tesadüfün çalışma sırasında birdenbire ortaya çıktığını ve bunu da ancak hazır zihinlerin görebildiğini söylemiştir. Bu durum piramitlerde de geçerlidir. Yani piramitlerde ilkin gözlem yapılır ve sonra ölçümlere geçilir. Yolu kısaltacak olan yegâne şey, gözlem sırasında isabetli tahminlerde bulunmak ve bunların ölçümleri anlamlandırmasını, dolayısıyla kolaylaştırmasını sağlamaktır. Örneğin, **Smyth**, en büyük performans gösterdiği “[Life & Work At The Great Pyramid During The Months of January, Februaray, March and April, A.D. 1865](#)” kitabına neden “[NUMERICAL OBSERVATIONS \(SAYISAL GÖZLEMLER\)](#)” ile başladı? Çünkü piramitlerde gözlem demek her şey demektir. Onsuz yapılan ölçümlerin bir anlamı olmaz. **Smyth** orada diyor ki: “*Ben Büyük Piramit’teki mevcut tüm yapıları ölçtüm ama bunlar doğru olmayabilir. Çünkü bu ölçümleri Eski Mısır Ölçüleri’ne (RC) göre değil İngiliz İnç’ine (BI) göre yaptım. Bu nedenle bunlardan bazıları gerçek, bazıları da gerçeğe yakın olabilir!*” Demek ki **Louis Pasteur**’ün gözlem sahasından elde ettiği sonuç, aslında çalışmanın tüm aşamalarında geçerliymiş. Ama başarı ortaya çıktığında bunu kimse açıklayamaz. Çünkü başarının mazereti olmaz. Başarı, başarıdır yani. Buna göre lineer ekstrapolasyonlardan (2.34) ya da (2.39)’da şans ya da tesadüf yanımda değildi. Çünkü bu ekstrapolasyon, 2003’te E-ATA 1 Algoritmaları’nda ulaşabildiğim en son ekstrapolasyon idi (Bkz. “[Önsöz](#)”, S. 6, son paragraf). Yüksek mertebeden ekstrapolasyonlardan p²-inci Mertebeden Ekstrapolasyonu’nda ise şans başlangıçta ortaya çıkmıştı ama onda aynı gündeki Giza Piramitleri Oturum Planı’nın keşfi nedeniyle dağılmıştım (Bkz. “[RİK 4](#)”, S. 40-43). Fakat 2017 yazında bu ekstrapolasyon için epey çalıştım. Yani görünüş sizi aldatmasın, içeriği oldukça karışıktır. Keşifle ilgili olarak **Hawass**’ı örnek vermem, **Smyth** gibi piramitlere olan aşırı düşkünlüğümden kaynaklanıyor (Bkz. “[RİK 4/Mısır’ın En Büyük Keşfi: Firavun KHUFU’nun Teknesi](#)”, S. 44. Orada “...**KHUFU**’nun Hanedanlığına ait...” ifadesi olacaktı, düzeltirim). Yoksa bu iş **KHUFU**’nun teknesini bulmaya benzemez! Bizde bir söz vardır: “[Nazar etme ne olur, çalış senin de olur!](#)”.

Dikkat ederseniz buraya kadar bilgisayarların gelişmesine paralel olarak **Romberg**’in tezindeki hesapların nasıl yapılmış olduğuna ilişkin bilgiler verdim. Onun bu konudaki öğretmeni Norveç’in ilk veri yöneticisi **Ole Amble** idi. O, **Romberg**’e “[Vereinfachte numerische Integration \(Basitleştirilmiş Sayısal Tümlöv\)](#)” tezindeki bilimsel hesaplar için [MADAS ATG-20](#)’nin yeterli olduğunu söyledi ve bu arada “[O. AMBLE: A set of formulas for numerical integration, Norske Vid. Selsk. Forh. Trondheim, v. 25, 1952, p. 38-41. MR 14, 907](#)” adlı kendi tezini de verdi. Şimdi **Romberg**’in anlatımına göre **Ole Amble**’in tezini 4 sayfalık “[Ole Amble Algoritması, 01.02.2019](#)” adlı makalemden bulabilirsiniz. Ama tam makalemi aşağıdaki haber nedeniyle Norveçli sanatçıların **Oivin Fjeld** ile yaptığı dayanışmasının tüm dünyaya örnek olması için burada verdikten sonra aklıma **Ole Amble**’in algoritmasının genelleştirilmiş ve sadeleştirilmiş şekli geldi. Hiç üşenmedim, yaptım. Daha sonra aklıma **Romberg**’in tezindeki tablolar arasındaki elemanlar arasındaki ilişkileri vermek geldi. Çünkü (1.78) bağıntısını, dolayısıyla (1.79)’daki sonuçları makalemden beri biliyor ve bunun uzantılarını merak ediyordum. Bu araştırmanın sonucunda (1.86) ve (1.89) eşitlikleri ortaya çıktı. Bu sonuçlarla birlikte (1.77), (1.80) ve (1.81)’i de (1.76)’dan dolayı yeni buldum. Hiç şakası yok, Google’da “**Ole Amble**” yazarsanız (ki bunu anahtar kelime ya da kelimelerle aramanız daha iyi olur) karşınıza toplam 116 linkten 1 Türkçe, 3 İngilizce ve 8 Norveççe link çıkar. Bu linklerden tek Türkçe kaynak benimkidir ve en başta (8. Sıra) listelenir. İngilizce olan linklerde kayda değer sadece “[The Pioneer Era In Norwegian Scientific Computing \(1948-1962\)](#)” dosyası vardır. Norveççe linklerini ise çevirmeniz gerekir ki çeviriler oldukça kötüdür ve bu, sizi yıldıır. Ama ben öyle yapmadım; hiç üşenmeden araştırdım, çevirdim ve **Ole Amble**’ı makaleme ek olarak burada yayımladığım [EK 1](#)’in girişinde en mükemmel şekilde tanıttım. Göreceksiniz, **Ole Amble**’ı orada tanıyınca siz de seveceksiniz. Bu arada kötü bir haber geldi: **Romberg**’in tezinde olduğu gibi makalem ile **Ole Amble**’in tezini karşılaştırmak için **Prof. Byrnjulf Owren**’e bir e-posta gönderdim (30.05.2021, 7:54) ama 09:16’daki yanıt e-postasında ne yazık ki elinde mevcut olmadığını söyledi!

[Gitar Doktoruna A-ha Övgüsü: Oivin Onuruna](#)

Fjeld’in boynundaki eski bir kırığının her geçen gün kötüye gitmesi, onun çalışamamasına, dolayısıyla gitar çalamamasına neden oldu. Dengesi bozuldu, vücudunun yarısı uyuştu, kolu uyuştu ve artık parmaklarında hiçbir his yok. **Oivin Fjeld**, G-Sharp’ı geliştiren ve inşa eden adamdır. Dünyanın dört bir yanında müzisyenlerin benimsedikleri küçük bir elektro-gitar **Fjeld**’e şöhreti getirdi ama zenginlik getirmedi. Şimdi başta Norveçli sanatçılar olmak üzere dünyanın dört bir yanındaki sanatçılar **Fjeld**’in ameliyatı için para topluyorlar.



Dizi Çalma: A-ha gitarlarla sahnede: **Paul Waaktaar** geleneksel 6 telli, **Magne Furuholmen** ve **Morten Harket** ise kendi gitarlarıyla çalışıyorlar.

A-ha’nın elemanları nefesli gitarı benimseyenler arasındadır. “[Butterfly, Butterfly](#)”da tüm gitar parçaları gitarla kaydedilir ve bu sahnede aynı enstrümanda ilk ve tek sefer birlikte çaldıkları bu küçük nefesli gitarlar oldu.

Magne Furuholmen, **Fjeld** için [Dagbladet](#)’e bir e-posta gönderdi.



GİTAR MEKKE: “**Unni Wilhelmsen** beni gitar atölyesinde ziyaret etti ve bu fotoğrafı çekti” diyor, **Oivin Fjeld**. Fotoğraf: **Unni Wilhelmsen**.

Fjeld, “*Bu kadar çok sanatçının beğenmesi güzel*” diyerek şöyle devam ediyor: “*Kendi imza modelini isteyen Mark Knopfler’den bir telefon aldım. Elton John’un gitaristi Davey Johnstone’da birkaç tane var. Elton’a hediye olarak aldığı 70 yıllık piyano motifli bir tane sipariş etti. Guns N Roses’daki Richard Fortus’ta en az bir tane var. Ve Paul Waaktaar A-ha’da bunu çok kullanıyor.*”

Şimdi makaleme geçersenem ulaştığım sonuçları şöyle özetleyebilirim:

K_n ve T_n İçin İndirgeme Formülleri

Öncelikle aşağıdaki makalemden her bir teorem ya da onun parçalarını oluşturan formüllerde tarihler vardır. Bunlar o bilgilere hangi tarihlerde ulaşıldığını gösterir. Örneğin, bu tarihlemeye (datum) göre Teorem 1.2 ve bu teoreme ilişkin aritmetik ortalama için Teorem 1.5’teki ispatı 10 günde vermiş olduğum sonucu çıkar. Bu 10 günlük sürecin nasıl işlediğini burada anlatırken Teorem 1.1 ve Teorem 1.3’teki (ki T_pⁿ hariç) süreçlerin nasıl işlediğini makalemden daha detaylı görebilirsiniz.

İlkin, Teorem 1.1'in [RİK 4](#)'te 2 farklı ispatını vermiştim ve buradaki ispat o sırada da kafamdaydı. Bu, (3) ya da (4)'e göre bilinen en kolay ispattır. Ama kaynaklar bu indirgmeden bahsetmez. Çünkü bu şekilde hiç düşünülmedi! Ancak (1.1)'deki K_n trapez formülünün,

$$(9) \quad K_n = h_n f\left(\frac{a+b}{2}\right) + h_n \frac{f(a) + f(b)}{2} + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} (f(a + kh_n) + f(b - kh_n))$$

şeklinde de yazılabildiğini görünce (25.04.2021, 14:29:46) her şey ilginç olmaya başladı (ki bu eşitlikteki ilk 2 terimde f 'nin bir lineer fonksiyon görüntüsü çıkmış olduğuna dikkat ediniz). Çünkü bu, K_n 'nin,

“[14: 16](#). Sen (**Moses**) değneğini kaldır, elini denizin üzerine uzat. Sular yarılacak ([Kızıldeniz 2'ye bölünecek](#)) ve İsraililer kuru toprak üzerinde yürüyerek denizi geçecekler ([14:16](#). And you, raise your staff, and stretch out your hand over the sea, and divide it so that the sons of Israel may go in the midst of the sea on dry ground)”

olayındaki gibi $[a, b]$ aralığının $x_{2^{n-1}} = \frac{a+b}{2}$ orta noktasına simetrik olan noktalara göre yazımını gösteriyordu, dolayısıyla yeni bir çıkarım idi!

Bu konuda A-HA'nın söz yazarı [Pål Waaktaar-Savoy](#), hayatını ve şarkılarını anlattığı “[Tears from a Stone](#)” adlı kitabının 27-28. sayfalarında şunları söyler:



Resim 5. [Pål Waaktaar](#)'ın Oslo'daki gençlik yıllarından kalma resimler. Soldakinde saçlarının sarı renkte olduğunu fark edebilirsiniz.

“[Pål](#)'un ablası **Tonje**'nin odasında hiç kullanmadığı bir gitar vardı. **Pål**, ilkin kendi kendine akorları öğrenmeye çalışıyor: ‘Bir sonraki adım, farklı melodilerin hangi akorlara sahip olduğunu bulmaya çalışmaktı. Bir G notası çalarsam, sonra bir G akoru çaldım, ancak bu kulağa tamamen yanlış geliyordu. Tekerleği yeniden icat etmem gerekiyordu: Her şey nasıl çalışıyor? Eğer benim yaptığım gibi tamamen sıfırdan başlarsanız ve çevrenizde şarkı yazma hakkında hiçbir fikriniz yoksa, melodilerin yazılmasındaki matematiği çabucak tanırırsınız. Ve işte burada ilginç olmaya başlıyor’ (**Pål**'s grosse Schwester **Tonje** hatte in ihrem Zimmer eine Gitarre, die sie nie Nutzte. Als Erstes versuche **Pål**, sich darauf Akkorde beizubringen: ‘Der nächste Schritt bestand in dem Versuch herauszufinden, welche Akkorde die verschiedenen Melodien hatten. Wenn ich einen G-Ton spielte, dann spielte ich einen G-Akkord, aber das klingt voll daneben. Ich musste versuchen, das Rad neu zu erfinden: Wie funktioniert das Ganze? Wenn du aber komplett aus dem Nichts heraus anfängst, so wie ich es getan habe, und in deinem Umfeld keiner Ahnung vom Songwriting hat, erkennst du im Schreiben von Melodien schnell die Mathematik wieder. Und da fängt es an, interessant zu werden.’)”

Önsöz

Demek ki **Pål** gitar akorlarını [Hamsun gibi](#) kendi kendine öğrenmiş ve bunu yaparken matematiğin geçerli olduğunu görmüş (Bkz. “[Temel Akorlar](#)”). Fakat beni asıl şaşırtan şey, **Pål**’un, “[Düşünce Treni \(Train of Thought\)](#)” parçasını yazarken **Gunvor Hofmo**, **Knut Hamsun** ve **Fyodor Dostoyevski** gibi varoluşçu yazar ve şairlere dayandırılmasına ilişkin o zamanki favorileri olarak lanse edilmesinin doğru olmadığını öğrenmem oldu. Çünkü yine aynı kitabın bir diğer parçasında **Hamsun**, **Pål**’un ailesinin, dolayısıyla kendisinin ve tabii ki bizlerin daima favorisi idi: “*Bazı yazlar dört adam, arabayla Oslo’dan İsveç’e geçerek Hammerfest, Loppa ve Sandland’e doğru dolambaçlı kuzeye uzun bir yolculuk yaptı. Diğer yıllarda bir Hurtigruten gemisinde kuzeye gitti. Belki de Pål’un metinlerinde doğanın görünmesinden kısmen ebeveynler sorumludur! Her ikisi de deniz kenarında büyüdü ve onlardan biri Tonje (Pål’un ablası) ve ailesiyle birlikte kulübe turuna çıktıklarında Hamsun şiirinin (Not: [Yitik Ada](#))’ başlangıcını alıntılamayı hâlâ seviyor:*

‘Sandalım kayıyor
Şimdi denizde
Yemyeşil kıyılı
O ada’ya doğru’

Hem **Gerd** ve hem de **Olav** (**Pål**’un ebeveynleri) hala **Knut Hamsun**’un eserlerini okuyorlar, ancak baba **Olav** ile tanıştığımızda hemen **Hamsun**’un siyasi görüşlerini hiçbir zaman paylaşmadıklarına dikkat çekiyorlar. Bilindiği gibi **Hamsun**, **Hitler**’in açık bir destekçisiydi ve 7 Mayıs 1945’te, Norveç kurtarılmadan bir gün önce, Nazi [Aftenposten](#)’in [akşam baskısını](#) yazdı. Norveçli edebiyatçı **Tore Rem**, 2014’te Norveç’te ve 2016’da Almanya’da basılan ‘[Knut Hamsun](#)’ adlı kitabında, 26 Haziran 1943’te **Hitler**’in Beyern’deki Berghof malikanesinde gerçekleşen **Hamsun** ile **Hitler** arasındaki görüşme için ‘[Hitler’e Yolculuk \(Die Reise zu Hitler\)](#)’ üzerinde çalıştı.

»Benim küçük memleketimde herkes Nazilerden nefret ederdi, kimse onlara sempati duymazdı. Ama **Hamsun**’un **Hitler**’i olumlayan imajını unutursanız, bence **Hamsun** ülkemizdeki en büyük yazardır«, diyor **Olav**. (Einige Sommer nahm die vierköpfige den langen Weg in den Norden mit dem Auto auf sich, schlängelte sich von Oslo durch Schweden hiauf nach Hammerfest, Loppa und Sandland. Andere Jahre reiste sie mit einem Schiff der Hurtigruten nordwärts. Sind vielleicht die Eltern zum Teil dafür verantwortlich, dass die Natur in Påls Texten auftaucht? Beide sind nahe am Meer aufgewachsen und noch immer zitiert einer von ihnen gern den Anfang des Hamsun-Gedichtes (Anmerkung: Schäreninsel), wenn sie sich mit **Tonje** und ihrer Familie auf Hüttentour befinden:

‘Nun gleitet das Boot
zur Schäreninsel,
eine Insel im Meer
mit grünen Stränden.’

Sowohl **Gerd** als auch **Olav** lesen nach wie vor die Werke **Knut Hamsuns**, jedoch weist Vater **Olav** bei unserer Begegnung umgehend darauf hin, dass sie **Hamsuns** politische Ansichten nie geteilt haben. **Hamsun** war bekanntermassen ein erklärter Anhänger **Hitlers**, und 7. Mai 1945, am Tag vor der Befreiung Norwegens, verfasste der Abendausgabe der zu diesem Zeitpunkt nazistischen Aftenposten erschien. In seinem 2014 in Norwegen und 2016 in Deutschland erschienenen Buch ‘**Knut Hamsun**’. [Die Reise zu Hitler](#) arbeitet der norwegische Autor **Tore Rem** die Begegnung zwischen **Hamsun** un **Hitler** auf, die am 26. Juni 1943 auf **Hitlers** Landsitz Berghof in Bayern stattfand.

»In meinem kleinen Heimatort hassten alle die Nazis, keiner sympathisierte mit ihnen. Das gab es nicht. Vergisst man aber das Bild von **Hamsun**, der **Hitler** begrüsst, so ist **Hamsun** meiner Meinung nach der grösste Schriftsteller unseres Landes«, so **Olav**.), [Tears from a Stone: Pål Waaktaar Savoy von a-ha über sein Leben und seine Songs](#)”

Dikkat ederseniz (9) no’lu formül (1.6)’daki 2. formülден açıkça görebilmekle birlikte K_n ’nin (1.1) ile aynı olan bir diğer formudur. O zaman buna, formüldeki noktaların (apsisler) $x_{2^{n-1}} = \frac{a+b}{2}$ orta noktasına simetrik olduklarından “ **K_n ’nin Simetrik Açılımı**” diyordum!

