

Tröndheim’da Bir Türk Seyyah

Öncelikle çalışmaya geçmeden önce **Knut Hamsun**’un “[İstanbul’da 2 İskandinav Seyyah](#)” adlı kitabındaki gözlemlerinden hareketle 1899 İstanbul’unun gerçek bir tasvirini yapmak istiyorum: “Ertesi sabah gemi demir alırken uyanıyoruz. Saat 6, hava bulutsuz.

Kalede zabitlerle askerlerin konuştuklarını görüyoruz. Onlar talime çıkarken, vapurumuz Boğaz’ı geçmeye başlıyor.



İstanbul’da Gün Batımı, **İ.K. Ayvazovski**-1899, 205x335 CM tuval üzerine yağlıboya (Kefe/Feodosiya Ayvazovski Resim Müzesi. **Ayvazovski**, bu resmi vefatından 1 yıl önce hafızasından yararlanarak çizdi. Aynı yılda **Hamsun** bu manzarayı [Anadolu Kavağı](#)’ndan görebildiği kadarıyla, “Arkamızda Karadeniz **yemyeşil** ¹ ve sakın uzanıyor. Gurup vakti; güneş batarken ufuk çizgisinin en dibinde **kan ve altın karışımı bir kuşak alev** alıyor (Bkz. “[Ortaköy’de Gün Batımı, 1856](#)”). Gök kubbenin altında başka hiçbir yerde böylesine bir renk cümbüşü gördüğümü zannetmiyorum ve başka hiçbir şeyin de Tanrı’nın yaptığı kadar güzel olamayacağını hissediyorum. Ufuktaki kan ve altın kuşağı yavaş yavaş çözülürken, altımızdaki deniz kararıyor, ağırlaşıyor.” şeklinde tasvir ederken İstanbul’a girişte de şunları görür: “Vapurumuz hız kesiyor, İstanbul artık karşımızda. Büyük devletlerin sefaretleri, geniş arazilere kurulmuş kışla benzeri mimarileri ve kaba cüsseleri ile manzaraya tahakküm ediyorlar. Sonra minareleri görüyoruz. Türkiye’nin payitahtı üç denizin; Marmara Denizi, Altın Boynuz (Haliç) ve Boğaz’ın birleştiği yerde kurulmuş. İki kıtanın arasına yerleşmiş, iki yakasında tabiat harikası tepeler ve eteklerinde deniz olan bu şehrin dünyada bir benzeri yoktur. İstanbul, her ne kadar Moskova’nın rengârenkliğine, kırmızı, yeşil ve yaldızlı kubbelerine sahip değilse de, Moskova’da olmayan bir şey var burada: Semaya yükselen beyaz minareler...” Bana gelirsek, Haliç’e girişin biraz sağında Kasımpaşa Lisesi’nde okurken **Dalan**’ın, “**Haliç gözlerimin rengi gibi masmavi olacak!**” dediği Güney Haliç Kollektörler’in yapımındaki kazıklar çakılmaya başlanmıştı ve mezun olana kadar da bu Çin işkencesinden kurtulamamıştık. Ama bakın, **Ayvazovski**, Boğaziçi’nin ve Haliç’in ne kadar mavi olduğunu göstermiş tablosunda. Çocukluğum ve gençliğim hep Kasımpaşa’da geçti ve bize 1970’lerde bile Haliç’de yüzdüğünü söylerlerdiler de inanmazdık!

Boğaz’ın iki yakasında arka arkaya sıralanmış küçük şehirlerin önünden birer ikişer dakikalık fasılalarla geçiyoruz. Esasen hepsi tek ve aynı şehir demek daha doğru olacak. Sahile o kadar yakınız ki, karada olup biten her şeyi görebiliyoruz. Gördüklerimiz, düşündüklerimizden çok farklı. Yoksa biz Türkiye’de değil miyiz? Ben 30 senedir, beceriksiz sultanlar tarafından iflasın eşiğine getirilmiş bir memlekete dair yazılmış yazıları okumaktayım. Halbuki vapur, bağlık bahçelik küçük şehirleri ve güllerin kıpkızıl parıltısıyla gözümüzü alan bir masal diyarında yol alıyor.