Sonra K_n için bulduğum

$$\begin{aligned} K_n &= \frac{K_0}{2^n} + h_n \sum_{k=1}^{2^n-1} f(a + kh_n), \\ (10) \quad &= \frac{K_0}{2^n} + h_n f\left(\frac{a+b}{2}\right) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} (f(a + kh_n) + f(b - kh_n)), \\ &= \frac{K_0}{2^n} + h_n f\left(\frac{a+b}{2}\right) + h_n f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-2}-1} \left(f(a + kh_n) + f\left(\frac{a+b}{2} - kh_n\right)\right) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} f(b - kh_n) \end{aligned}$$

formüllerini karşılaştırdım ve (1.14)’teki formüllere göre T_n için şu formülleri buldum:

$$\begin{aligned} T_n &= h_n f\left(\frac{a+b}{2}\right) + h_n \sum_{k=1}^{2^n-1} (f(a + kh_{n+1}) - f(a + kh_n) + f(b - kh_{n+1})), \\ (11) \quad &= h_n f\left(\frac{a+b}{2}\right) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \left(f(a + (2k-1)h_{n+1}) - f\left(\frac{a+b}{2} + (k-1)h_n\right)\right) + h_n \sum_{k=1}^{2^n-1} f(b - kh_{n+1}). \end{aligned}$$

Bunlardan sonra aklıma **Owren**’in (1.45)’te verdiği ilk formül geldi ve T_n ’yi bir de oradan bulayım dedim:

$$(12) \quad T_n = h_n f\left(\frac{a+b}{2} + h_{n+1}\right) + h_n f\left(\frac{a+b}{2} - h_{n+1}\right) + h_n \sum_{k=0}^{2^{n-1}-2} \left(f\left(a + \left(k + \frac{1}{2}\right)h_n\right) + f\left(b - \left(k + \frac{1}{2}\right)h_n\right)\right).$$

Ama bu formüldeki toplamın alt sınırı 0 olduğundan K_n ’yi de aynı şekilde yazmalıydım:

Önsöz

$$\begin{aligned}
 (13) \quad K_n &= h_n \frac{f(a) + f(b)}{2} - h_n f\left(\frac{a+b}{2}\right) + h_n \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \left(f\left(\frac{a+b}{2} + kh_n\right) + f\left(\frac{a+b}{2} - kh_n\right) \right), \\
 &= h_n \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \left(f\left(\frac{a+b}{2} + kh_n\right) + f\left(\frac{a+b}{2} - kh_n\right) \right) - h_n f\left(\frac{a+b}{2}\right).
 \end{aligned}$$

İşte 5 gündür bu formüllerle böyle oyalandım. Çünkü bunlar (1.14)'teki trapez ve orta nokta formülleriyle aynı ama farklı bir formda olduklarını, dolayısıyla farklı bir hesaplama metodunu gösteriyordu. O sırada bu formülleri yeterli görüyordum, yani başka bir form aramayı gerek görmüyordum. Fakat aynı formüller için başka formlar söz konusu olunca, bunların o formlarda yazılmasındaki matematiği tanımamız gerekiyordu ve işte her şey burada ilginç olmaya başlıyordu!

Nihayet (Endelig) 30.04.2021, 19:55:47'de K_n 'yi (1.13)'te 2. kez genelleştirdim (Y.N. Tarihteki sürenin saniyesine kadar yazmam, (1.13)'ün Mathematica'daki onaylandığı datumu gösterir). Ve arkasından da (1.17)'yi buldum. Gerisi çorap söküğü gibi geldi... Belki inanmayacaksınız ama, K_n ve T_n 'i genelleştirdiğim (1.18)&(1.19)'u aşağıda anlattığım gibi, ancak onlardan biraz daha karmaşık şekilde yalnızca $p = 1,2$ için yani 2 adımda buldum. Fakat Teorem 1.3'teki K_n 'yi genelleştirmem o kadar kolay olmadı. Çünkü (1.21) resmen bana okuyordu ya da ben ona meydan okuyordum (ki o sırada T_p^n yoktu). Ama 2 gün sürse de onu da genelleştirdim.

Bir diğer meydan okuma Teorem 1.5'te geçen Teorem 1.2'nin ispatında oldu. Çünkü (1.18)'deki K_n ve (1.19)'daki T_n 'nin aritmetik ortalamasının K_{n+1} olduğunu (1.20)'den biliyor ve görüyordum. Fakat orada takıldığım nokta (1.65) değildi;

$$(14) \quad \sum_{m=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{2^{n-m-1}-1} f\left(a + \left(2^{n-m} - \left(k + \frac{1}{2}\right)\right)h_n\right) = \sum_{m=0}^{p-1} \sum_{k=1}^{2^{n-m}-1} f\left(a + \left(2^{n-m} - \left(k - \frac{1}{2}\right)\right)h_n\right)$$

eşitliği nedeniyle (1.65)'teki 2. aritmetik ortalama yerine,

$$(15) \quad \frac{1}{2} \left(h_n \sum_{m=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{2^{n-m-1}-1} f(a + (2^{n-m} - k)h_n) + h_n \sum_{m=0}^{p-1} \sum_{k=1}^{2^{n-m}-1} f\left(a + \left(2^{n-m} - \left(k - \frac{1}{2}\right)\right)h_n\right) \right) = h_{n+1} \sum_{m=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{2^{n-m}-1} f(a + (2^{n-m+1} - k)h_{n+1})$$

aritmetik ortalamasını mı kullansam, diye bir oyalanma içindeydim. Ama araştırmalarım (1.65)'i vermemin daha doğru olduğunu ve buna karar verdiğim zaman Mathematica, 05.05.2021, 18:52:24'ü gösteriyordu!

Fakat buraya kadar anlattıklarım sağ alt köşede adımdan sonra verdiğim gibi 30.05.2021, 01:20 tarihine kadar bilgilerdir. Çünkü 02.06.2021'de Teorem 1.4 söz konusu olunca tüm teoremleri yeniden ele almam ve onları sıraya koymam gerekti. Bunlardan son olarak Teorem 1.4'te K_n ve T_n için genel indirgeme bağıntılarını verdim. K_n , (1.22)'de ilkini Teorem 1.1'de verdiğim 2. indirgeme bağıntısının genelleştirilmiş şeklidir. Teorem başlığında anılan süre, daha çok teorem ve ispattaki formüllerin Mathematica'da onaylatılmasında harcanan süreleri gösterir.

Özetle bu önsözü ya baştan ele alacaktım ya da güncelleyecektim. Ben de öyle yaptım ve böylece hem doğal akışı bozmamış oldum, hem de okuyuculara keşifleri izleme ve bunların nasıl gerçekleştiğini görme şansını vermiş oldum. Yani nasıl ki matematiği annemizin karnında öğrenmediyse, aşağıdaki keşifler de öyle birdenbire ortaya çıkmadı. Sorgulaya sorgulaya, araştırı araştırı ve bir anlamda kendimle tartışa tartışa ortaya çıktı bu keşifler. Gerisi sizin hayallerinize kalmış!

D. PAMUK TULUM-15.06.2021, 19:00.

D. PAMUKTULUM

“Tümevarım yapana kanat takmamalı, kurşun bağlamalıdır”, [Lord Francis Bacon](#).

Teorem 1.1 (İlk İndirgeme Bağlılısı, 18.11.2016, 17:00). $\forall n \in \mathbb{N}$ için K_n 'nin K_0 'a indirgenmesinde şu bağlıntı geçerlidir:

$$(1.1) \quad K_n = \frac{K_0}{2^n} + h_n \sum_{k=1}^{2^n-1} f(a + kh_n).$$

Fakat tüm Nümerik Analiz kitaplarında ve programlarında, hiç istisnasız, [RİK 4](#)'teki (1.14)'teki formüller geçer. Oysa bu formüllerden ikincisindeki K_n trapez yaklaşıkıklığını ispatlamak ve hesaplamak (1.1)'dekine göre daha zor idi!

Peki ilk trapez formülü nasıl ortaya çıkmıştı?

Çok basit, çünkü [Teorem 1.2](#)'deki ispatın tersine göre (1.14)'teki T_n orta nokta formülü Riemann integralinden yani dikdörtgenlerin alanlarının toplamından kolayca elde edilebildiğinden (bkz. “[Pratik Metot](#)”, S. 17) ve (1.20)'deki aritmetik formülü geçerli olduğundan (1.14)'teki K_n trapez formülünü verebilmek kolaydır. Bu, trapez formülünün çıkış yeri olmakla birlikte bilinen en kolay ispat (dolaylı ispat) iken [Teorem 1.1](#)'deki ispata (doğrudan ispat) bakarsanız daha zor gözükür. Yani ispat bakış açısına göre değişir. Fakat ilk trapez formülünün kullanımı **Romberg**'ten beri hiç değişmedi (Bkz. (1.24) ve (1.35)). Bu sonuç ise (1.14)'teki formüllerin tüm kaynaklarda neden geçtiğini açıklar!

Peki (1.1) formülünü bulabilmemiz için ne yapmamız gerekiyordu?

Öncelikle ister inanın ister inanmayın (1.1) formülü biliniyordu ama bu şekilde değil (Bkz. “[Numerical Methods In Multiple Integration](#)”, S. 31, PDF'de 55, (3.5.1)). Yani anılan kaynaktaki (3.5.1) formülü “**indirgeme**” anlamında kullanılmıyordu. Teorem başlığında anılan tarihte ise trapez formülünü bu şekilde yani indirgeme formülü olarak bulmuştum ve hep bu şekilde kullanmaya devam ettim. Aşağıdaki teoremler trapez formülüne neden hep bu şekilde baktığımı açıklar niteliktedir. Ama (1.1)'in önemini baştan beri biliyordum ve [Teorem 1.3](#)'te 2 farklı ispatını vermiştim (Bkz. [1. Yol](#) ve [2.1. Yol](#)). Ancak bana göre en kolay ispat aşağıdakidir.

İspat. Genel olarak K_n için Önsöz'deki **Owren**'in önerdiği (3) ya da daha doğru bir ifadeyle (4)'ten

$$\begin{aligned} K_n &= h_n \sum_{k=0}^{2^n} f(a + kh_n) = h_n \frac{f(a + 0 \cdot h_n) + f(a + 2^n \cdot h_n)}{2} + h_n \sum_{k=1}^{2^n-1} f(a + kh_n) = h_n \frac{f(a + 0 \cdot h_n) + f(a + 2^n \cdot h_n)}{2} + h_n \sum_{k=1}^{2^n-1} f(a + kh_n) \\ &= h_n \frac{f(a) + f(a + b - a)}{2} + h_n \sum_{k=1}^{2^n-1} f(a + kh_n) = h_n \frac{K_0}{2^n} + h_n \sum_{k=1}^{2^n-1} f(a + kh_n) = \frac{K_0}{2^n} + h_n \sum_{k=1}^{2^n-1} f(a + kh_n) \end{aligned}$$

eşitliklerine göre

$$(1.2) \quad K_n = \frac{K_0}{2^n} + h_n \sum_{k=1}^{2^n-1} f(a + kh_n)$$

sonucu geçerli olur.

Teorem 1.2 (Trapez Yaklaşıkılıklarının $[a, b]$ Aralığının Sol Yarisındaki p Tane Ardışık Orta Noktaya Simetrik Olan Noktalara Göre Açılımları). $\forall n, p \in \mathbb{N}, p \leq n$ için K_n ve T_n yaklaşıkıklıkları için şu formüller geçerlidir:

$$(1.3) \quad \begin{cases} K_p^n = -\frac{K_0}{2^n} + h_n \sum_{k=0}^{2^n-p} f(a + kh_n) + h_n \sum_{m=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{2^{n-m-1}-1} f(a + h_m - kh_n), \\ T_p^n = h_n \sum_{k=0}^{2^n-p-1} f\left(a + \left(k + \frac{1}{2}\right)h_n\right) + h_n \sum_{m=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{2^{n-m-1}-1} f\left(a + h_m - \left(k + \frac{1}{2}\right)h_n\right) \end{cases}$$

İspat. İlk [RİK 4](#)'teki (1.22)'nin ilk eşitliğindeki ya da buradaki (1.1)'deki K_n ve (1.45)'in ikinci eşitliğindeki T_n trapez yaklaşıkıklıklarını $[a, b]$ aralığının orta noktasına göre açalım. Bunun için eğer $\forall n \in \mathbb{N}^+$ için (1.1)'deki K_n 'yi $[a, b]$ aralığının orta noktasına göre açarsak,

$$K_n = h_n \sum_{k=0}^{2^n} f(x_k) = h_n \underbrace{\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f(x_k)}_{=:A_n} + h_n f(x_{2^{n-1}}) + h_n \underbrace{\sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} f(x_k)}_{=:B_n} = A_n + h_n f(x_{2^{n-1}}) + B_n$$

toplamındaki A_n ve B_n 'deki $x_k = a + kh_n$ ve $x_{2^n-k} = b - kh_n$ (ki $x_{2^n-k} = a + (2^n - k)h_n = a + 2^n h_n - kh_n = a + b - a - kh_n = b - kh_n$ 'dir) apsislerinin

$$(1.4) \quad x_{2^{n-1}} = \frac{x_k + x_{2^n-k}}{2} = \frac{a + kh_n + b - kh_n}{2} = \frac{a + b}{2}$$

orta noktasına göre simetrik ve

$$(1.5) \quad \begin{cases} A_n = h_n \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f(x_k) = h_n \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} f(x_{2^n-k}), \\ B_n = h_n \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} f(x_k) = h_n \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f(x_{2^n-k}) \end{cases}$$

eşitliklerinin geçerli olduklarını görürüz.

K_n ve T_n İçin İndirgeme Bağlıları

Bu durumda

$$\begin{aligned}
 K_n &= A_n + h_n f(x_{2^{n-1}}) + B_n = h_n \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f(x_k) + h_n f(x_{2^{n-1}}) + h_n \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f(x_{2^n-k}) = h_n \frac{f(x_0)}{2} + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} f(x_k) + h_n f(x_{2^{n-1}}) + h_n \frac{f(x_{2^n})}{2} + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} f(x_{2^n-k}) \\
 &= h_n \left(\frac{f(x_0)}{2} + \frac{f(x_{2^n})}{2} \right) + h_n f(x_{2^{n-1}}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} f(x_k) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} f(x_{2^n-k}) = h_n \frac{f(x_0) + f(x_{2^n})}{2} + h_n f(x_{2^{n-1}}) - h_n f(x_0) + h_n \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f(x_k) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} f(x_{2^n-k}) \\
 &= h_n \frac{f(x_{2^n}) - f(x_0)}{2} + h_n f(x_{2^{n-1}}) + h_n \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f(x_k) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} f(x_{2^n-k})
 \end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
 (1.6) \quad K_n &= h_n \frac{f(x_{2^n}) - f(x_0)}{2} + h_n f(x_{2^{n-1}}) + h_n \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f(x_k) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} f(x_{2^n-k}) \\
 &= h_n \frac{f(b) - f(a)}{2} + h_n f\left(\frac{a+b}{2}\right) + h_n \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f(a + kh_n) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} f(b - kh_n)
 \end{aligned}$$

sonucu geçerli olur (25.04.2021, 14:29:46).

Aynı şekilde $\forall n \in \mathbb{N}^+$ için (1.45)'in 2. eşitliğindeki T_n 'yi de $[a, b]$ aralığının orta noktasına göre açarsak,

$$T_n = h_n \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right) = h_n \underbrace{\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right)}_{=:C_n} + h_n f\left(x_{2^{n-1}+\frac{1}{2}}\right) + h_n \underbrace{\sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n-1} f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right)}_{=:D_n}$$

toplamındaki C_n ve D_n 'deki $x_{k+\frac{1}{2}} = a + \left(k + \frac{1}{2}\right)h_n$ ve $x_{2^n-(k+\frac{1}{2})} = b - \left(k + \frac{1}{2}\right)h_n$ (ki $x_{2^n-(k+\frac{1}{2})} = a + \left(2^n - \left(k + \frac{1}{2}\right)\right)h_n = a + 2^n h_n - \left(k + \frac{1}{2}\right)h_n = a + b - a - \left(k + \frac{1}{2}\right)h_n = b - \left(k + \frac{1}{2}\right)h_n$ 'dir) apsisleri

$$(1.7) \quad x_{2^{n-1}} = \frac{x_{k+\frac{1}{2}} + x_{2^n-(k+\frac{1}{2})}}{2} = \frac{a + \left(k + \frac{1}{2}\right)h_n + b - \left(k + \frac{1}{2}\right)h_n}{2} = \frac{a+b}{2}$$

orta noktasına göre simetrik ve

$$(1.8) \quad \begin{cases} C_n = h_n \sum_{k=0}^{2^{n-1}-2} f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right) = h_n \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n-1} f\left(x_{2^n-(k+\frac{1}{2})}\right), \\ D_n = h_n \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n-1} f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right) = h_n \sum_{k=0}^{2^{n-1}-2} f\left(x_{2^n-(k+\frac{1}{2})}\right) \end{cases}$$

eşitlikleri geçerli olur ki buradan

$$T_n = C_n + h_n f\left(x_{2^{n-1}+\frac{1}{2}}\right) + D_n = h_n \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right) + h_n f\left(x_{2^{n-1}+\frac{1}{2}}\right) + h_n \sum_{k=0}^{2^{n-1}-2} f\left(x_{2^n-(k+\frac{1}{2})}\right) = h_n \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right) + h_n \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f\left(x_{2^n-(k+\frac{1}{2})}\right)$$

eşitlikleri gereğince

$$\begin{aligned}
 (1.9) \quad T_n &= h_n \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right) + h_n \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f\left(x_{2^n-(k+\frac{1}{2})}\right) \\
 &= h_n \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \left(f\left(a + \left(k + \frac{1}{2}\right)h_n\right) + f\left(b - \left(k + \frac{1}{2}\right)h_n\right) \right)
 \end{aligned}$$

sonucu geçerli olur.

İkinci olarak $\forall n \in \mathbb{N}, 2 \leq n$ için K_n 'nin (1.6)'daki formülünde $h_n \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f(x_k)$, dolayısıyla $h_n \sum_{k=0}^{2^{n-1}} f(x_k)$ toplamını $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ aralığının orta noktasına göre açarsak,

$$h_n \sum_{k=0}^{2^{n-1}} f(x_k) = h_n \underbrace{\sum_{k=0}^{2^{n-2}-1} f(x_k)}_{=:E_n} + h_n f(x_{2^{n-2}}) + h_n \underbrace{\sum_{k=2^{n-2}+1}^{2^{n-1}} f(x_k)}_{=:F_n} = E_n + h_n f(x_{2^{n-2}}) + F_n$$

toplamındaki E_n ve F_n 'deki $x_k = a + kh_n$ ve $x_{2^{n-1}-k} = \frac{a+b}{2} - kh_n$ (ki $x_{2^{n-1}-k} = a + (2^{n-1} - k)h_n = a + 2^{n-1}h_n - kh_n = a + \frac{b-a}{2} - kh_n = \frac{a+b}{2} - kh_n$ 'dir) apsisleri

$$(1.10) \quad x_{2^{n-2}} = \frac{x_k + x_{2^{n-1}-k}}{2} = \frac{a + kh_n + \frac{a+b}{2} - kh_n}{2} = \frac{a + \frac{a+b}{2}}{2} = \frac{x_0 + x_{2^{n-1}}}{2} = \frac{3a+b}{4}$$

orta noktasına göre simetrikler ve

K_n ve T_n İçin İndirgeme Bağlılıları

$$(1.11) \quad \begin{cases} E_n = h_n \sum_{k=0}^{2^{n-2}-1} f(x_k) = h_n \sum_{k=2^{n-2}+1}^{2^{n-1}} f(x_{2^{n-1}-k}), \\ F_n = h_n \sum_{k=2^{n-2}+1}^{2^{n-1}} f(x_k) = h_n \sum_{k=0}^{2^{n-2}-1} f(x_{2^{n-1}-k}) \end{cases}$$

eşitlikleri geçerli olur.

Şu halde

$$\begin{aligned} h_n \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f(x_k) + h_n f(x_{2^{n-1}}) &= h_n \sum_{k=0}^{2^{n-1}} f(x_k) = E_n + h_n f(x_{2^{n-2}}) + F_n = h_n \sum_{k=0}^{2^{n-2}-1} f(x_k) + h_n f(x_{2^{n-2}}) + h_n \sum_{k=0}^{2^{n-2}-1} f(x_{2^{n-1}-k}) = h_n \sum_{k=0}^{2^{n-2}-1} f(x_k) + h_n f(x_{2^{n-2}}) + h_n f(x_{2^{n-1}}) \\ &+ h_n \sum_{k=1}^{2^{n-2}-1} f(x_{2^{n-1}-k}) \Rightarrow h_n \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f(x_k) = h_n f(x_{2^{n-2}}) + h_n \sum_{k=0}^{2^{n-2}-1} f(x_k) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-2}-1} f(x_{2^{n-1}-k}) \end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$(1.12) \quad h_n \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f(x_k) = h_n f(x_{2^{n-2}}) + h_n \sum_{k=0}^{2^{n-2}-1} f(x_k) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-2}-1} f(x_{2^{n-1}-k})$$

sonucu geçerli olur.

Şimdi bu sonucu (1.6)'da yerine koyar ve gerekli düzenlemeleri yaparsak,

$$\begin{aligned} K_n &= h_n \frac{f(x_{2^n}) - f(x_0)}{2} + h_n f(x_{2^{n-1}}) + h_n \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f(x_k) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} f(x_{2^n-k}) \\ &= h_n \frac{f(x_{2^n}) - f(x_0)}{2} + h_n f(x_{2^{n-1}}) + h_n f(x_{2^{n-2}}) + h_n \sum_{k=0}^{2^{n-2}-1} f(x_k) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-2}-1} f(x_{2^{n-1}-k}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} f(x_{2^n-k}) \\ &= h_n \frac{f(x_{2^n}) - f(x_0)}{2} + h_n \sum_{m=1}^2 f(x_{2^{n-m}}) + h_n \sum_{k=0}^{2^{n-2}-1} f(x_k) + h_n \sum_{m=0}^1 \sum_{k=1}^{2^{n-m-1}-1} f(x_{2^{n-m}-k}) \end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$\begin{aligned} (1.13) \quad K_n &= h_n \frac{f(x_{2^n}) - f(x_0)}{2} + h_n \sum_{m=1}^2 f(x_{2^{n-m}}) + h_n \sum_{k=0}^{2^{n-2}-1} f(x_k) + h_n \sum_{m=0}^1 \sum_{k=1}^{2^{n-m-1}-1} f(x_{2^{n-m}-k}) \\ &= h_n \frac{f(b) - f(a)}{2} + h_n \sum_{m=1}^2 f(a + h_m) + h_n \sum_{k=0}^{2^{n-2}-1} f(a + kh_n) + h_n \sum_{m=0}^1 \sum_{k=1}^{2^{n-m-1}-1} f(a + h_m - kh_n) \\ &= \frac{K_2}{2^{n-2}} + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-2}-1} \left(f(a + kh_n) + f\left(\frac{a+b}{2} - kh_n\right) + f(b - kh_n) \right) \end{aligned}$$

şeklinde 2. indirgeme bağıntısını elde etmiş oluruz (30.04.2021, 19:55:47).

Diğer taraftan $\forall n \in \mathbb{N}, 2 \leq n$ için T_n 'nin (1.9)'daki formülündeki $\sum_{k=0}^{2^{n-1}-2} f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right)$, dolayısıyla $\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right)$ toplamını $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ aralığının orta noktasına göre açarsak,

$$h_n \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right) = h_n \underbrace{\sum_{k=0}^{2^{n-2}-1} f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right)}_{=:G_n} + h_n f\left(x_{2^{n-2}+\frac{1}{2}}\right) + h_n \underbrace{\sum_{k=2^{n-2}+1}^{2^{n-1}} f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right)}_{=:H_n} = G_n + h_n f\left(x_{2^{n-2}+\frac{1}{2}}\right) + H_n$$

toplamındaki G_n ve H_n 'deki $x_{k+\frac{1}{2}} = a + \left(k + \frac{1}{2}\right)h_n$ ve $x_{2^{n-1}-(k+\frac{1}{2})} = \frac{a+b}{2} - \left(k + \frac{1}{2}\right)h_n$ (ki $x_{2^{n-1}-(k+\frac{1}{2})} = a + \left(2^{n-1} - \left(k + \frac{1}{2}\right)\right)h_n = a + 2^{n-1}h_n - \left(k + \frac{1}{2}\right)h_n = a + \frac{b-a}{2} - \left(k + \frac{1}{2}\right)h_n = \frac{a+b}{2} - \left(k + \frac{1}{2}\right)h_n$ 'dir) apsisleri

$$(1.14) \quad x_{2^{n-2}} = \frac{x_{k+\frac{1}{2}} + x_{2^{n-1}-(k+\frac{1}{2})}}{2} = \frac{a + \left(k + \frac{1}{2}\right)h_n + \frac{a+b}{2} - \left(k + \frac{1}{2}\right)h_n}{2} = \frac{a + \frac{a+b}{2}}{2} = \frac{x_0 + x_{2^{n-1}}}{2} = \frac{3a+b}{4}$$

orta noktasına göre simetrik ve

$$(1.15) \quad \begin{cases} G_n = h_n \sum_{k=0}^{2^{n-2}-2} f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right) = h_n \sum_{k=2^{n-2}+1}^{2^{n-1}-1} f\left(x_{2^{n-1}-(k+\frac{1}{2})}\right), \\ H_n = h_n \sum_{k=2^{n-2}+1}^{2^{n-1}-1} f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right) = h_n \sum_{k=0}^{2^{n-2}-2} f\left(x_{2^{n-1}-(k+\frac{1}{2})}\right) \end{cases}$$

eşitlikleri geçerli olur.

K_n ve T_n İçin İndirgeme Bağlılıları

Buna göre

$$h_n \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right) = G_n + h_n f\left(x_{2^{n-2}+\frac{1}{2}}\right) + H_n = h_n \sum_{k=0}^{2^{n-2}-1} f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right) + h_n f\left(x_{2^{n-2}+\frac{1}{2}}\right) + h_n \sum_{k=0}^{2^{n-2}-2} f\left(x_{2^{n-1}-(k+\frac{1}{2})}\right) = h_n \sum_{k=0}^{2^{n-2}-1} f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right) + h_n \sum_{k=0}^{2^{n-2}-1} f\left(x_{2^{n-1}-(k+\frac{1}{2})}\right)$$

eşitliğinden

$$(1.16) \quad h_n \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right) = h_n \sum_{k=0}^{2^{n-2}-1} f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right) + h_n \sum_{k=0}^{2^{n-2}-1} f\left(x_{2^{n-1}-(k+\frac{1}{2})}\right)$$

sonucunun geçerli olduğunu görür ve bunu (1.9)'da yerine koyar ve gerekli düzenlemeleri yaparsak,

$$\begin{aligned} T_n &= h_n \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right) + h_n \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f\left(x_{2^n-(k+\frac{1}{2})}\right) = h_n \sum_{k=0}^{2^{n-2}-1} f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right) + h_n \sum_{k=0}^{2^{n-2}-1} f\left(x_{2^{n-1}-(k+\frac{1}{2})}\right) + h_n \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f\left(x_{2^n-(k+\frac{1}{2})}\right) \\ &= h_n \sum_{k=0}^{2^{n-2}-1} f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right) + h_n \sum_{m=0}^1 \sum_{k=0}^{2^{n-m-1}-1} f\left(x_{2^{n-m}-(k+\frac{1}{2})}\right) \end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$\begin{aligned} (1.17) \quad T_n &= h_n \sum_{k=0}^{2^{n-2}-1} f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right) + h_n \sum_{m=0}^1 \sum_{k=0}^{2^{n-m-1}-1} f\left(x_{2^{n-m}-(k+\frac{1}{2})}\right) \\ &= h_n \sum_{k=0}^{2^{n-2}-1} f\left(a + \left(k + \frac{1}{2}\right)h_n\right) + h_n \sum_{m=0}^1 \sum_{k=0}^{2^{n-m-1}-1} f\left(a + h_m - \left(k + \frac{1}{2}\right)h_n\right) \end{aligned}$$

sonucu geçerli olur.

Sonuç olarak (1.6)&(1.13)'ten K_n için

$$\begin{aligned} K_1^n &= h_n \frac{f(x_{2^n}) - f(x_0)}{2} + h_n f(x_{2^{n-1}}) + h_n \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f(x_k) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-1}} f(x_{2^n-k}) = h_n \frac{f(x_{2^n}) - f(x_0)}{2} + h_n \sum_{m=1}^1 f(x_{2^{n-m}}) + h_n \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f(x_k) + h_n \sum_{m=0}^0 \sum_{k=1}^{2^{n-m-1}-1} f(x_{2^{n-m}-k}) \\ K_2^n &= h_n \frac{f(x_{2^n}) - f(x_0)}{2} + h_n \sum_{m=1}^2 f(x_{2^{n-m}}) + h_n \sum_{k=0}^{2^{n-2}-1} f(x_k) + h_n \sum_{m=0}^1 \sum_{k=1}^{2^{n-m-1}-1} f(x_{2^{n-m}-k}) \end{aligned}$$

bağıntıları geçerli olduklarından ve işleme bu şekilde devam edilirse MEM gereğince $\forall n, p \in \mathbb{N}, p \leq n$ için

$$\begin{aligned} (1.18) \quad K_p^n &= h_n \frac{f(x_{2^n}) - f(x_0)}{2} + h_n \sum_{m=1}^p f(x_{2^{n-m}}) + h_n \sum_{k=0}^{2^{n-p}-1} f(x_k) + h_n \sum_{m=0}^{p-1} \sum_{k=1}^{2^{n-m-1}-1} f(x_{2^{n-m}-k}) \\ &= h_n \frac{f(b) - f(a)}{2} + h_n \sum_{m=1}^p f(a + h_m) + h_n \sum_{k=0}^{2^{n-p}-1} f(a + kh_n) + h_n \sum_{m=0}^{p-1} \sum_{k=1}^{2^{n-m-1}-1} f(a + h_m - kh_n) \end{aligned}$$

ve (ki $p = 0$ için bu formülden (1.1)'in elde edilebildiğine dikkat ediniz) (1.9)&(1.17)'den T_n için

$$\begin{aligned} T_1^n &= h_n \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right) + h_n \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f\left(x_{2^n-(k+\frac{1}{2})}\right) = h_n \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right) + h_n \sum_{m=0}^0 \sum_{k=0}^{2^{n-m-1}-1} f\left(x_{2^{n-m}-(k+\frac{1}{2})}\right) \\ T_2^n &= h_n \sum_{k=0}^{2^{n-2}-1} f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right) + h_n \sum_{m=0}^1 \sum_{k=0}^{2^{n-m-1}-1} f\left(x_{2^{n-m}-(k+\frac{1}{2})}\right) \end{aligned}$$

bağıntıları geçerli olduklarından ve yine işleme bu şekilde devam edilirse MEM gereğince $\forall n, p \in \mathbb{N}, p \leq n$ için

$$\begin{aligned} (1.19) \quad T_p^n &= h_n \sum_{k=0}^{2^{n-p}-1} f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right) + h_n \sum_{m=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{2^{n-m-1}-1} f\left(x_{2^{n-m}-(k+\frac{1}{2})}\right) \\ &= h_n \sum_{k=0}^{2^{n-p}-1} f\left(a + \left(k + \frac{1}{2}\right)h_n\right) + h_n \sum_{m=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{2^{n-m-1}-1} f\left(a + h_m - \left(k + \frac{1}{2}\right)h_n\right) \end{aligned}$$

formülleri geçerli olur.

Sonuç 1.1. (1.18)'deki K_pⁿ ve (1.19)'daki T_pⁿ'nin $\forall n \in \mathbb{N}$ için geçerli olabilmesi için $p = n$ durumunun göz önüne alınması gerekir. Bu durumda $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} K_n^n &= h_n \frac{f(x_{2^n}) - f(x_0)}{2} + h_n \sum_{m=1}^n f(x_{2^{n-m}}) + h_n \sum_{k=0}^{2^{n-n}-1} f(x_k) + h_n \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{2^{n-m-1}-1} f(x_{2^{n-m}-k}) = h_n \frac{f(x_{2^n}) - f(x_0)}{2} + h_n \sum_{m=1}^n f(x_{2^{n-m}}) + h_n f(x_0) + h_n \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{2^{n-m-1}-1} f(x_{2^{n-m}-k}), \\ &= h_n \frac{f(x_0) + f(x_{2^n})}{2} + h_n \sum_{m=1}^n f(x_{2^{n-m}}) + h_n \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{2^{n-m-1}-1} f(x_{2^{n-m}-k}) \end{aligned}$$

K_n ve T_n İçin İndirgeme Bağntıları

ve

$$T_n^n = h_n \sum_{k=0}^{2^{n-n}-1} f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right) + h_n \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{2^{n-m-1}-1} f\left(x_{2^{n-m}-(k+\frac{1}{2})}\right) = h_n f\left(\frac{x_1}{2}\right) + h_n \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{2^{n-m-1}-1} f\left(x_{2^{n-m}-(k+\frac{1}{2})}\right)$$

eşitliklerinden

$$(1.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} K_n^n = h_n \frac{f(x_0) + f(x_{2^n})}{2} + h_n \sum_{m=1}^n f(x_{2^{n-m}}) + h_n \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{2^{n-m-1}-1} f(x_{2^{n-m}-k}), \\ = \frac{K_0}{2^n} + h_n \sum_{m=1}^n f(a + h_m) + h_n \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{2^{n-m-1}-1} f(a + h_m - kh_n) \\ T_n^n = h_n f\left(\frac{x_1}{2}\right) + h_n \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{2^{n-m-1}-1} f\left(x_{2^{n-m}-(k+\frac{1}{2})}\right) \\ = h_n f(a + h_{n+1}) + h_n \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{2^{n-m-1}-1} f\left(a + h_m - \left(k + \frac{1}{2}\right)h_n\right) \end{array} \right.$$

formüllerini ortaya çıkar.

Teorem 1.3 (Genel İndirgeme Bağntıları, 09.05.2021, 04:13-11.05.2021, 08:24). $\forall n, p \in \mathbb{N}, p \leq n$ için (1.3)'teki K_p^n 'nin K_p 'ye ve T_p^n 'nin indirgeme bağntıları şu şekildedir:

$$(1.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} K_p^n = \frac{K_p}{2^{n-p}} + h_n \sum_{q=0}^p \sum_{m=0}^{\lfloor 2^{p-q-1}-1 \rfloor} \sum_{k=1}^{2^{n-p-1}} f\left(a + \left((2m+1)2^{n-(p-q)} - k\right)h_n\right), \\ T_p^n = h_n \sum_{q=0}^p \sum_{m=0}^{\lfloor 2^{p-q-1}-1 \rfloor} \sum_{k=0}^{2^{n-p-1}} f\left(a + \left((2m+1)2^{n-(p-q)} - \left(k + \frac{1}{2}\right)\right)h_n\right). \end{array} \right.$$

İspat. Bu ispatta önce K_p^n 'nin K_p 'ye adım adım nasıl indirgendiğini ve sonra T_p^n 'nin K_p^n 'den nasıl elde edildiğini göstereceğim!

1. **K_p^n 'nin K_p 'ye İndirgenmesi.** Öncelikle $p = 0$ için ilk formülden elde edilen ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için geçerli olan ilk indirgeme bağntısını (1.1)'de verdim. Nümerik analizciler bu ilk indirgeme bağntısını bilirler ve kullanırlar ama bu şekilde değil şöyle: Eğer [RİK 4](#)'teki (1.1)'deki K_0 'ı (1.1)'de yerine koyarsak,

$$(1.22) \quad K_n = \frac{f(a)}{2^{n+1}} + h_n \sum_{k=1}^{2^n-1} f(a + kh_n) + \frac{f(b)}{2^{n+1}}$$

formülü (1.14)'teki 2. formüle ulaşılmasında kullanılmaktadır. Örneğin, **Nuri Özalp**'in "[Nümerik Analiz-Bilimsel Hesaplama Matematiği: Sayısal İntegral](#)" makalesinde bu formül (2)'de ve açılımı (2)'nin altındaki sayfada (3. sayfa) $K_n = T(2^n)$ olmak üzere $n = 1, 2, 3$ için $T(1), T(2), T(4), T(8)$ örnekleriyle verilmiştir. Fakat bu açılım 4-5. sayfalardan görüldüğü üzere (1.1) için değil, (1.14)'teki 2. formül için kullanılmıştır (Bkz. [S. 6](#)'daki genel formüle). Diğer tüm Nümerik Analiz kitaplarında durum hiç istisnasız böyledir. Oysa herhangi bir bilgisayar programı kullananlar, (1.14)'teki 2. formülün (1.1)'e göre kullanımının ne kadar dezavantajlı olduğunu bilirler. Yani bir bilgisayar programcısına "[\(1.14\)'teki 2. formül mü yoksa \(1.1\) mi daha kullanışlı?](#)" diye sorarsanız, o size (1.1)'in (1.14)'teki 2. formülden hem daha kullanışlı hem de daha hızlı çıktıların alındığını söyleyecektir. Bu, işin bilgisayar kısmıdır ve matematikteki durumunu ise Teorem 1.1'de açıkladım. Yani matematikte de durum aynıdır. Çünkü işin kolayına kaçılmıştır!

Şimdi ispata geçmeden ilkin $\forall n, p \in \mathbb{N}, p \leq n$ için

$$\sum_{k=1}^{2^{n-p}-1} f(x_{2^{n-p}-k}) = \sum_{k=1-2^{n-p}}^{2^{n-p}-1-2^{n-p}} f(x_{2^{n-p}-(k+2^{n-p})}) = \sum_{k=1-2^{n-p}}^{-1} f(x_{-k}) = \sum_{k=1}^{2^{n-p}-1} f(x_k)$$

eşitlikleri geçerli olduğundan

$$(1.23) \quad \sum_{k=1}^{2^{n-p}-1} f(x_k) = \sum_{k=1}^{2^{n-p}-1} f(x_{2^{n-p}-k})$$

özdeşliğine dikkat etmemiz gerekiyor. Çünkü bu durumda (1.1)'e göre

$$K_0^n := K_n = \frac{K_0}{2^n} + h_n \sum_{k=1}^{2^n-1} f(a + kh_n) = \frac{K_0}{2^n} + h_n \sum_{k=1}^{2^n-1} f(x_k) = \frac{K_0}{2^n} + h_n \sum_{k=1}^{2^n-1} f(x_{2^n-k})$$

eşitliklerinden

$$(1.24) \quad K_0^n = \frac{K_0}{2^n} + h_n \sum_{k=1}^{2^n-1} f(x_{2^n-k})$$

sonucu geçerli olmaktadır.