Hakikati bilmek güç. Bunun nedeni belki de bize hakikati anlatacak olan Avrupa basınının tek sesliliğidir. İnsan biraz şüpheleniyor doğrusu. Sesini duyurması lazım gelen taraf tamamıyla dilsiz. Akla şu fikirler geliyor: **Abdülhamit** Türkiye’ye uzun senelerdir sahip olmadığı bir itibar kazandırmış gibi görünüyor. **Sultan** ülkede ticaretin gelişmesiyle ilgilendi, mekteplerde yapılan reformlara itiraz etmedi, demiryolları inşaatına izin verdi, orduyu yeniden tanzim etti. Kendisinin çok çalışkan bir kimse olduğu, sabahın 5’inde kalktığı, icabı halinde hemen emrinde bulunmaları için katipleri sarayda gecelettiği söyleniyor. Vücut yapısı itibariyle, asil bir Türk olduğu göz önünde bulundurulduğunda zayıf bile sayılabileceğini kendi müşahedelerime (gözlemlerime) dayanarak belirtebilirim.

Hristiyanlara uyguladığı işkenceler mevzuuna gelince ², bunun çok Müslümanca olduğu söylenebilir. Boşuna mı ‘**Müminlerin Sultanı**’, ‘**İslam’ın Halifesi**’dir kendisi... Amma şimdi karşı tarafın konuşması lazım, karşı taraf tamamen dilsiz. Yalnızca bir taraf konuşuyor, hem de fasılasız ve bütün dünyada. Contemporary Review’da bu tek taraf -bir mütecaviz, hem de yüksek dereceli bir Türk devlet memuru- şöyle dile geliyor: Osmanlı imparatorluğundaki Hristiyan unsurların devletin gizli ya da açık düşmanları oldukları bilinen bir mevzudur. Neyi arzuladıkları ve istiklâl mücadelesi vermek üzere neler yaptıklarını bütün Avrupa’ya anlattılar. Bununla beraber Avrupa’nın henüz bilmediği, İmparatorluğun Müslüman tebaalarının da -Kürtler, Arnavutlar vs.- istiklal talepleri içinde olduklarıdır. Bunlarda Hristiyanların atılğanlığı ve zekâsı bulunmamakla birlikte, **Sultan Abdülhamit**’e karşı silahlı mukavemette bulunmak arzusuyla tutuşmaktadırlar.

Gördünüz mü?

Norveç’te Yahudilerin devlete karşı açık ya da gizli düşmanlık gösterdiklerini, hatta silahlı mukavemette bulunmak arzusuyla tutuştuklarını düşünelim. Sonra? Sonrası,

¹ **Hans Christian Andersen**, [VI. Bölüm](#)’ün girişinde İstanbul’a girerken şöyle bir tasvirde bulunur: “Geceki fırtınanın ardından doğan sabah güneşi bulutlar ve sisle mücadele halindeydi, arkamızda Marmara Denizi koyu yeşil dalgalarla köpürüp coşarken karşımıza tıpkı Venedik gibi, bir hayal kenti, dev Constantinople, yani Türkler’in Stambul’u çıktı.” Yani Marmara denizinin gerçek rengi **yeşil** hem de **yemyeşil**miş. Tıpkı **Ayvazovski**’nin Ortaköy’deki kayıkların altını boyadığı **yemyeşil** gibi. Fakat 180 yıl sonra Marmara denizinin dibi çölleşmiş durumdadır. **Prof. Dr. Mustafa Sarı**, bizzat dalarak manzarayı şöyle tasvir eder (Bkz. “[Prof. Sarı fotoğrafladı: denizin dibi müsilağ örtüsüyle kaplanmış durumda](#)”): “Bugün kendim daldım. Kıyıda 18 M’ye kadar indim. Müsilağ oluşumu devam ediyor ne yazık ki. Denizin dibi müsilağ örtüsüyle kaplanmış durumda”

² **Hamsun**, durumun gayet farkındadır, yani bütün Avrupa basınının **Sultan Abdülhamit**’in Ermeniler’e ve Hristiyanlar’a yaptığı zulmü hakkında malumat sahibidir ve bu yüzden “**Büyük İhtiyar (İngiltere)**”, **Tahttaki Katil (Sultan Abdülhamit)**’i tanımaz mıydı?” sorusuyla bu önyargılı tutuma bir gönderme yapar. Konu “**Payitaht: Abdülhamid**” adlı dizisinin dikkatini çekmiş ve [96. Bölüm](#)’deki “**Hristiyan Ölümeleri**”nde yer verilmiştir.

isyanı bastırır, isyancıları da kurşuna dizedik. Ama mesele böyle kapanmazdı tabii. Şimdi dünyadaki bütün Yahudiler haykırmaya başladılar. Avrupa’daki Hristiyanları da haykırışlarına kattılar, Türkiye’yi de.