İkinci olarak $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq n$ için (1.23)'e göre (1.6)'dan

K_n ve T_n İçin İndirgeme Bağlılıları

$$K_1^n = h_n \frac{f(x_{2^n}) - f(x_0)}{2} + h_n f(x_{2^{n-1}}) + h_n \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f(x_k) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} f(x_{2^n-k}) = h_n \frac{f(x_{2^n}) - f(x_0)}{2} + h_n f(x_{2^{n-1}}) + h_n f(x_0) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} f(x_k) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} f(x_{2^n-k})$$

eşitlikleri geçerli olur ve burada

$$\begin{aligned} h_n \frac{f(x_{2^n}) - f(x_0)}{2} + h_n f(x_{2^{n-1}}) + h_n f(x_0) &= h_n \frac{f(x_0) + f(x_{2^n})}{2} + h_n f(x_{2^{n-1}}) = h_n \frac{f(a) + f(b)}{2} + h_n f(a + 2^{n-1} \cdot h_n) = h_n \frac{K_0}{h_0} + h_n f(a + h_1) = \frac{K_0}{2^n} + h_n \frac{T_0}{h_0} = \frac{K_0}{2^n} + \frac{T_0}{2^n} \\ &= \frac{K_0 + T_0}{2^n} = \frac{2K_1}{2^n} = \frac{K_1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

olduğundan

$$(1.25) \quad K_1^n = \frac{K_1}{2^{n-1}} + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} f(x_{2^n-k}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} f(x_{2^{n-1}-k})$$

indirgeme bağıntısının geçerli olduğunu görürüz.

Üçüncü olarak $\forall n \in \mathbb{N}, 2 \leq n$ için (1.23)'e göre (1.13)'ten

$$\begin{aligned} K_2^n &= h_n \frac{f(x_{2^n}) - f(x_0)}{2} + h_n \sum_{m=1}^2 f(x_{2^{n-m}}) + h_n \sum_{k=0}^{2^{n-2}-1} f(x_k) + h_n \sum_{m=0}^1 \sum_{k=1}^{2^{n-m-1}-1} f(x_{2^{n-m}-k}) \\ &= h_n \frac{f(x_{2^n}) - f(x_0)}{2} + h_n \sum_{m=1}^2 f(x_{2^{n-m}}) + h_n f(x_0) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-2}-1} f(x_k) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} f(x_{2^n-k}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-2}-1} f(x_{2^{n-1}-k}) \\ &= h_n \frac{f(x_0) + f(x_{2^n})}{2} + h_n \sum_{m=1}^2 f(x_{2^{n-m}}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-2}-1} f(x_{2^{n-2}-k}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} f(x_{2^n-k}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-2}-1} f(x_{2^{n-1}-k}) \end{aligned}$$

eşitliklerinde

$$\sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} f(x_{2^n-k}) = \sum_{k=1}^{2^{n-2}-1} f(x_{2^n-k}) + f(x_{2^{n-2}-2^{n-2}}) + \sum_{k=2^{n-2}+1}^{2^{n-1}-1} f(x_{2^n-k}) = \sum_{k=1}^{2^{n-2}-1} f(x_{2^n-k}) + f(x_{2^{n-2}-2^{n-2}}) + \sum_{k=1}^{2^{n-2}-1} f(x_{2^{n-2}-2^{n-2}-k})$$

nedeniyle

$$(1.26) \quad \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} f(x_{2^n-k}) = \sum_{k=1}^{2^{n-2}-1} f(x_{2^n-k}) + f(x_{2^{n-2}-2^{n-2}}) + \sum_{k=1}^{2^{n-2}-1} f(x_{2^{n-2}-2^{n-2}-k})$$

geçerli olduğundan

$$\begin{aligned} K_2^n &= h_n \frac{f(x_0) + f(x_{2^n})}{2} + h_n \sum_{m=1}^2 f(x_{2^{n-m}}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-2}-1} f(x_{2^{n-2}-k}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} f(x_{2^n-k}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-2}-1} f(x_{2^{n-1}-k}) \\ &= h_n \frac{f(a) + f(b)}{2} + h_n \sum_{m=1}^2 f(x_{2^{n-m}}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-2}-1} f(x_{2^{n-2}-k}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-2}-1} f(x_{2^n-k}) + h_n f(x_{2^{n-2}-2^{n-2}}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-2}-1} f(x_{2^{n-2}-2^{n-2}-k}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-2}-1} f(x_{2^{n-1}-k}) \\ &= h_n \frac{K_0}{h_0} + h_n \sum_{m=1}^2 f(x_{2^{n-m}}) + h_n f(x_{3,2^{n-2}}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-2}-1} f(x_{2^{n-2}-k}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-2}-1} f(x_{2^n-k}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-2}-1} f(x_{3,2^{n-2}-k}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-2}-1} f(x_{2^{n-1}-k}) \\ &= \frac{K_0}{2^n} + h_n f(x_{2^{n-1}}) + h_n f(x_{2^{n-2}}) + h_n f(x_{3,2^{n-2}}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-2}-1} f(x_{2^n-k}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-2}-1} f(x_{2^{n-1}-k}) + h_n \sum_{m=0}^1 \sum_{k=1}^{2^{n-2}-1} f(x_{(2m+1)2^{n-2}-k}) \end{aligned}$$

eşitliklerinde

$$\begin{aligned} \frac{K_0}{2^n} + h_n f(x_{2^{n-1}}) + h_n f(x_{2^{n-2}}) + h_n f(x_{3,2^{n-2}}) &= \frac{K_0}{2^n} + h_n f(a + 2^{n-1}h_n) + h_n f(a + 2^{n-2}h_n) + h_n f(a + 3 \cdot 2^{n-2}h_n) = \frac{K_0}{2^n} + h_n f(a + h_1) + h_n f(a + h_2) + h_n f(a + 3h_2) \\ &= \frac{K_0}{2^n} + h_n \frac{T_0}{h_0} + h_n f(a + h_2) + h_n f(a + 3h_2) = \frac{K_0}{2^n} + \frac{T_0}{2^n} + h_n f(a + h_2) + h_n f(a + 3h_2) = \frac{2K_1}{2^n} + h_n \frac{T_1}{h_1} = \frac{K_1}{2^{n-1}} + \frac{T_1}{2^{n-1}} = \frac{2K_2}{2^{n-1}} = \frac{K_2}{2^{n-2}} \end{aligned}$$

olduğundan

$$(1.27) \quad K_2^n = \frac{K_2}{2^{n-2}} + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-2}-1} f(x_{2^n-k}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-2}-1} f(x_{2^{n-1}-k}) + h_n \sum_{m=0}^1 \sum_{k=1}^{2^{n-2}-1} f(x_{(2m+1)2^{n-2}-k})$$

sonucu elde edilir.

Dördüncü olarak $\forall n \in \mathbb{N}, 3 \leq n$ için (1.23) ve (1.26)'ya göre (1.18)'den

K_n ve T_n İçin İndirgeme Bağlılıları

$$\begin{aligned}
K_3^n &= h_n \frac{f(x_{2^n}) - f(x_0)}{2} + h_n \sum_{m=1}^3 f(x_{2^{n-m}}) + h_n \sum_{k=0}^{2^{n-3}-1} f(x_k) + h_n \sum_{m=0}^2 \sum_{k=1}^{2^{n-m-1}-1} f(x_{2^{n-m-k}}) \\
&= h_n \frac{f(x_{2^n}) - f(x_0)}{2} + h_n \sum_{m=1}^3 f(x_{2^{n-m}}) + h_n f(x_0) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} f(x_k) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} f(x_{2^{n-k}}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-2}-1} f(x_{2^{n-1-k}}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} f(x_{2^{n-2-k}}) \\
&= h_n \frac{f(x_0) + f(x_{2^n})}{2} + h_n \sum_{m=1}^3 f(x_{2^{n-m}}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} f(x_{2^{n-3-k}}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-2}-1} f(x_{2^{n-k}}) + h_n f(x_{2^{n-2^{n-2}}}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-2}-1} f(x_{2^{n-2^{n-2-k}}}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-2}-1} f(x_{2^{n-1-k}}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} f(x_{2^{n-2-k}})
\end{aligned}$$

eşitliklerinde

$$(1.28) \quad \begin{cases} \sum_{k=1}^{2^{n-2}-1} f(x_{2^n-k}) = \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} f(x_{2^n-k}) + f(x_{2^{n-2^{n-3}}}) + \sum_{k=2^{n-3}+1}^{2^{n-2}-1} f(x_{2^n-k}) = \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} f(x_{2^n-k}) + f(x_{2^{n-2^{n-3}}}) + \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} f(x_{2^{n-2^{n-3-k}}}) \\ \sum_{k=1}^{2^{n-2}-1} f(x_{2^{n-2^{n-2-k}}}) = \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} f(x_{2^{n-2^{n-2-k}}}) + f(x_{2^{n-2^{n-2^{n-3}}}}) + \sum_{k=2^{n-3}+1}^{2^{n-2}-1} f(x_{2^{n-2^{n-2-k}}}) = \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} f(x_{2^{n-2^{n-2-k}}}) + f(x_{2^{n-2^{n-2^{n-3}}}}) + \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} f(x_{2^{n-2^{n-2^{n-3-k}}}}) \\ \sum_{k=1}^{2^{n-2}-1} f(x_{2^{n-1-k}}) = \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} f(x_{2^{n-1-k}}) + f(x_{2^{n-1-2^{n-3}}}) + \sum_{k=2^{n-3}+1}^{2^{n-2}-1} f(x_{2^{n-1-k}}) = \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} f(x_{2^{n-1-k}}) + f(x_{2^{n-1-2^{n-3}}}) + \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} f(x_{2^{n-1-2^{n-3-k}}}) \end{cases}$$

sonuçları geçerli olduğundan

$$\begin{aligned}
K_3^n &= h_n \frac{f(x_0) + f(x_{2^n})}{2} + h_n \sum_{m=1}^3 f(x_{2^{n-m}}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} f(x_{2^{n-3-k}}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-2}-1} f(x_{2^n-k}) + h_n f(x_{2^{n-2^{n-2}}}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-2}-1} f(x_{2^{n-2^{n-2-k}}}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-2}-1} f(x_{2^{n-1-k}}) \\
&+ h_n \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} f(x_{2^{n-2-k}}) = h_n \frac{f(x_0) + f(x_{2^n})}{2} + h_n \sum_{m=1}^3 f(x_{2^{n-m}}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} f(x_{2^{n-3-k}}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} f(x_{2^n-k}) + h_n f(x_{2^{n-2^{n-3}}}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} f(x_{2^{n-2^{n-3-k}}}) + h_n f(x_{2^{n-2^{n-2}}}) \\
&+ h_n \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} f(x_{2^{n-2^{n-2-k}}}) + h_n f(x_{2^{n-2^{n-2^{n-3}}}}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} f(x_{2^{n-2^{n-2^{n-3-k}}}}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} f(x_{2^{n-1-k}}) + h_n f(x_{2^{n-1-2^{n-3}}}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} f(x_{2^{n-1-2^{n-3-k}}}) \\
&+ h_n \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} f(x_{2^{n-2-k}}) = h_n \frac{f(x_0) + f(x_{2^n})}{2} + h_n \sum_{m=1}^3 f(x_{2^{n-m}}) + h_n f(x_{2^{n-2^{n-2}}}) + h_n f(x_{2^{n-1-2^{n-3}}}) + h_n f(x_{2^{n-2^{n-2^{n-3}}}}) + h_n f(x_{2^{n-2^{n-3}}}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} f(x_{2^n-k}) \\
&+ h_n \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} f(x_{2^{n-1-k}}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} f(x_{2^{n-2-k}}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} f(x_{2^{n-2^{n-2-k}}}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} f(x_{2^{n-3-k}}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} f(x_{2^{n-1-2^{n-3-k}}}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} f(x_{2^{n-2^{n-2^{n-3-k}}}}) \\
&+ h_n \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} f(x_{2^{n-2^{n-3-k}}}) = h_n \frac{f(x_0) + f(x_{2^n})}{2} + h_n \sum_{m=1}^3 f(x_{2^{n-m}}) + h_n f(x_{3,2^{n-2}}) + h_n f(x_{3,2^{n-3}}) + h_n f(x_{5,2^{n-3}}) + h_n f(x_{7,2^{n-3}}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} f(x_{2^n-k}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} f(x_{2^{n-1-k}}) \\
&+ h_n \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} f(x_{2^{n-2-k}}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} f(x_{3,2^{n-2-k}}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} f(x_{2^{n-3-k}}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} f(x_{3,2^{n-3-k}}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} f(x_{5,2^{n-3-k}}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} f(x_{7,2^{n-3-k}}) \\
&= h_n \frac{f(x_0) + f(x_{2^n})}{2} + h_n \sum_{m=1}^3 f(x_{2^{n-m}}) + h_n f(x_{3,2^{n-2}}) + h_n f(x_{3,2^{n-3}}) + h_n f(x_{5,2^{n-3}}) + h_n f(x_{7,2^{n-3}}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} f(x_{2^n-k}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} f(x_{2^{n-1-k}}) \\
&+ h_n \sum_{m=0}^1 \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} f(x_{(2m+1)2^{n-2-k}}) + h_n \sum_{m=0}^3 \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} f(x_{(2m+1)2^{n-3-k}})
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

Burada

$$\begin{aligned}
&h_n \frac{f(x_0) + f(x_{2^n})}{2} + h_n \sum_{m=1}^3 f(x_{2^{n-m}}) + h_n f(x_{3,2^{n-2}}) + h_n f(x_{3,2^{n-3}}) + h_n f(x_{5,2^{n-3}}) + h_n f(x_{7,2^{n-3}}) = h_n \frac{f(x_0) + f(x_{2^n})}{2} + h_n f(x_{2^{n-1}}) + h_n f(x_{2^{n-2}}) + h_n f(x_{2^{n-3}}) + h_n f(x_{3,2^{n-2}}) \\
&+ h_n f(x_{3,2^{n-3}}) + h_n f(x_{5,2^{n-3}}) + h_n f(x_{7,2^{n-3}}) = h_n \frac{f(a) + f(b)}{2} + h_n f(a + 2^{n-1}h_n) + h_n f(a + 2^{n-2}h_n) + h_n f(a + 2^{n-3}h_n) + h_n f(a + 3 \cdot 2^{n-2}h_n) + h_n f(a + 3 \cdot 2^{n-3}h_n) \\
&+ h_n f(a + 5 \cdot 2^{n-3}h_n) + h_n f(a + 7 \cdot 2^{n-3}h_n) = h_n \frac{K_0}{h_0} + h_n f(a + h_1) + h_n f(a + h_2) + h_n f(a + h_3) + h_n f(a + 3h_2) + h_n f(a + 3h_3) + h_n f(a + 5h_3) + h_n f(a + 7h_3) \\
&= \frac{K_0}{2^n} + h_n \frac{T_0}{h_0} + h_n f(a + h_2) + h_n f(a + h_3) + h_n f(a + 3h_2) + h_n f(a + 3h_3) + h_n f(a + 5h_3) + h_n f(a + 7h_3) = \frac{K_0}{2^n} + \frac{T_0}{2^n} + h_n \frac{T_1}{h_1} + h_n \sum_{k=1}^4 f(a + (2k-1)h_3) \\
&= \frac{K_0 + T_0}{2^n} + \frac{T_1}{2^{n-1}} + h_n \sum_{k=1}^{2^3-1} f(a + (2k-1)h_3) = \frac{2K_1}{2^n} + \frac{T_1}{2^{n-1}} + h_n \frac{T_2}{h_2} = \frac{K_1}{2^{n-1}} + \frac{T_1}{2^{n-1}} + \frac{T_2}{2^{n-2}} = \frac{K_1 + T_1}{2^{n-1}} + \frac{T_2}{2^{n-2}} = \frac{2K_2}{2^{n-1}} + \frac{T_2}{2^{n-2}} = \frac{K_2}{2^{n-2}} + \frac{T_2}{2^{n-2}} = \frac{K_2 + T_2}{2^{n-2}} \\
&= \frac{2K_3}{2^{n-2}} = \frac{K_3}{2^{n-3}}
\end{aligned}$$

eşitlikleri geçerli olduğundan

$$(1.29) \quad K_3^n = \frac{K_3}{2^{n-3}} + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} f(x_{2^n-k}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} f(x_{2^{n-1-k}}) + h_n \sum_{m=0}^1 \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} f(x_{(2m+1)2^{n-2-k}}) + h_n \sum_{m=0}^3 \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} f(x_{(2m+1)2^{n-3-k}})$$

sonucu elde edilir.