Ve biz, yani karşı taraf hala suskunuz.”

Yukarıdaki parçaları **Hamsun**’un Danca’ya yakın olan eski Norveççe ³ kullanarak kaleme aldığı ve Norveç’te az tanınan yapıtlarından biri “*Stridende Liv (Mücadeleli Hayat)*” adını taşıyan ve 1905’te basılan bu seyahatname “*Hilalin Altında*” adlı bölümde yer alır. [Eylül 1899](#)’daki İstanbul gezisi notları tamamen gözlemlere (müşahedelere) ⁴, dolayısıyla [bilimsel bilgiye değil gündelik bilgiye](#) dayalı olmakla birlikte, Osmanlı toplumuna ve **Sultan Abdülhamit**’e çağdaşlarından farklı olarak Osmanlı’ya yargılayarak değil son derece olumlu, müsamahakâr ve açık görüşle yaklaşmıştır. Örneğin yukarıdaki son cümlede **Hamsun**, kendisini bizim gibi mazlum biri olarak görür ki, bu durumda **Hamsun** hakkındaki “[Radikal Anarşist ve İslam Hayranı](#)” ifadelerinin art niyetli olduğu sonucu çıkar!

Buraya kadar her şey güzel, ama **Hamsun**’un seyahatnamesinden yola çıkan biri, 1899 İstanbul’unu ne kadar tanıyabilir ki? İşte bu yakıcı soru, 66 sayfalık seyahatnamenin her cümlesinde, paragrafında, sayfasında ve nihayetinde tamamında daima karşıma çıktı ve bir yanıt bulamadım. Bunda tabii ki **Hamsun**’un İstanbul’u tanıması, İslâmiyet’i bilmemesi ve özetle bizi Avrupa’nın dolduruluşuyla yanlış tanımasının çok büyük payı vardır. Ama yine de **Hamsun**’un suya sabuna dokunmadan sadece “[martılar](#)”dan bahsetmesi feci şekilde şüphelendirdi beni!

“[Sağlam bilgiler sağlam \(doğru\) adamda bulunur!](#)”

Acaba gerçeği bulabilmemiz için **Hamsun**’un ne yapması gerekiyordu? Bana göre **Hamsun**, “Payitaht” dediği yerden karaya çıkar çıkmaz bir Rum turist rehberi yerine İstanbul’u tanıyan bir Türk ile görüşmeliydi. Örneğin **Hamsun** Boğaziçi’nden İstanbul’a giriş yapıp karaya çıktığında [Tevfik Fikret](#), orada ilk şiir kitabı “[Rûbab-ı Sikeste](#)”nin basımı için [Cağaloğlu](#)’nu arşınıyordu!



« رباب شکتہ » مناسبیہ : توفیق فکر تہک، کوشہ اشتغالندہ .
Tevfik Fikret Bey, auteur du Rôbab-ı Chikosté, dans son cabinet de travail.

[Rûbab-ı Sikeste](#) münasebetiyle: **Tevfik Fikret Bey**, gûşe-i iştigalinde (inzivada). Servet-i Fünûn, 465 (27 Kânûn-ı Sâni 1315/8 Şubat 1900).