K_n ve T_n İçin İndirgeme Bağlılıları

Şu halde (1.25), (1.27) ve (1.29)'dan

$$(1.30) \quad \left\{ \begin{array}{l} K_1^n = \frac{K_1}{2^{n-1}} + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} f(x_{2^n-k}) + h_n \sum_{m=0}^0 \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} f(x_{(2m+1)2^{n-1}-k}) = \frac{K_1}{2^{n-1}} + h_n \sum_{q=0}^{1-1} \sum_{m=0}^{2^{1-q-1}-1} \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} f(x_{(2m+1)2^{n+q-1}-k}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} f(x_{2^n-k}) \\ K_2^n = \frac{K_2}{2^{n-2}} + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-2}-1} f(x_{2^n-k}) + h_n \sum_{m=0}^0 \sum_{k=1}^{2^{n-2}-1} f(x_{(2m+1)2^{n-1}-k}) + h_n \sum_{m=0}^1 \sum_{k=1}^{2^{n-2}-1} f(x_{(2m+1)2^{n-2}-k}) \\ = \frac{K_2}{2^{n-2}} + h_n \sum_{q=0}^{2-1} \sum_{m=0}^{2^{2-q-1}-1} \sum_{k=1}^{2^{n-2}-1} f(x_{(2m+1)2^{n+q-2}-k}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-2}-1} f(x_{2^n-k}) \\ K_3^n = \frac{K_3}{2^{n-3}} + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-2}-1} f(x_{2^n-k}) + h_n \sum_{m=0}^0 \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} f(x_{(2m+1)2^{n-1}-k}) + h_n \sum_{m=0}^1 \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} f(x_{(2m+1)2^{n-2}-k}) + h_n \sum_{m=0}^3 \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} f(x_{(2m+1)2^{n-3}-k}) \\ = \frac{K_3}{2^{n-3}} + h_n \sum_{q=0}^{3-1} \sum_{m=0}^{2^{3-q-1}-1} \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} f(x_{(2m+1)2^{n+q-3}-k}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} f(x_{2^n-k}) \end{array} \right.$$

sonuçları elde edildiğinden ve işleme bu şekilde devam edildiği takdirde MEM gereğince $\forall n, p \in \mathbb{N}, p \leq n$ için

$$(1.31) \quad \begin{aligned} K_p^n &= \frac{K_p}{2^{n-p}} + h_n \sum_{q=0}^{p-1} \sum_{m=0}^{2^{p-q-1}-1} \sum_{k=1}^{2^{n-p}-1} f(x_{(2m+1)2^{n+q-p}-k}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-p}-1} f(x_{2^n-k}) \\ &= \frac{K_p}{2^{n-p}} + h_n \sum_{q=0}^p \sum_{m=0}^{\lfloor 2^{p-q-1}-1 \rfloor} \sum_{k=1}^{2^{n-p}-1} f(x_{(2m+1)2^{n-(p-q)}-k}) \end{aligned}$$

şeklinde genel indirgeme bağıntısı geçerli olur. Burada son bağıntıdaki ortadaki toplamın üst sınırının tam kısmı ilk eşitlikteki son toplamın genel toplama katılması nedeniyle alınmıştır. Çünkü $q = 0, 1, \dots, p-1$ için $2^{p-q-1} - 1 \in \mathbb{N}$ iken $q = p$ için $\lfloor 2^{p-p-1} - 1 \rfloor = \lfloor 2^{-1} - 1 \rfloor = \lfloor -2^{-1} \rfloor = 0$ olarak almak en doğrusudur. Böylece 2. eşitlikteki ortadaki toplamda $m = 0$ alındığında ilk eşitlikteki son toplam ortaya çıkar.

Fakat bu genel indirgeme bağıntısına ulaşmam kolay olmadı. Çünkü bu bağıntının (1.18)'deki gibi basit bir şekilde ortaya çıkacağını zannediyordum ve (1.31)'deki ilk bağıntıyı elde edene kadar hiç şakası yok, $p = 1, 2, 3, 4, 5$ 'e kadar tüm indirgeme bağıntılarını buldum ve onları Mathematica'da teker teker test ettim. Kaldı ki (1.30)'dan (1.31)'deki ilk indirgeme bağıntısını öngörebilmek kolay değildir. İşte bu yüzden (1.31)'deki indirgeme bağıntılarını bulmam 2 günü biraz geçti! Ama 2 gündür her saat çalışıyor da değildim. Yani toplasan hepi topu 5-6 saatimi almıştır.

Peki (1.31) bağıntıları neden 2 gün sürdü?

Aslında ilk başta böyle bir niyetim yoktu ve o sırada $p = 1, 2$ için (1.25) ve (1.27)'deki bağıntıları bulmuştum. Ama sonra bunun Teorem 1.2'nin devamı olarak düşününce ve şimdiye kadar kimse trapez yaklaşıklıklığı için böyle bir şeye cüret etmediğine göre (kaldı ki buradaki hiçbir teorem başka bir kaynaktan geçmez. Yani bu teoremlerin hepsi yeni ve ilktirler), o zaman aklıma bunu bir teorem olarak yani (1.21)'deki ilk indirgeme bağıntısını vermek geldi. 1 gün bu düşünceler içinde geçti ve 2. gün ilkin $p = 3$ için (1.29)'u ve onun ardından da $p = 4$ için indirgeme bağıntılarını buldum. Ama hesaplarım buradaki gibi hem düzenli değildi hem de artan sayıdaki toplamaları nasıl formüle edebileceğimi görememiştim: $p = 1, 2, 3, 4$ için indirgeme bağıntılarını bulduğum halde hala jeton düşmemişti. Aklıma son olarak, bu indirgeme bağıntılarındaki toplamaları (1.31)'de geçen x 'in indisindeki $2m + 1$ katsayılarına göre düzenlemek ve bunları tablolar halinde düzenleyerek değişimleri gözlemlemek geldi. Örneğin, $p = 5$ için elde ettiğim indirgeme bağıntısını bu tablolara göre yazdım ve Mathematica'da da kontrol ettim. Doğruydum ve ancak bundan sonra (1.31)'deki ilk indirgeme bağıntısını verebildim. Tabii ki bunları da değişen p değerlerine göre Mathematica'da kontrol ettim. Hepsi doğrudum. En son (1.31)'deki ilk indirgeme bağıntısındaki son toplamı da tam değer fonksiyonuyla genel toplama kattım ve böylece K_p^n 'yi 3 toplam altında yazmış oldum!

2. ***T_pⁿ'nin İndirgenmesi.*** Eğer T_p^n 'yi elde etmek için (1.31)'deki K_p^n 'yi aritmetik ortalamada kullanır,

$$T_p^n = 2K_p^{n+1} - K_p^n = h_n \sum_{q=0}^p \sum_{m=0}^{\lfloor 2^{p-q-1}-1 \rfloor} \sum_{k=1}^{2^{n-p+1}-1} f(a + ((2m+1)2^{n+1-(p-q)} - k)h_{n+1}) - h_n \sum_{q=0}^p \sum_{m=0}^{\lfloor 2^{p-q-1}-1 \rfloor} \sum_{k=1}^{2^{n-p}-1} f(a + ((2m+1)2^{n-(p-q)} - k)h_n)$$

ve bu eşitlikteki ilk 3'lü toplamdaki ilk toplamı tek ve çiftlere göre 2 toplama ayırırsak,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2^{n-p+1}-1} f(a + ((2m+1)2^{n+1-(p-q)} - k)h_{n+1}) &= \sum_{k=1}^{2^{n-p}} f(a + ((2m+1)2^{n+1-(p-q)} - (2k-1))h_{n+1}) + \sum_{k=1}^{2^{n-p}} f(a + ((2m+1)2^{n+1-(p-q)} - 2k)h_{n+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{2^{n-p}} f(a + ((2m+1)2^{n+1-(p-q)} - (2k-1))h_{n+1}) + \sum_{k=1}^{2^{n-p}-1} f(a + ((2m+1)2^{n-(p-q)} - k)h_n) \end{aligned}$$

sonucu geçerli olduğundan

$$\begin{aligned} T_p^n &= h_n \sum_{q=0}^p \sum_{m=0}^{\lfloor 2^{p-q-1}-1 \rfloor} \sum_{k=1}^{2^{n-p}} f(a + ((2m+1)2^{n+1-(p-q)} - (2k-1))h_{n+1}) + h_n \sum_{q=0}^p \sum_{m=0}^{\lfloor 2^{p-q-1}-1 \rfloor} \sum_{k=1}^{2^{n-p}-1} f(a + ((2m+1)2^{n-(p-q)} - k)h_n) \\ &\quad - h_n \sum_{q=0}^p \sum_{m=0}^{\lfloor 2^{p-q-1}-1 \rfloor} \sum_{k=1}^{2^{n-p}-1} f(a + ((2m+1)2^{n-(p-q)} - k)h_n) = h_n \sum_{q=0}^p \sum_{m=0}^{\lfloor 2^{p-q-1}-1 \rfloor} \sum_{k=1}^{2^{n-p}} f(a + ((2m+1)2^{n+1-(p-q)} - (2k-1))h_{n+1}) \end{aligned}$$

eşitliklerine göre indirgeme bağıntısını şöyle elde etmiş oluruz:

K_n ve T_n İçin İndirgeme Bağlılıları

$$(1.32) \quad T_p^n = h_n \sum_{q=0}^p \sum_{m=0}^{\lfloor 2^{p-q-1}-1 \rfloor} \sum_{k=0}^{2^{n-p}-1} f\left(a + \left((2m+1)2^{n-(p-q)} - \left(k + \frac{1}{2}\right)\right)h_n\right).$$

Sonuç 1.3. Öncelikle (1.31)'den şu sonuçlar elde edilir:

1. **K_n İçin 2. Formdan Elde Edilen Şaşırtıcı Sonuç.** Eğer (1.31)'de $p = n$ alırsak (1.20)'deki gibi bir sonuç çıkmaz;

$$K_n^n = \frac{K_n}{2^{n-n}} + h_n \sum_{q=0}^n \sum_{m=0}^{\lfloor 2^{n-q-1}-1 \rfloor} \sum_{k=1}^{2^{n-n}-1} f(x_{(2m+1)2^{n+q-n}-k}) = K_n + h_n \sum_{q=0}^n \sum_{m=0}^{\lfloor 2^{n-q-1}-1 \rfloor} \sum_{k=1}^0 f(x_{(2m+1)2^q-k}) = K_n + h_n \sum_{q=0}^n \sum_{m=0}^{\lfloor 2^{n-q-1}-1 \rfloor} 0 = K_n + 0 = K_n$$

eşitliklerinden görüldüğü üzere

$$(1.33) \quad K_n^n = K_n$$

orijinaline döner!

2. **Simetri Özelliği.** $\forall n, p \in \mathbb{N}, p \leq n$ için

$$(1.34) \quad K_{n-p}^n = \frac{K_{n-p}}{2^p} + \sum_{r=1}^p \frac{T_{n-r}}{2^r} = \frac{K_{n-p}}{2^p} + h_n \sum_{q=0}^{n-p-1} \sum_{m=0}^{2^{n-p-q-1}-1} \sum_{k=1}^{2^{p-1}} f(x_{(2m+1)2^{p+q-k}}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{p-1}} f(x_{2^n-k}) = \frac{K_{n-p}}{2^p} + h_n \sum_{q=0}^{n-p} \sum_{m=0}^{\lfloor 2^{n-p-q-1}-1 \rfloor} \sum_{k=1}^{2^{p-1}} f(x_{(2m+1)2^{p+q-k}})$$

bağıntıları geçerlidir. Burada binom katsayılarındaki gibi $K_p^n = K_{n-p}^n$ eşitliği yani simetri özelliği mevcuttur. Yani bu bağıntılar (1.31) ile aynı sonuçları üretir. Çünkü her ikisi de 0'dan p'ye kadar değil; p'den n'ye kadar aynı sonuçları üretmektedirler. Kaldı ki $p = 0$ için her ikisinden de (1.22) elde edilir!

İspat. Bunun için (1.31)'de p yerine $n - p$ alırsak $\forall n, p \in \mathbb{N}, p \leq n$ için

$$(1.35) \quad K_{n-p}^n = \frac{K_{n-p}}{2^p} + h_n \sum_{q=0}^{n-p-1} \sum_{m=0}^{2^{n-p-q-1}-1} \sum_{k=1}^{2^{p-1}} f(x_{(2m+1)2^{p+q-k}}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{p-1}} f(x_{2^n-k}) = \frac{K_{n-p}}{2^p} + h_n \sum_{q=0}^{n-p} \sum_{m=0}^{\lfloor 2^{n-p-q-1}-1 \rfloor} \sum_{k=1}^{2^{p-1}} f(x_{(2m+1)2^{p+q-k}})$$

bağıntıları geçerli olur. Burada (1.22)'deki 2. bağıntının genel şekli olan (ki bu, Teorem 1.3'ün ispatındaki 1. Yol ve 2.1. Yol'da açıkça görülmektedir)

$$(1.36) \quad K_n = \frac{K_{n-p}}{2^p} + \sum_{r=1}^p \frac{T_{n-r}}{2^r}$$

bağıntısı geçerlidir ve $K_{n-p}^n = K_n$ eşitliği mevcut olduğundan

$$(1.37) \quad K_{n-p}^n = \frac{K_{n-p}}{2^p} + \sum_{r=1}^p \frac{T_{n-r}}{2^r} = \frac{K_{n-p}}{2^p} + h_n \sum_{q=0}^{n-p-1} \sum_{m=0}^{2^{n-p-q-1}-1} \sum_{k=1}^{2^{p-1}} f(x_{(2m+1)2^{p+q-k}}) + h_n \sum_{k=1}^{2^{p-1}} f(x_{2^n-k}) = h_n \sum_{q=0}^{n-p} \sum_{m=0}^{\lfloor 2^{n-p-q-1}-1 \rfloor} \sum_{k=1}^{2^{p-1}} f(x_{(2m+1)2^{p+q-k}})$$

bağıntıları geçerli olur.

Burada dikkat edilirse 3'lü toplam, (1.22)'deki 2. bağıntıdaki toplama eşittir:

$$(1.38) \quad \sum_{r=1}^p \frac{T_{n-r}}{2^r} = h_n \sum_{q=0}^{n-p} \sum_{m=0}^{\lfloor 2^{n-p-q-1}-1 \rfloor} \sum_{k=1}^{2^{p-1}} f(x_{(2m+1)2^{p+q-k}}).$$

Diğer taraftan (1.32)'den şu sonuçlar elde edilir:

3. **T_n 'nin Dualitesi.** Eğer (1.32)'de $p = 0$ alırsak $\forall n \in \mathbb{N}$ için T_n orta nokta formülünü Önsöz'deki (2)'dekinden farklı olarak şu şekilde elde ederiz:

$$(1.39) \quad T_0^n = h_n \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(a + \left(2^n - \left(k + \frac{1}{2}\right)\right)h_n\right).$$

Fakat (2)'ye göre bu,

$$\begin{aligned} T_n &= h_n \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(a + \left(k + \frac{1}{2}\right)h_n\right) = h_n \sum_{k=-2^{n+1}}^0 f\left(a + \left(-k + \frac{1}{2}\right)h_n\right) = h_n \sum_{k=1}^{2^n} f\left(a + \left(-(k - 2^n) + \frac{1}{2}\right)h_n\right) = h_n \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(a + \left(-((k+1) - 2^n) + \frac{1}{2}\right)h_n\right) \\ &= h_n \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(a + \left(2^n - \left(k + \frac{1}{2}\right)\right)h_n\right) \end{aligned}$$

nedeniyle aynı sonuç demektir:

$$(1.40) \quad h_n \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(a + \left(k + \frac{1}{2}\right)h_n\right) = T_n = h_n \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(a + \left(2^n - \left(k + \frac{1}{2}\right)\right)h_n\right).$$

K_n ve T_n İçin İndirgeme Bağntıları

Not 1.1. K_n için (1.6)'daki 2. bağıntıdaki toplamalar ve T_n için (1.40)'taki eşitliğin genelleştirilmiş şeklini şöyle verebilirim: $\forall n, p \in \mathbb{N}, p \leq n$ için

$$(1.41) \quad \begin{cases} \sum_{k=1}^{2^{n-p}-1} f(a + kh_n) = \sum_{k=1}^{2^{n-p}-1} f(a + (2^{n-p} - k)h_n), \\ \sum_{k=0}^{2^{n-p}-1} f\left(a + \left(k + \frac{1}{2}\right)h_n\right) = \sum_{k=0}^{2^{n-p}-1} f\left(a + \left(2^{n-p} - \left(k + \frac{1}{2}\right)\right)h_n\right) \end{cases}$$

eşitlikleri geçerlidir.

4. **T_n İçin Yeni Bir İndirgeme Bağntısı.** Eğer (1.32)'de p = n alırsak $\forall n \in \mathbb{N}$ için T_n orta nokta formülü için (1.20)'dekinden farklı olarak şu formül geçerli olur:

$$(1.42) \quad T_n^n = h_n \sum_{q=0}^n \sum_{m=0}^{\lfloor 2^{n-q-1}-1 \rfloor} f\left(a + \left((2m+1)2^q - \frac{1}{2}\right)h_n\right).$$

Öyle, çünkü bunu

$$T_n^n = h_n \sum_{q=0}^n \sum_{m=0}^{\lfloor 2^{n-q-1}-1 \rfloor} f\left(a + \left((2m+1)2^q - \frac{1}{2}\right)h_n\right) = h_n \sum_{q=0}^n \sum_{m=0}^{\lfloor 2^{n-q-1}-1 \rfloor} f\left(x_{(2m+1)2^q - \frac{1}{2}}\right) = h_n f\left(x_{2^{n-\frac{1}{2}}}\right) + h_n \sum_{q=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{2^{n-q-1}-1} f\left(x_{(2m+1)2^q - \frac{1}{2}}\right)$$

şeklinde yazar ve (1.20)'dekiyle karşılaştırırsak,

$$h_n f\left(x_{\frac{1}{2}}\right) + h_n \sum_{q=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{2^{n-q-1}-1} f\left(x_{2^{n-q} - \left(m + \frac{1}{2}\right)}\right) = h_n f\left(x_{2^{n-\frac{1}{2}}}\right) + h_n \sum_{q=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{2^{n-q-1}-1} f\left(x_{(2m+1)2^q - \frac{1}{2}}\right)$$

eşitliğindeki karşılıklı f içlerindeki x'lerin indislerindeki eşitliklere göre

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= 2^n - \frac{1}{2} \Rightarrow 2^n = 1, \\ 2^{n-q} - \left(m + \frac{1}{2}\right) &= (2m+1)2^q - \frac{1}{2} \Rightarrow m = \frac{2^{n-q} - 2^q}{2^{q+1} + 1} \end{aligned}$$

çelişkileri söz konusu olur. Çünkü bu eşitliklerin n, q ve m'nin sıfır olmasının haricinde doğal sayılarda çözümü yoktur!

5. **Simetri Özelliği.** $\forall n, p \in \mathbb{N}, p \leq n$ için K_pⁿ = K_{n-p}ⁿ eşitliğini sağlayan

$$(1.43) \quad T_{n-p}^n = h_n \sum_{q=0}^{n-p} \sum_{m=0}^{\lfloor 2^{n-p-q-1}-1 \rfloor} \sum_{k=0}^{2^{p-1}} f\left(a + \left((2m+1)2^{p+q} - \left(k + \frac{1}{2}\right)\right)h_n\right)$$

simetri bağıntısı mevcuttur. Yine bu bağıntı (1.32) ile aynı sonuçları üretir. Ama her ikisi de 0'dan p'ye kadar değil (ki bu değerlerde her ikisinde yakınsaklığın bozulduğuna dikkat ediniz); p'den n'ye kadar aynı sonuçları üretirler!

Teorem 1.4 (Sonlu Farklara Göre İndirgeme Formülleri, 02.06.2021, 07:12:02-11:25:30). $\forall n, p \in \mathbb{N}$ için

$$(1.44) \quad \begin{cases} K_{n+p} = \frac{K_p}{2^n} + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \Delta^{j+1} \left(\frac{K_i}{2^{n+p-i}} \right), \\ T_{n+p} = \frac{T_p}{2^n} + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \Delta^{j+2} \left(\frac{K_i}{2^{n+p-i}} \right) \end{cases}$$

indirgeme bağıntıları vardır. Fakat bu formüller sadece birer özdeşliklerdir, dolayısıyla bundan başka bir anlamı yoktur!