Bilindiği üzere 1896 yılı **Fikret**’in Saray ve Padişah karşısındaki tutumu açısından bir dönüm noktasıdır. Çünkü bu tarihte bir yandan Mekteb-i Sultânî’deki memuriyetinden ayrılıp Robert Koleji’nde göreve başlamış, artık Devlet memuriyetini terk etmiştir, bir yandan da aynı yıl içinde **Recaizade Ekrem**’in teşvik ve tavsiyesi ile **Servet-i Fünûn** dergisinin sorumluluğunu üstlenmiş ve dergide toplanan kadro ile birlikte yeni bir edebiyatın binasını “**Edebiyat-ı Cedide**” adında yükseltmeye koyulmuştu. Sanatta hem içerik hem de biçimde bir atılım yapıp Batılaşmayı ilke edinmişlerdi. Fakat sonra ne olduysa bilinmez, **Fikret** çok keskin bir Padişah, Saray ve

³ Günümüzde “**Trondheim**” şehrinin eski ya da orijinal adı “**Trøndhjem**”dir ve Danimarkalıları halen bu orijinal adı kullanırlar. Çünkü bu isim Viking Krallığı’nın başkenti olan Trøndelag’tan gelir. Ben günümüz Norveçlileri gibi “**Trondheim**” adını hiç kullanmadım (ki kulağımı tırmalıyordu); onun yerine hep “**Trøndheim**” dedim (Bkz. [RİK 3](#), Dipnot 8).

⁴ I. Bölüm, S. 21’de **Sultan Abdülhamit** için şöyle der: “Vücut yapısı itibarıyla, asil bir Türk olduğu göz önünde bulundurulduğunda zayıf bile sayılabileceğini kendi müşahedelerime dayanarak belirtebilirim.”

iktidar muhalefeti hatta düşmanlığı ve nefreti içine girer. Bu düşmanlık ve nefret daha önceleri ne zamandan itibaren oluşmaya başladı, ne vakitten beri vardı, yazdıkları ve çevresindekilerle ilişkilerinden bize ulaşan veriler çerçevesinde buna dair kesin bir şey söyleyebilmek mümkün değildir. Ancak **Fikret**’in bu dönemde Devlet memuriyeti kabul etmemesi bir yana, çevresinde bu türden görevleri kabul edenlere ve hatta iktidara, Saray’a yakın olarak anlaşılabilir en ufak tavır ve eylem içine girenlere karşı dahi çok kırıcı ve katı tepkiler geliştirdiği, yakın çevresinde bulunan kimi Servet-i Fünûn topluluğu yazarlarının daha sonra kaleme aldıkları anılarında kayıtlıdır (Bkz. “[Saray Karşısında Tevfik Fikret](#)”). Geçen yüzyılın son 4 yılına bakıldığında, **Fikret**’in şiirlerinde toplumsal boyutun arttığı, karamsarlığın üste çıktığı görülür. 1897 Osmanlı-Yunan savaşı sırasında yurt ve ulus sevgisini dile getiren şiirler yazar. Aynı zamanda, **Abdülhamit**’in baskısı ile sansür ve jurnalcilik artar. Özgürlük ve adalet özlemi ile ilgili şiirler yazarken 1898’de birkaç gün için gözaltına alınır!

Tarih: [11 Ekim 1899](#).

İngilizler Güney Afrika’nın altınına göz dikip bu toprakları 500,000 askeriyle işgal etti. Topraklarını ve altınlarını kaptırmak istemeyen Boerler, İngilizlere karşı gerilla mücadelesi verdi. Evleri yakılıp yıkıldı, eşleri-çocukları öldürüldü, toplama kamplarında işkenceler gördüler ama Boerler geri adım atmadılar.

Tam o günlerde Osmanlı münevverleri (aydınları) ne yaptı dersiniz?

Şu analizi yaptılar: İngilizler kaybederse bu İngiliz karşıtı bir politika izleyen **II. Abdülhamit**’in işine gelir. O halde biz İngilizleri destekleyelim!

Ve bu desteği de verdiler. Nasıl mı?

Eski sefirlerden **Ali Galib Bey**’in Rumelihisarı’ndaki evinde toplantı düzenlediler. Toplantıya **İsmail Kemal**, **Hüseyin Siret**, **İsmail Safa** ve **Ubeydullah** katıldı. İngiltere Büyükelçisi **Sör Nicholas O’Conor**’a hitaben bir mektup kaleme aldılar. Bir de desteklerine kılıf buldular: “İngilizler Kırım Savaşı’nda bizimle birlikte harp ettiklerinden İngiltere’nin bu savaşta muzafferiyetlerini temenni ederiz!” Fakat gerçek niyetlerini de yazmadan edemediler: “**Sultan Hamit**’in İngilizlere karşı planladığı hasmâne siyasete millet iştirak etmemektedir.”