İspat. Hatırlarsanız bundan [4.5 yıl önce \(1.22\)](#)'de K_n için 2 tane indirgeme bağıntısı vermiştim! Bunlardan ilkini Teorem 1.1'de ve bunun genelleştirilmiş şeklini 2 farklı formda (Teorem 1.2&1.4) verdim. Bu teoremden ise 2. bağıntının genelleştirilmiş şeklini vereceğim.

Şimdi bunun için ilkin [\(1.22\)](#)'deki 2. bağıntıyı göz önüne alırsak,

$$K_n = \frac{K_0}{2^n} + \sum_{i=1}^n \frac{T_{n-i}}{2^i} = \frac{K_0}{2^n} + \sum_{i=-n}^{-1} \frac{T_{n+i}}{2^{-i}} = \frac{K_0}{2^n} + \sum_{i=n-n}^{n-1} \frac{T_{n+i-n}}{2^{-(i-n)}} = \frac{K_0}{2^n} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{T_i}{2^{n-i}} \Rightarrow 2^n K_n = K_0 + \sum_{i=0}^{n-1} 2^i T_i$$

eşitliklerinden

$$(1.45) \quad \sum_{i=0}^{n-1} 2^i T_i = 2^n K_n - K_0$$

sonucu geçerli olur ve bu toplamda [\(1.20\)](#)'deki aritmetik ortalamayı kullanırsak,

K_n ve T_n İçin İndirgeme Bağntıları

$$\sum_{i=0}^{n-1} 2^i T_i = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i (2K_{i+1} - K_i) = \sum_{i=0}^{n-1} (2^{i+1} K_{i+1} - 2^i K_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta(2^i K_i)$$

eşitliklerinden (1.45)'i 1. mertebeden ileri fark olarak şu şekilde yazabiliriz:

$$(1.46) \quad \sum_{i=0}^{n-1} \Delta(2^i K_i) = 2^n K_n - K_0.$$

Şimdi bu eşitliğin her iki tarafın Δ ile 1. mertebeden ileri farkını alırsak,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Delta(2^{i+1} K_{i+1}) = \sum_{i=0}^{n-1} (2^{i+2} K_{i+2} - 2^{i+1} K_{i+1}) = (2^2 K_2 - 2K_1) + (2^3 K_3 - 2^2 K_2) + \dots + (2^{n+1} K_{n+1} - 2^n K_n) = 2^{n+1} K_{n+1} - 2K_1$$

eşitliklerinden

$$(1.47) \quad \sum_{i=0}^{n-1} \Delta(2^{i+1} K_{i+1}) = 2^{n+1} K_{n+1} - 2K_1$$

sonucu geçerli olur ki buradan

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta^2(2^i K_i) &= \sum_{i=0}^{n-1} \Delta(\Delta(2^i K_i)) = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta(2^{i+1} K_{i+1} - 2^i K_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta(2^{i+1} K_{i+1}) - \sum_{i=0}^{n-1} \Delta(2^i K_i) \\ &= (2^{n+1} K_{n+1} - 2K_1) - (2^n K_n - K_0) = \Delta(2^n K_n) - \Delta(2^0 K_0) = \Delta(2^n K_n - 2^0 K_0) \end{aligned}$$

eşitliklerinden görüldüğü üzere

$$(1.48) \quad \sum_{i=0}^{n-1} \Delta^2(2^i K_i) = \Delta(2^n K_n - 2^0 K_0) = (2^{n+1} K_{n+1} - 2^n K_n) - (2K_1 - 2^0 K_0)$$

sonucuna dikkat etmemiz gerekir.

İşte bu sonuçla

$$(2^{n+1} K_{n+1} - 2^n K_n) - (2K_1 - 2^0 K_0) = 2^n (2K_{n+1} - K_n) - (2K_1 - K_0) = 2^n T_n - T_0$$

eşitliklerine göre

$$(1.49) \quad \sum_{i=0}^{n-1} \Delta^2(2^i K_i) = 2^n T_n - T_0$$

ya da

$$(1.50) \quad T_n = \frac{T_0}{2^n} + \sum_{i=0}^{n-1} \Delta^2\left(\frac{K_i}{2^{n-i}}\right)$$

bağntıları mevcut olur.

Şu halde (1.46)&(1.49)'u taraf tarafa toplarsak,

$$\sum_{i=0}^{n-1} [\Delta(2^i K_i) + \Delta^2(2^i K_i)] = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta(2^i K_i) + \sum_{i=0}^{n-1} \Delta^2(2^i K_i) = 2^n K_n - K_0 + 2^n T_n - T_0 = 2^n (K_n + T_n) - (K_0 + T_0) = 2^n \cdot 2K_{n+1} - 2K_1 = 2^{n+1} K_{n+1} - 2K_1$$

eşitliklerinden

$$(1.51) \quad \sum_{i=0}^{n-1} [\Delta(2^i K_i) + \Delta^2(2^i K_i)] = 2^{n+1} K_{n+1} - 2K_1$$

ya da

$$(1.52) \quad K_{n+1} = \frac{K_1}{2^n} + \sum_{i=0}^{n-1} \left[\Delta\left(\frac{K_i}{2^{n-i+1}}\right) + \Delta^2\left(\frac{K_i}{2^{n-i+1}}\right) \right]$$

bağntılarını elde etmiş oluruz.

İkinci olarak (1.49)'da her iki tarafın Δ 'sını alır ve bunu (1.51) ile taraf tarafa toplarsak,

K_n ve T_n İçin İndirgeme Bağntıları

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{n-1} [\Delta(2^i K_i) + \Delta^2(2^i K_i) + \Delta^3(2^i K_i)] &= \sum_{i=0}^{n-1} \Delta^3(2^i K_i) + \sum_{i=0}^{n-1} [\Delta(2^i K_i) + \Delta^2(2^i K_i)] = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta(\Delta^2(2^i K_i)) + \sum_{i=0}^{n-1} [\Delta(2^i K_i) + \Delta^2(2^i K_i)] \\
 &= \Delta\left(\sum_{i=0}^{n-1} \Delta^2(2^i K_i)\right) + \sum_{i=0}^{n-1} [\Delta(2^i K_i) + \Delta^2(2^i K_i)] = \Delta(2^n T_n - T_0) + 2^{n+1} K_{n+1} - 2K_1 = (2^{n+1} T_{n+1} - 2T_1) - (2^n T_n - T_0) + 2^{n+1} K_{n+1} - 2K_1 \\
 &= 2^{n+1} (K_{n+1} + T_{n+1}) - 2(K_1 + T_1) - (2^n T_n - T_0) = 2^{n+2} K_{n+2} - 2^2 K_2 - \sum_{i=0}^{n-1} \Delta^2(2^i K_i)
 \end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$(1.53) \quad \sum_{i=0}^{n-1} [\Delta(2^i K_i) + 2\Delta^2(2^i K_i) + \Delta^3(2^i K_i)] = 2^{n+2} K_{n+2} - 2^2 K_2$$

bağıntısına ulaşmış oluruz ve bunu kısaca şu şekilde de yazabiliriz:

$$(1.54) \quad \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^2 \binom{2}{j} \Delta^{j+1}(2^i K_i) = 2^{n+2} K_{n+2} - 4K_2.$$

Sonuçta (1.46), (1.51) ve (1.54)'ten MEM gereğince $\forall p \in \mathbb{N}$ için şu genel indirgeme bağıntısını verebiliriz:

$$(1.55) \quad \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \Delta^{j+1}(2^i K_i) = 2^{n+p} K_{n+p} - 2^p K_p.$$

Fakat K için bu indirgeme bağıntısını şu şekilde de yazabiliriz:

$$(1.56) \quad K_{n+p} = \frac{K_p}{2^n} + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \Delta^{j+1} \left(\frac{K_i}{2^{n+p-i}} \right).$$

Buradan (1.20)'deki aritmetik ortalamaya göre

$$\begin{aligned}
 T_{n+p} &= 2K_{n+p+1} - K_{n+p} = \frac{K_{p+1}}{2^{n-1}} + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{p+1} \binom{p+1}{j} \Delta^{j+1} \left(\frac{K_i}{2^{n+p-i}} \right) - \frac{K_p}{2^n} - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \Delta^{j+1} \left(\frac{K_i}{2^{n+p-i}} \right) = \frac{2K_{p+1} - K_p}{2^n} + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^p \left(\binom{p+1}{j} - \binom{p}{j} \right) \Delta^{j+1} \left(\frac{K_i}{2^{n+p-i}} \right) \\
 &+ \sum_{i=0}^{n-1} \binom{p+1}{p+1} \Delta^{p+2} \left(\frac{K_i}{2^{n+p-i}} \right) = \frac{T_p}{2^n} + \sum_{i=0}^{n-1} \Delta^{p+2} \left(\frac{K_i}{2^{n+p-i}} \right) + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^p \binom{p}{j-1} \Delta^{j+1} \left(\frac{K_i}{2^{n+p-i}} \right) = \frac{T_p}{2^n} + \sum_{i=0}^{n-1} \Delta^{p+2} \left(\frac{K_i}{2^{n+p-i}} \right) + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p}{j} \Delta^{j+2} \left(\frac{K_i}{2^{n+p-i}} \right) \\
 &= \frac{T_p}{2^n} + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \Delta^{j+2} \left(\frac{K_i}{2^{n+p-i}} \right)
 \end{aligned}$$

eşitliklerinden T için indirgeme bağıntısı şu şekilde ortaya çıkar:

$$(1.57) \quad T_{n+p} = \frac{T_p}{2^n} + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \Delta^{j+2} \left(\frac{K_i}{2^{n+p-i}} \right).$$

Sonuç 1.4. (1.44)'teki indirgeme bağıntılarının doğrudan ispatları için şu sonuçlara dikkat etmemiz gerekiyor: Öncelikle $\forall p \in \mathbb{N}$ için

$$(1.58) \quad \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \Delta^{j+1}(2^i K_i) = \Delta(2^{i+p} K_{i+p})$$

bağıntısının geçerli olduğuna dikkat etmemiz gerekiyor (ki bu bağıntı $p = 1$ için (1.47) ve (1.51)'den görülüyordu zaten). Çünkü bu durumda K için

$$\sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \Delta^{j+1} \left(\frac{K_i}{2^{n+p-i}} \right) = \frac{1}{2^{n+p}} \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \Delta^{j+1}(2^i K_i) = \frac{\Delta(2^{i+p} K_{i+p})}{2^{n+p}} = \frac{2^{i+p+1} K_{i+p+1} - 2^{i+p} K_{i+p}}{2^{n+p}} = \frac{2K_{i+p+1} - K_{i+p}}{2^{n-i}} = \frac{T_{i+p}}{2^{n-i}}$$

eşitliklerine göre

$$(1.59) \quad \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \Delta^{j+1} \left(\frac{K_i}{2^{n+p-i}} \right) = \frac{T_{i+p}}{2^{n-i}}$$

sonucu geçerli olur.

Buna göre

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \Delta^{j+1} \left(\frac{K_i}{2^{n+p-i}} \right) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{T_{i+p}}{2^{n-i}} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{n-1} 2^i T_{i+p} = \frac{2^n K_{n+p} - K_p}{2^n} = K_{n+p} - \frac{K_p}{2^n}$$

K_n ve T_n İçin İndirgeme Bağlılıları

eşitliklerinden (1.44)'teki K için ilk indirgeme bağıntısını şöyle göstermiş oluruz:

$$(1.60) \quad \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \Delta^{j+1} \left(\frac{K_i}{2^{n+p-i}} \right) = K_{n+p} - \frac{K_p}{2^n}.$$

İkinci olarak T için (1.59)'da her iki tarafın Δ 'sını alırsak,

$$(1.61) \quad \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \Delta^{j+2} \left(\frac{K_i}{2^{n+p-i}} \right) = \Delta \left(\frac{T_{i+p}}{2^{n-i}} \right)$$

sonucu geçerli olur ve buradan (1.20)'deki aritmetik ortalamaya göre

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \Delta^{j+2} \left(\frac{K_i}{2^{n+p-i}} \right) = \Delta \left(K_{n+p} - \frac{K_p}{2^n} \right) = 2K_{n+p+1} - K_{n+p} - \frac{2K_{p+1} - K_p}{2^n} = T_{n+p} - \frac{T_p}{2^n}$$

eşitliklerinden (1.44)'teki ikinci indirgeme bağıntısını doğrudan ispatlamış oluruz:

$$(1.62) \quad \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \Delta^{j+2} \left(\frac{K_i}{2^{n+p-i}} \right) = T_{n+p} - \frac{T_p}{2^n}.$$

Teorem 1.5 (Aritmetik Ortalama). $\forall n, p \in \mathbb{N}, p \leq n$ için K_p^n ve T_p^n için

$$(1.63) \quad K_p^{n+1} = \frac{K_p^n + T_p^n}{2}$$

ve $\forall n, p \in \mathbb{N}$ için K_{n+p} ve T_{n+p} için

$$(1.64) \quad K_{n+p+1} = \frac{K_{n+p} + T_{n+p}}{2}$$

aritmetik ortalamaları geçerlidir.

İspat. Bu aritmetik ortalamaları aşağıda teoremlere göre sırasıyla teker teker ispatlayacağım.

1. **Teorem 1.2'ye Göre:** $\forall n, p \in \mathbb{N}, p \leq n$ için (1.18)'deki K_p^n ve (1.19)'daki T_p^n 'deki toplamlar

$$(1.65) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} \left(h_n \sum_{k=0}^{2^{n-p}-1} f(x_k) + h_n \sum_{k=0}^{2^{n-p}-1} f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right) \right) = h_{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-p+1}-1} f(x_k) \Rightarrow \frac{1}{2} \left(h_n \sum_{k=0}^{2^{n-p}-1} f(a + kh_n) + h_n \sum_{k=0}^{2^{n-p}-1} f\left(a + \left(k + \frac{1}{2}\right)h_n\right) \right) = h_{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-p+1}-1} f(a + kh_{n+1}), \\ \frac{1}{2} \left(h_n \sum_{m=0}^{p-1} \sum_{k=1}^{2^{n-m-1}-1} f(x_{2^{n-m}-k}) + h_n \sum_{m=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{2^{n-m-1}-1} f\left(x_{2^{n-m}-\left(k+\frac{1}{2}\right)}\right) \right) = h_{n+1} \sum_{m=0}^{p-1} \sum_{k=1}^{2^{n-m}-1} f(x_{2^{n-m+1}-k}) \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \left(h_n \sum_{m=0}^{p-1} \sum_{k=1}^{2^{n-m-1}-1} f(a + (2^{n-m} - k)h_n) + h_n \sum_{m=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{2^{n-m-1}-1} f\left(a + \left(2^{n-m} - \left(k + \frac{1}{2}\right)\right)h_n\right) \right) = h_{n+1} \sum_{m=0}^{p-1} \sum_{k=1}^{2^{n-m}-1} f(a + (2^{n-m+1} - k)h_{n+1}) \end{cases}$$

aritmetik ortalamaları gerçeklediklerinden

$$(1.66) \quad K_p^{n+1} = \frac{K_p^n + T_p^n}{2}$$

sonucu ortaya çıkar (05.05.2021, 18:52:24).

Sonuç 1.5. $\forall n \in \mathbb{N}$ için (1.20)'deki K_n^n ve T_n^n 'nin aritmetik ortalaması,

$$\begin{aligned} \frac{K_n^n + T_n^n}{2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{K_0}{2^n} + h_n \sum_{m=1}^n f(a + h_m) + h_n f(a + h_{n+1}) \right) + \frac{1}{2} \left(h_n \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{2^{n-m-1}-1} f(a + h_m - kh_n) + h_n \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{2^{n-m-1}-1} f\left(a + h_m - \left(k + \frac{1}{2}\right)h_n\right) \right) \\ &= \frac{K_0}{2^{n+1}} + h_{n+1} \sum_{m=1}^{n+1} f(a + h_m) + h_{n+1} \sum_{m=0}^n \sum_{k=1}^{2^{n-m}-1} f(a + h_m - kh_{n+1}) = K_n^{n+1} \end{aligned}$$

eşitlikleri nedeniyle

$$(1.67) \quad K_n^{n+1} = \frac{K_n^n + T_n^n}{2}$$

olarak gerçekleşir!

2. **Teorem 1.3'e Göre:** $\forall n, p \in \mathbb{N}, p \leq n$ için (1.21)'deki K_p^n ve T_p^n 'nin aritmetik ortalamasını alırsak,

K_n ve T_n İçin İndirgeme Bağıntıları

$$\begin{aligned} \frac{K_p^n + T_p^n}{2} &= \frac{K_p}{2^{n+1-p}} + \frac{h_n}{2} \left(\sum_{q=0}^p \sum_{m=0}^{\lfloor 2^{p-q-1}-1 \rfloor} \sum_{k=1}^{2^{n-p}-1} f\left(a + \left((2m+1)2^{n-(p-q)} - k\right)h_n\right) + \sum_{q=0}^p \sum_{m=0}^{\lfloor 2^{p-q-1}-1 \rfloor} \sum_{k=0}^{2^{n-p}-1} f\left(a + \left((2m+1)2^{n-(p-q)} - \left(k + \frac{1}{2}\right)\right)h_n\right) \right) \\ &= \frac{K_p}{2^{n+1-p}} + h_{n+1} \sum_{q=0}^p \sum_{m=0}^{\lfloor 2^{p-q-1}-1 \rfloor} \sum_{k=1}^{2^{n+1-p}-1} f\left(a + \left((2m+1)2^{n-(p-q)} - k\right)h_{n+1}\right) = K_p^{n+1} \end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$(1.68) \quad K_p^{n+1} = \frac{K_p^n + T_p^n}{2}$$

sonucunu elde ederiz.

Not 1.2. Eğer (1.21)'de $p = n$ alırsak (1.33)'teki $K_n^n = K_n$ ve (1.42)'deki T_n^n elde edilir, dolayısıyla K_n^n ve T_n^n 'nin aritmetik ortalamasını almaya gerek kalmaz. Çünkü K_n^n 'nin, dolayısıyla ona eşit K_n 'nin formu belirli değildir. Fakat K_n 'yi hangi formda alırsanız alın (1.67)'deki aritmetik ortalama daima geçerli olur!

3. **Teorem 1.4'e Göre:** $\forall n, p \in \mathbb{N}$ için (1.44)'deki K_{n+p} ve T_{n+p} 'nin aritmetik ortalamasını alırsak,

$$\frac{K_{n+p} + T_{n+p}}{2} = \frac{K_p + T_p}{2^n} + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \Delta^{j+1} \left(\frac{K_i}{2^{n+p-i}} \right) + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \Delta^{j+2} \left(\frac{K_i}{2^{n+p-i}} \right) \right) = \frac{K_{p+1}}{2^n} + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{p+1} \binom{p+1}{j} \Delta^{j+1} \left(\frac{K_i}{2^{n+p+1-i}} \right) = K_{n+p+1}$$

eşitliklerinden

$$(1.69) \quad K_{n+p+1} = \frac{K_{n+p} + T_{n+p}}{2}$$

sonucu geçerli olur.

Sonuç 1.6. Burada şu 2 güzel örneği verebilirim: $\forall p \in \mathbb{N}$ için (1.44)'te $n = p$ alırsak

$$(1.70) \quad \begin{cases} K_{2p} = \frac{K_p}{2^p} + \frac{1}{2^{2p}} \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \Delta^{j+1} (2^i K_i), \\ T_{2p} = \frac{T_p}{2^p} + \frac{1}{2^{2p}} \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \Delta^{j+2} (2^i K_i) \end{cases}$$

yaklaşıklıklarının aritmetik ortalaması,

$$\begin{aligned} \frac{K_{2p} + T_{2p}}{2} &= \frac{K_p + T_p}{2^p} + \frac{1}{2^{2p+1}} \left(\sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \Delta^{j+1} (2^i K_i) + \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \Delta^{j+2} (2^i K_i) \right) = \frac{K_{p+1}}{2^p} + \frac{1}{2^{2p+1}} \left[\sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \Delta^{j+1} (2^i K_i) + \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \Delta^{j+1} (2^{i+1} K_{i+1}) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \Delta^{j+1} (2^i K_i) \right] = \frac{K_{p+1}}{2^p} + \frac{1}{2^{2p+1}} \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \Delta^{j+1} (2^{i+1} K_{i+1}) \stackrel{(1.55)}{=} \frac{K_{p+1}}{2^p} + \frac{2^{2p+1} K_{2p+1} - 2^{p+1} K_{p+1}}{2^{2p+1}} = \frac{K_{p+1}}{2^p} + K_{2p+1} - \frac{K_{p+1}}{2^p} = K_{2p+1} \end{aligned}$$

eşitliklerine göre

$$(1.71) \quad K_{2p+1} = \frac{K_{2p} + T_{2p}}{2}$$

olurken, eğer $n = 1$ alırsak

$$(1.72) \quad \begin{cases} K_{p+1} = \frac{K_p}{2} + \frac{1}{2^{p+1}} \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \Delta^{j+1} K_0, \\ T_{p+1} = \frac{T_p}{2} + \frac{1}{2^{p+1}} \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \Delta^{j+2} K_0 \end{cases}$$

yaklaşıklıklarının aritmetik ortalaması,

$$\begin{aligned} \frac{K_{p+1} + T_{p+1}}{2} &= \frac{K_p + T_p}{2} + \frac{1}{2^{p+2}} \left(\sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \Delta^{j+1} K_0 + \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \Delta^{j+2} K_0 \right) = \frac{K_{p+1}}{2} + \frac{1}{2^{p+2}} \left(\sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \Delta^{j+1} K_0 + \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \Delta^{j+1} K_1 - \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \Delta^{j+1} K_0 \right) = \frac{K_{p+1}}{2} + \frac{1}{2^{p+2}} \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \Delta^{j+1} K_1 \\ &\stackrel{(1.55)}{=} \frac{K_{p+1}}{2} + \frac{2^{p+2} K_{p+2} - 2^{p+1} K_{p+1}}{2^{p+2}} = \frac{K_{p+1}}{2} + K_{p+2} - \frac{K_{p+1}}{2} = K_{p+2} \end{aligned}$$

eşitliklerine göre şöyle olur:

$$(1.73) \quad K_{p+2} = \frac{K_{p+1} + T_{p+1}}{2}.$$

D. PAMUKTULAM

EK 1: Romberg'in Örneği İçin Ole Amble'in Algoritması'nın Genelleştirilmiş En Sade Hali ve Tablolar Arasındaki Elemanlar Arasındaki İlişkiler

Norveç'in İlk Veri Yöneticisi: OLE AMBLE



Soldan sağa doğru IBM 1620'nin etrafında toplananlar: Kimyagerler *Jan Hvorslef* ve *Almenningen*, *Ole Amble* (ortadaki), *Rolf Nordhagen* ve *Per Ofstad*. Resim muhtemelen tesisin yönetim binasına taşınmadan önce durduğu kışladan alındı. Fotoğraf: [BT Geçmişi@UiO](#).

Ole Amble (1913-1996): Oslo Üniversitesi'ndeki ilk bilgi işlem tesisinin başındaydı. Elektronik Hesaplama Sistemi [Wegematic 1000](#), 1960 yılında açıldı ve Jeoloji Binası'nda yer aldı. Bilgisayarlarla ilgili her şeyin o zamanlar uzun isimleri vardı. 1964 ve 65 yıllarında öğrencilere yeterlilik kazandıran kurslar sunulduğunda, bunlar [MA 9](#): "Elektronik hesap makinelerinin programlanmasına giriş" ve [MA 8](#) ve [10](#): "Elektronik hesap makineleri için hesaplama görevlerinin sayısal analizi ve yürütülmesi" gibi adlandırmalara sahipti.

Bilgi işlem sistemi tesisinin bir yönetici, bir büro çalışanı, iki bilim asistanı, iki yardımcı öğretmen ve iki teknisyenden oluşan küçük bir kadrosu vardı. 1963'te kadro bir [amanuensis](#) ile genişletildi.

- **Ole Amble** kadar çok şey öğrendiğim kimse yok, diyor [Per Ofstad](#). - Mütevazı ama inanılmaz derecede bilgili ve yetenekliydi. Ben 1966'da veri yöneticisi olarak devralmadan önce - o Trondheim'daki Norveç Bilim ve Teknoloji Üniversitesi'nde öğretim görevlisi olarak çalışırken, **Amble**'in altında ilk [amanuensis](#) idim. **Amble**, perde arkasında en iyi şekilde başarılı oldu - yani o zamanlar Blindern'deki bilgisayarlar hakkında en çok şey bilen kişi olmasına rağmen - onu ders kataloğunda, sayısal analizdeki ilk derslerde aktüer **Per Gotaas** için yardımcı öğretmen olarak bulacaksınız. Bu rolü daha çok sevdi.

- Bazıları "**Ole Amble** bir meteorologdu" diyor.

- Bazıları da "Astrofizikçi, matematikçi veya fizikçi" diyor.

Herkes biraz haklıdır. Kitaplar, 1939'da coğrafya alanında yüksek lisans derecesi aldığını ve 5 kadar küçük dersi olduğunu söylüyor - bir yüksek lisans derecesine gitmek için gerekenden 2 fazla.

- **Otto Øgrim**, "Bir terim matematikçi olarak kullanılabilir" diyor ve bu bölümlerden birkaçı o sırada onunla yakın bir şekilde birlikte çalıştı. Özellikle, meteorolog **Vilhelm Bjerknes** ile astrofizikçiler arasında yakın bağlantıları vardı.

Ole Amble, 1971 yılında Oslo Üniversitesi Matematik Bölümü Veri İşleme Bölümü'ne geri döndü ve emekli olana kadar orada kaldı (Bkz. "[DET FØRSTE REGNEANLEGGET \(İLK BİLGİ İŞLEM SİSTEMİ\)](#)", S. 5).

Görüldüğü üzere **Ole Amble**, öğretmenliği bilgisayarlardan daha çok sevdi. O, özellikle sayısal analizin bilgisayarlara uygulamasında ustaydı, dolayısıyla 1952'deki "Kgl. N. Vid. Selsk. Forh. XXV, 1952, 38-41" makalesi **Romberg**'in dikkatini çekti. Bu, belirli integralde Parmentier kuralının bir varyantı olan (ki bir diğer varyant 1900'de **Sheppard** tarafından verilmişti. Bkz. "[W. F. Sheppard: Some quadrature formulas, Proc. London Math. Soc., 32, 1900, pp. 258-277](#)", S. 267, (28) no'lu formül), dolayısıyla bileşik trapez metodundaki yaklaşıklıklardan daha iyi sonuçlar veren yeni bir hesap metodu idi. **Romberg**, 1955'te "[W. ROMBERG: Vereinfachte numerische Integration, Norske Vid. Selsk. Forh. Trondheim, v. 28, 1955, p. 30-36, MR 61, 517](#)" tezinin ikinci kısmında bu yeni metottan "**Ole Amble**'in Metodu" olarak söz ederken girişte şöyle der: "Diğer bazı yaklaşım yöntemleri de, yaklaşık değerler elde edilir edilmez metodumuza uyarlanabilir. **Örneğin O. AMBLE** [2], $a \leq x \leq b$ integral aralığının dışında her 2 tarafa h uzaklığında birer nokta ekleyerek I 'ya daha iyi bir yaklaşımın nasıl bulunabileceğini gösterdi (Auch manche anderen Näherungsmethoden können unser Verfahren entsprechend anpassen, sobald Näherungswerte bei mehrmaliger feinerer Teilung vorliegen. So hat u.a. **O. AMBLE** [2] gezeigt, wie man durch Hinzufügen je eines Punktes im Abstände h auf beiden Seiten ausserhalb des Integrationsgebietes $a \leq x \leq b$ eine bessere Annäherung an I finden kann.)"

Amble'in Tezi Kayıp!

Burada [2] ile gösterilen kaynak, tam açılımıyla "[O. AMBLE: A set of formulas for numerical integration, Norske Vid. Selsk. Forh. Trondheim, v. 25, 1952, p. 38-41. MR 14, 907](#)" tezidir ve bunu **Romberg**'in tezinde olduğu gibi "[Ole Amble Algoritması, 01.02.2019](#)" adlı makalemle karşılaştırmak için (bkz. "[1.6.4.1. Romberg'in Orijinal Makalesi ve Sonuçları](#)", S. 12) **Prof. Byrnjulf Owren**'e bir e-posta gönderdim (30.05.2021, 07:54) ama elinde olmadığı söyledi (30.05.2021, 09:16). Söz konusu bu tez için NTNU'da "[Ole Amble](#)" yazdığım zaman **Owren**'in haklı olduğunu gördüm. Ama her 2 tezin de künyelerinden (ki 3 yıl ya da 3 cilt arayla Trondheim'da basılmışlardı) **Ole Amble**'in tezinin orada olduğu görünür. İşin ilginç yanı şu ki, bu tezi kendim için değil, **Romberg**'de olduğu gibi **Ole Amble** için istemiştim. Yani burada salt matematik yapmıyor, "[11.22.63](#)"te olduğu gibi **Werner Romberg** ve **Ole Amble**'in hayatlarına dokunmaya çalışıyor ya da dokunuyordum; siz hangisini kabul ederseniz artık!

Şu halde **Ole Amble**'in anılan tezi için yapılabilecek başka bir şey olmadığına göre, o zaman değerlendirmelerime geçebilirim. Ama bundan önce Norveç Kralı'na taziye mi sunmam gerekiyor!



Kral **HARALD**, yeni kitabı “*Kral anlatıyor (Kongen forteller)*”da eski damadı **Behn**’in Noel günündeki ölümü hakkında şunları yazdı: “Olay olduğunda birlikteydik. Şok oldum. Başının dertte olduğunu bilmemize rağmen çok şaşırdık. Acı verici ve bunu atlatmak uzun zaman alıyor. Ölümünü öğrendiğimiz zaman bize nineler ve dedeler olarak torunlara yakınlaşma fırsatı verdi. Birbirimize daha çok yaklaştık.” Basına ise şu açıklamayı yaptı: “Biraz da değil, epey zaman alacak. Babasını kaybetmiş 3 torunumuz var, bu yüzden zaman alacak.” Kral bu durumu yakinen biliyor, çünkü 17 yaşındayken annesini kaybetmişti. **Behn**’in ölümünden birkaç gün sonra **Kral Harald** ve **Kraliçe Sonja**, bir bildiri yayınlayarak ölüm mesajını büyük bir üzüntüyle aldıklarını ve **Behn**’in uzun yıllardır ailenin önemli bir parçası olduğunu söylediler. Fotoğrafta çocuklarıyla birlikte kraliyet gemisinde **yatzy** oynarlarken görülüyor. Fotoğraf: **Kraliçe Sonja**.

Saygıdeğer **Ekselansları**, öncelikle “*Romberg İntegrali Projesi 2016-2021*”e ilişkin çalışmalarım sırasında çok acı bir kayıp yaşadığınızı öğrendim ve bu yüzden başta siz ve çok değerli eşiniz **Kraliçe Sonja** olmak üzere Norveç Kraliyet Ailesi’ne ve tüm Norveç halkına en içten şekilde başsağlığı diler ve derin **üzüntünüzü** paylaştığımı Türkiye adına bildirmek isterim, efendim!

Beni size bağlayan şey, 2016’dan beri yürütmekte olduğum projenin çıkış yerinin Trondheim/Norveç olmasıdır. Hatırlanacağınız üzere Alman matematikçi-fizikçi **Werner Romberg** Almanya’daki Nazi zulmü nedeniyle 1933’ten Münih’ten kaçtı ve 1944’e kadar sürgün hayatı yaşadı. 1944’ün sonlarında Oslo Almanlar tarafından özgürlüğe kavuşturulunca Oslo’ya geri dönerek **Egil Hylleraas**’ın asistanı olarak çalışmaya başladı ve 1947’de de Norveç vatandaşı oldu ve ölene kadar da öyle kaldı. Arkadaşı **Harald Wergeland** sayesinde Trondheim’daki Norveç Teknoloji Enstitüsü’nde Diferansiyel Analiz ve Nümerik Metotlar üzerine çalıştı ve bu çalışmalar meyvesini 1955’te verdi. Çünkü **Romberg**’in bir tez halinde yaptığı o ünlü katkı şimdi sizin himayenizdeki Norveç Kraliyet Bilimler Topluluğu (Det Kongelige Norske Videnskabers Selskab) tarafından yazıldıktan sonra sunumu 14 Şubat 1955’te yapılan ortak toplantıda **NTNU**’daki (ki o sırada NTH idi) Matematik Bölümü Başkanı **Prof. Dr. Sigmund Selberg** tarafından yapıldı ve 28 Nisan 1955’te Komisyon Başkanı **F. Bruns Bokhandel** tarafından onaylanarak “*W. ROMBERG: Vereinfachte numerische Integration, Norske Vid. Selsk. Forh. Trondheim, v. 28, 1955, p. 30-36, MR 61, 517*” adıyla tüm dünyaya duyuruldu. Benim bu tezden haberim, NTNU’daki şimdiki **Prof. Dr. Brynjulf Owren**’in, 2011’de 4 no’lu SKRIFTER dergisinde aynı başlıkla bu tezin bir değerlendirmesini yaptığı “*Werner Romberg: Vereinfachte Numerische Integration*” makalesi sayesinde oldu. 2016’nın sonlarında bu makaleden cesaret alarak **Romberg**’in tezini aramaya başladım ama tüm imkanlarımızı seferber etmemize rağmen hiçbir yerde bulamadık. Kataloglar bu tezin biri NTNU’da ve diğeri Heidelberg Üniversitesi Kütüphanesi olmak üzere 2 yerde olduğunu söylüyordu. Bu nedenle bu tezi ilkin Heidelberg Üniversitesi Kütüphanesi’nden istedim ama sonuç **Romberg**’inden farklı olmadı. Çünkü **Romberg**, tezini ilk kez GAMM’daki yayını için **Eduard Stiefel**’e teklif etmiş ve o da “aklımdan çıkıvermiş!” diyerek kibarca reddederken bende ise kütüphaneye yani Heidelberg’e gelmem istendi (Bkz. “*1.6.4. Romberg’in Orijinal Makalesinin Peşinde!*”, S. 12). Ama bu mümkün değildi ve bu yüzden tezi son olarak 23.12.2018, 04:10 (Trondheim’da 02:10)’da bir e-posta yollayarak **Brynjulf Owren**’den istedim. Sağolsun kendisi hiç üşenmedi ve aynı gün 09:11 (Trondheim’da 07:11)’de yanıt e-postasıyla bana anılan tezin ekte olduğunu söyleyerek en iyi dileklerini ilettiler. Kendisine buradan bir kez daha teşekkür ederim. Çünkü **Romberg**’in tezi projem için kilit roldeydi. Fakat **Prof. Brynjulf Owren**’e 30.05.2021, 07:54’te ikinci bir e-posta göndererek bu sefer “*O. AMBLE: A set of formulas for numerical integration, Norske Vid. Selsk. Forh. Trondheim, v. 25, 1952, p. 38-41. MR 14, 907*” tezini istediğimde (ki **Romberg**, bu tezi kendi tezinin sonunda 2. kaynak olarak gösterir), 09:16’daki yanıt e-postasında bana ne yazık ki elinde mevcut olmadığı söyledi. Fakat bunun nasıl olduğunu bir türlü anlayamadım. Çünkü her 2 tez de himayenizdeki DKNVS’de 3 yıl arayla basılmıştı ve 2. tezin sahibi **Romberg**’in çalışma arkadaşı olmakla birlikte Norveç’in ilk veri yöneticisi idi. Yani yukarıdaki sayfada özetle tanıttığım **Ole Amble** sıradan biri değil, Norveç Bilgi İşlem Sistemi’nin kurucusu idi. İşte söz konusu bu tez, **Ole Amble**’in Trondheim’daki Norveç Bilim ve Teknoloji Üniversitesi’nde öğretim görevlisi olarak çalışırken yani matematikte çalışırken bize kalan bir miras idi.

Saygıdeğer **Ekselansları**, özetle burada dile getirdiğim kişileri ve çalışmalarını şüphesiz siz benden daha iyi biliyorsunuz. Ben, sadece bildiklerinizi hatırlatarak hafızanızı tazeliyorum. Bildiğiniz gibi bilgi ve iletişim teknolojilerindeki baş döndürücü gelişmeler dünyamızı küçülterek bizi birbirimize yaklaştırdı ve bunun sonucunda da ortaya çıkan bilimsel ve kültürel etkileşimler nedeniyle size bu satırları yazabildim. **Ole Amble** işte tam bu noktada devreye giriyor. Çünkü o bu iş için biçilmiş tam kaftandı. O hem matematikte hem de bilişim alanında bilimsel araştırmalar yapıyordu. Ama günün birinde (1955’te **Werner Romberg**, 2021’de ben) onun bu bilimsel çalışmalarının kültürel bir etkileşime neden olacağı, hem de kimsenin tahmin etmeyeceği bir ülkeden, Türkiye’den, kim bilebilirdi ki! Ama ben sürpriz yapmaya bayılırım (Bkz. “*Barış İçin Sürpriz Yapmak Gerekliyor!*”, S. 7).

Umarım, bu bilimsel ve kültürel etkileşim ülkelerimiz arasında bir köprü vazifesi görür ve diğer alanlarda ilişkilerin kurulmasına vesile olur!

D. PAMUKTULUM, 16.06.2021, 05:38.

D. PAMUKTULUM

Hatırlarsanız **Romberg**'in tezindeki $\forall n \in \mathbb{N}$ için yakınsak olan T_{2^n} 'yi (1.61)'de ve U_{2^n} 'yi (1.67)'de,



$$(1.74) \quad \begin{cases} T_{2^n} = \frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)} = \frac{\pi}{2^{n+2}} \cot\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right), \\ U_{2^n} = \frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)} = \frac{\pi}{2^{n+2}} \csc\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right). \end{cases}$$

olarak en sade şekilde vermiştim (Bkz. “[1.7.1. Alt Sınır \$K_n\$ 'nin En Sade Hali](#)” ve “[1.7.2. Üst Sınır \$T_n\$ 'nin En Sade Hali](#)”. Bunlar **Romberg**'in rüyasında göremeyeceği ya da görse bile hayra yoramayacağı sonuçlar idi). O halde bu sonuçları “[Ole Amble Algoritması, 01.02.2019](#)” adlı makalemdeki sonuçlara göre değerlendirsem; (4.7)'den

$$\begin{aligned} A_{2^n} &= \frac{1}{2^{n+2} \cdot 3} F(a + 1 - 2^{-n}) = \frac{1}{2^{n+2} \cdot 3} \cdot \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}(a + 1 - 2^{-n})h_0\right) = \frac{\pi}{2^{n+3} \cdot 3} \cos\left(\frac{\pi}{2}(a + h_0 - h_n)\right) = \frac{\pi}{2^{n+3} \cdot 3} \cos\left(\frac{\pi}{2}(a + b - a - h_n)\right) = \frac{\pi}{2^{n+3} \cdot 3} \cos\left(\frac{\pi}{2}(b - h_n)\right) \\ &= \frac{\pi}{2^{n+3} \cdot 3} \cos\left(\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1-0}{2^n}\right)\right) = \frac{\pi}{2^{n+3} \cdot 3} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \frac{\pi}{2^{n+3} \cdot 3} \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \end{aligned}$$

eşitliklerine göre

$$(1.75) \quad A_{2^n} = \frac{\pi}{2^{n+3} \cdot 3} \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$$

olmak üzere (4.8)'den $\hat{T}_{2^n}$ 'yi

$$\begin{aligned} \hat{T}_{2^n} &= T_{2^n} + A_{2^n} = \frac{\pi}{2^{n+2}} \cot\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) + \frac{\pi}{2^{n+3} \cdot 3} \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \frac{\pi}{2^{n+3} \cdot 3} \left(6 \cot\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\right) = \frac{\pi}{2^{n+2} \cdot 3} \cot\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \left(4 - \cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)\right) = T_{2^n} \left(4 - \left(\frac{T_{2^n}}{U_{2^n}}\right)^2\right) \\ &= T_{2^n} \frac{4U_{2^n}^2 - T_{2^n}^2}{3U_{2^n}^2} \end{aligned}$$

ve $\hat{U}_{2^n}$ 'yi

$$\begin{aligned} \hat{U}_{2^n} &= U_{2^n} - 2A_{2^{n+1}} = \frac{\pi}{2^{n+2}} \csc\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) - 2 \cdot \frac{\pi}{2^{n+4} \cdot 3} \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) = \frac{\pi}{2^{n+2}} \csc\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) - \frac{\pi}{2^{n+3} \cdot 3} \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) = \frac{\pi}{2^{n+3} \cdot 3} \left(6 \csc\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)\right) \\ &= \frac{\pi}{2^{n+3} \cdot 3} \csc\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \left(5 + \cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)\right) = U_{2^n} \left(5 + \left(\frac{T_{2^n}}{U_{2^n}}\right)^2\right) = \frac{5U_{2^n}^2 + T_{2^n}^2}{6U_{2^n}} \end{aligned}$$

eşitliklerine göre

$$(1.76) \quad \begin{cases} \hat{T}_{2^n} = T_{2^n} \frac{4U_{2^n}^2 - T_{2^n}^2}{3U_{2^n}^2} = \frac{\pi}{2^{n+2} \cdot 3} \cot\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \left(4 - \cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)\right), \\ \hat{U}_{2^n} = \frac{5U_{2^n}^2 + T_{2^n}^2}{6U_{2^n}} = \frac{\pi}{2^{n+3} \cdot 3} \csc\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \left(5 + \cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)\right) \end{cases}$$

şeklinde en sade şekilde yazmış olurum (20.05.2021, 20:29:33-20:36:17. Bunlardan ilki bu yaklaşıklıkların Mathematica'da yazıldığı dosyanın oluşturulduğu ve ikincisi test sonucunun başarılı olup dosyanın kaydedildiği saatleri gösterir). Yine bu sonuçlar, **Ole Amble**'in da hayal edemediği sonuçlar idi. Çünkü o, bu sonuçları $n = 3$ için vermişti. Oysa bu sonuçlar her n doğal sayısı için geçerlidir. Örneğin, bu sonuçları [Tablo 4.4](#)'te $n = 5$ için verdim. Yani bu sonuçlar, özellikle (4.6)'dan görüldüğü üzere **Ole Amble**'in algoritmasının genelleştirilmiş şeklidir!

İkinci olarak **Romberg**'in mavi ve **Ole Amble**'in turuncu tablolarındaki elemanlar arasındaki ilişkilerden söz etmek istiyorum. Çünkü **Romberg**, (1.55)'teki örneğine hem kendi metodunu hem de **Ole Amble**'in metodunu uygularken $[0,1]$ integral aralığını $h = \frac{b-a}{2^3} = \frac{1-0}{8} = \frac{1}{8}$ farkından anlaşılacağı üzere 8 eşit parçaya bölmüş ve her 2 metottan elde edilen sonuçları [mavi tablo](#) ve [turuncu tablo](#)da vermişti!

İşte şimdi bu tablolardaki elemanlar arasındaki ilişkiler için ilk kez bir araştırma söz konusu oldu ya da böyle bir araştırma daha önceden yapılmadığı için bir fırsat doğdu ve ben de bunu en iyi şekilde aşağıda değerlendirdim. Fakat aşağıda E ile gösterdiğim 2 farklı ekstrapolasyonu kullandım ve bunların neler olduğunu bir sonraki makalemde göstereceğim. Şimdilik bu durumu mazur görün!

Tablolardaki Elemanlar Arasındaki İlişkiler. İlkin (1.76)'dan **Romberg**'in tablosu ile **Ole Amble**'in tablosunun ilk sütunlarındaki elemanlar arasında

$$(1.77) \quad \frac{\hat{T}_{2^n}}{T_{2^n}} + 2 \cdot \frac{\hat{U}_{2^n}}{U_{2^n}} = 3$$

ilişkisinin olduğunu görüyoruz.

Diğer bağıntı (4.8)'e göre şöyledir (ki bunu (1.76)'dan öngörebilmek kolay değildir):

$$(1.78) \quad 2\hat{T}_{2^{n+1}} + \hat{U}_{2^n} = 2T_{2^{n+1}} + U_{2^n}.$$

İşte bu eşitlikten $n = 0,1,2$ için her 2 tablonun ilk sütunlarındaki elemanlar arasında şu sonuçlar geçerli olur:

$$(1.79) \quad \begin{cases} 2\hat{T}_2 + \hat{U}_1 = 2T_2 + U_1, \\ 2\hat{T}_4 + \hat{U}_2 = 2T_4 + U_2, \\ 2\hat{T}_8 + \hat{U}_4 = 2T_8 + U_4. \end{cases}$$

Bir diğer bağıntı da şudur:

$$(1.80) \quad 2 \left(\frac{\hat{T}_{2^n}}{T_{2^n}} - \frac{\hat{U}_{2^n}}{U_{2^n}} \right) + \frac{T_{2^n}^2}{U_{2^n}^2} = 1.$$

Eğer bu eşitliğin her iki yanını 3 ile çarpar ve (1.77)'de yerine koyar, gerekli işlemleri yaparsak,

$$(1.81) \quad 3T_{2^n}^3 = U_{2^n}(8\hat{U}_{2^n}T_{2^n} - 5\hat{T}_{2^n}U_{2^n})$$

şeklinde karmaşık bir bağıntı ortaya çıkar.

Fakat bundan sonraki karmaşık bağıntıların kolaylaşması için ilkin (1.78)'de indisleri yalnızca n cinsinden yani 2'nin kuvvetleri yerine yalnızca kuvvetlerine göre yazarsak,

$$(1.82) \quad 2\hat{T}_{n+1} + \hat{U}_n = 3E_{n,1}(T) = 2T_{n+1} + U_n$$

eşitliğinde E bir lineer fonksiyon olduğundan genel olarak $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$(1.83) \quad 2E_{n+1,k}(\hat{T}) + E_{n,k}(\hat{U}) = 2E_{n+1,k}(T) + E_{n,k}(U)$$

bağıntısının geçerli olduğuna dikkat edelim.

Şimdi bunun doğru olduğuna ilişkin bir örnek olarak k = 1 için ispat yapayım. Öncelikle ikinci sütunlardaki elemanlar için

$$\begin{aligned} E_{n+1,2}(\hat{T}) &= \frac{16\hat{T}_{n+2} - \hat{T}_{n+1}}{15} = \frac{16(T_{n+2} + A_{n+2}) - (T_{n+1} + A_{n+1})}{15} \\ E_{n,2}(\hat{U}) &= \frac{16\hat{U}_{n+1} - \hat{U}_n}{15} = \frac{16(U_{n+1} - 2A_{n+2}) - (U_n - 2A_{n+1})}{15} \\ 2E_{n+1,2}(\hat{T}) + E_{n,2}(\hat{U}) &= 2 \frac{16(2T_{n+2} + U_{n+1}) - (2T_{n+1} + U_n)}{15} \\ &= 2 \cdot \frac{16T_{n+2} - T_{n+1}}{15} + \frac{16U_{n+1} - U_n}{15} \\ &= 2 \cdot \frac{4T_{n+2} + \frac{4T_{n+2} - T_{n+1}}{3}}{5} + \frac{4U_{n+1} + \frac{4U_{n+1} - U_n}{3}}{5} \\ &= \frac{4}{5}(2T_{n+2} + U_{n+1}) + \frac{2E_{n+1,1}(T) + E_{n,1}(U)}{5} \\ &= \frac{4}{5}(2\hat{T}_{n+2} + \hat{U}_{n+1}) + \frac{2E_{n+1,1}(T) + E_{n,1}(U)}{5} \end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$(1.84) \quad 2(5E_{n+1,2}(\hat{T}) - 4\hat{T}_{n+2}) + (5E_{n,2}(\hat{U}) - 4\hat{U}_{n+1}) = 2E_{n+1,1}(T) + E_{n,1}(U)$$

sonucu geçerlidir.

Fakat bu bağıntıda

$$\begin{aligned} 5E_{n+1,2}(\hat{T}) - 4\hat{T}_{n+2} &= 5 \cdot \frac{16\hat{T}_{n+2} - \hat{T}_{n+1}}{15} - 4\hat{T}_{n+2} = \frac{4\hat{T}_{n+2} - \hat{T}_{n+1}}{3} = E_{n+1,1}(\hat{T}) \\ 5E_{n,2}(\hat{U}) - 4\hat{U}_{n+1} &= 5 \cdot \frac{16\hat{U}_{n+1} - \hat{U}_n}{15} - 4\hat{U}_{n+1} = \frac{4\hat{U}_{n+1} - \hat{U}_n}{3} = E_{n,1}(\hat{U}) \end{aligned}$$

eşitlikleri geçerli olduğundan

$$(1.85) \quad 2E_{n+1,1}(\hat{T}) + E_{n,1}(\hat{U}) = 2E_{n+1,1}(T) + E_{n,1}(U)$$

bağıntısı geçerli olur.

İşte bu eşitlikten de n = 0,1 için

$$\begin{aligned} 2(5\hat{S}_4 - 4\hat{T}_4) + (5\hat{V}_2 - 4\hat{U}_2) &= 2(5E_{1,2}(\hat{T}) - 4\hat{T}_2) + (5E_{0,2}(\hat{U}) - 4\hat{U}_1) = 2E_{1,1}(T) + E_{0,1}(U) = 2S_4 + V_2 \\ 2(5\hat{S}_8 - 4\hat{T}_8) + (5\hat{V}_4 - 4\hat{U}_4) &= 2(5E_{2,2}(\hat{T}) - 4\hat{T}_3) + (5E_{1,2}(\hat{U}) - 4\hat{U}_2) = 2E_{2,1}(T) + E_{1,1}(U) = 2S_8 + V_4 \end{aligned}$$

eşitliklerine göre her 2 tablodaki 1 ve 2. sütunlardaki elemanlar arasında şu sonuçlar geçerli olur:

$$(1.86) \quad \begin{cases} 2(5\hat{S}_4 - 4\hat{T}_4) + (5\hat{V}_2 - 4\hat{U}_2) = 2S_4 + V_2, \\ 2(5\hat{S}_8 - 4\hat{T}_8) + (5\hat{V}_4 - 4\hat{U}_4) = 2S_8 + V_4. \end{cases}$$

Üçüncü olarak k = 2 için (1.83)'ten şu eşitliğin geçerli olduğunu biliyoruz:

$$(1.87) \quad 2E_{n+1,2}(\hat{T}) + E_{n,2}(\hat{U}) = 2E_{n+1,2}(T) + E_{n,2}(U).$$

Burada

$$E_{n+1,2}(\hat{T}) = \frac{16E_{n+2,1}(\hat{T}) - E_{n+1,1}(\hat{T})}{15} = \frac{16(5E_{n+2,2}(\hat{T}) - 4\hat{T}_{n+3}) - (5E_{n+1,2}(\hat{T}) - 4\hat{T}_{n+2})}{15} = 5 \cdot \frac{16E_{n+2,2}(\hat{T}) - E_{n+1,2}(\hat{T})}{15} - 4 \cdot \frac{16\hat{T}_{n+3} - \hat{T}_{n+2}}{15}$$

$$= \left(21 \cdot \frac{64E_{n+2,2}(\hat{T}) - E_{n+1,2}(\hat{T})}{63} - 16E_{n+2,2}(\hat{T}) \right) - 4E_{n+2,2}(\hat{T}) = 21E_{n+1,3}(\hat{T}) - 16E_{n+2,2}(\hat{T}) - 4E_{n+2,2}(\hat{T}) = 21E_{n+1,3}(\hat{T}) - 20E_{n+2,2}(\hat{T})$$

ve

$$E_{n,2}(\hat{U}) = \frac{16E_{n+1,1}(\hat{U}) - E_{n,1}(\hat{U})}{15} = \frac{16(5E_{n+1,2}(\hat{U}) - 4\hat{U}_{n+2}) - (5E_{n,2}(\hat{U}) - 4\hat{U}_{n+1})}{15} = 5 \cdot \frac{16E_{n+1,2}(\hat{U}) - E_{n,2}(\hat{U})}{15} - 4 \cdot \frac{16\hat{U}_{n+2} - \hat{U}_{n+1}}{15}$$

$$= \left(21 \cdot \frac{64E_{n+1,2}(\hat{U}) - E_{n,2}(\hat{U})}{63} - 16E_{n+1,2}(\hat{U}) \right) - 4E_{n+1,2}(\hat{U}) = 21E_{n,3}(\hat{U}) - 16E_{n+1,2}(\hat{U}) - 4E_{n+1,2}(\hat{U}) = 21E_{n,3}(\hat{U}) - 20E_{n+1,2}(\hat{U})$$

eşitlikleri geçerli olduğundan

$$(1.88) \quad 2 \left(21E_{n+1,3}(\hat{T}) - 20E_{n+2,2}(\hat{T}) \right) + \left(21E_{n,3}(\hat{U}) - 20E_{n+1,2}(\hat{U}) \right) = 2E_{n+1,2}(T) + E_{n,2}(U)$$

bağıntısı elde edilir.

İşte bu son eşitlikten $n = 0$ için

$$2(21\hat{R}_8 - 20\hat{S}_8) + (21\hat{W}_4 - 20\hat{V}_4) = 2 \left(21E_{1,3}(\hat{T}) - 20E_{2,2}(\hat{T}) \right) + \left(21E_{0,3}(\hat{U}) - 20E_{1,2}(\hat{U}) \right) = 2E_{1,2}(T) + E_{0,2}(U) = 2R_8 + W_4$$

eşitlikleri geçerli olduğundan her iki tablodaki 2 ve 3. sütunlardaki elemanlar için yalnızca şu sonuç çıkar:

$$(1.89) \quad 2(21\hat{R}_8 - 20\hat{S}_8) + (21\hat{W}_4 - 20\hat{V}_4) = 2R_8 + W_4.$$

Mathematica Programı. *Ole Amble*'in (1.76)'daki yaklaşıklıklarına ilişkin mathematica programını

İlk Bilgisayar Sistemi (*Det Første Regnearlegget*)

İsveçli finansör **Axel Wenner-Gren**'den gelen hediyein hikâyesi çok özel. [Aftenposten](#)'ın gazetecisi **Henning Sinding Larsen**, büyük sanayiciyle bir portre röportajı yapmıştı. **Wenner-Gren** daha önce İsveç'teki üniversitelere birkaç tane Wagematic makinesi vermişti ve röportaj sırasında Oslo Üniversitesi'nin de bir hesap makinesine ihtiyacı olup olmadığı sorusu gündeme geldi.

Sinding Larsen, üniversitenin rektörüne bir mektupla Norveç'e döndü. **Wenner-Gren**, UiO'ya hediye olarak bir Wagematic 1000 teklif etti. Neredeyse Norveçli olduğu, [Båhuslen](#)'de doğup büyüdüğü gerçeğiyle bunu haklı çıkarmış olması gerekiyordu. *Ole Amble*'a gönderilen ve **Sinding-Larsen**'in yazdığı mektubun bir kopyası bende var:

Üniversite rektörü, “bu kadar önemli meseleler söz konusu olduğunda, onlara musallat olmamaları gerektiğini söyledi. Bilgisayar kiralamanın mümkün olup olmadığını az önce fakülte tarzında tartıştık” dedi.

Åmund Lunde.



Ole Amble, Oslo Üniversitesi'ndeki Wagematic 1000'in başında.

1. “[Mathematica'da Lineer E-ATA M Algoritması Üzerindeki Ole Amble Algoritmasının Romberg Örneğine Uygulanmasıyla Elde Edilen Yaklaşıklıklara Sembolik Bir Yaklaşım](#)”
2. “[Mathematica'da Lineer E-ATA M Algoritması Üzerindeki Ole Amble Algoritmasının Romberg Örneğine Uygulanmasıyla Elde Edilen Yaklaşıklıklara Sembolik Bir Yaklaşım](#)”

linklerinde bulabilirsiniz. Bu programdaki tüm çıktıları **Romberg**'in [turuncu tablosu](#)na göre, dolayısıyla onun bu tablosunun düzeltilmiş şekli olan [Tablo 4.3](#)'e göre yaptım. Fakat girişleri değiştirerek [Tablo 4.4](#)'teki ve ötesindeki sonuçlara ulaşabilirsiniz. Çünkü (1.76)'daki yaklaşıklıklar genel formüllerdir! *D. PAMUKTULUM*