Hüseyin Cahit Yalçın’a göre metni **Tevfik Fikret** kaleme almıştı. Kimine göre ise **Hüseyin Siret** yazdı (Y.N. Adı geçen dizide [metnin bizzat Tevfik Fikret’in kaleme aldığı geçer](#)).

Sonuçta dilekçe Osmanlı münevverlerine sunuldu; destek imzası istendi. Kimler destek vermedi ki: **Recaizade Ekrem**, **Sami Paşazade Sezai**, **Mehmet Cavid**, **Mehmet Rauf**, **Ahmet Kemal**, **Tevfik Fikret** gibi 29 münevver.

Tarih: 20 Kasım 1899.

Güney Afrika sömürgesi İngilizler oluk oluk kan akıtırken Osmanlı münevverleri İngiltere Büyükelçiliği’nin kapısını çaldı. 12 kişiydiler.

Dilekçelerini bizzat **Sör O’Conor**’a elden verdiler (Y.N. Yine aynı dizide Osmanlı münevverleri adına dilekçenin **Tevfik Fikret** tarafından bizzat kaleme alındığı, İngiliz Sefiri **Sör O’Conor**’ın yüzüne karşı okuduğu ve bizzat [elden teslim ettiği](#) gösterilir).

Kuşkusuz **II. Abdülhamit** bu girişimi duydu, korktu ve bir operasyon başlattı (Y.N. Adı geçen dizide **Sultan Abdülhamit**, girişimi [Hasan Tahsin Paşa’dan öğrenir](#)).

İlk önce **Hüseyin Siret** ve **Ubeydullah** Beşiktaş Karakolu’na çekildi. İngilizler bu gözaltından rahatsız oldular. Büyükelçi **O’Conor** girişimde bulundu; gözaltına alınanlar serbest bırakıldı. Ancak **II. Abdülhamit** bu olayı unutmadı. 2 ay sonra **Hüseyin Siret**’i Bitlis’e, **İsmail Safa**’yı Sivas’a, **Ubeydullah**’ı Taif sürgüne gönderdi. **Tevfik Fikret** evinde göz hapsine alındı. Kimi de yurtdışına kaçtı (Bkz. “[Hangi şairler suikast planladı?](#)”).



Knut Hamsun’un 1899 tarihli ve imzalı tek fotoğrafı.

İşte bu **Tevfik Fikret**’in sadece gözlem yoluyla İstanbul’u, dolayısıyla Osmanlı’yı anlamaya çalışan **Hamsun**’a anlatacağı şüphesiz çok şeyi vardı ⁵. Merak ediyorum, şimdiye kadar hangi edebiyatçı böyle bir karşılaşmayı düşünmüştü? Çünkü bu konuda hiçbir veri bulamadım. Bununla birlikte bazı edebiyat tarihçileri **Hamsun**’un 1899-1900’de Rusya, Kafkasya ve Türkiye seyahatlerine çıkış nedenini “**gizemli, özgün ve el değmemiş olana karşı duyduğu ilgi ve sevgiye**” bağlar. Ancak tek neden bu olmasa gerek!

Ayrıca **Ole Amble**’in tezini geliştirmeme ilişkin çalışmalarım için **Hamsun** ile aynı düşünceleri paylaşıyorum:

“Ayağını Türk toprağına basmış olmak bile büyük bir muvaffakiyet değil mi zaten? Var mı herkeste bu cesaret? Tamam, Türkler adam yemiyor artık. Lakin hepten de dışsiz olduklarını kim iddia edebilir? Benden başka Norveçli bir yazar bu memlekete gelme cesaretini gösterebilmiş mi? **Goethe** bir zamanlar Weimar’dan İtalya’ya kadar gitmişti, Türkiye’yi ziyaret etti mi acep?

Hasılı, iftihar edilecek bir şey bu benim yaptığım!”

Bu arada [Hababam sınıfındaki edebiyatçının durumuna düşmeden](#), **Tevfik Fikret**’in 106. Ölüm Yıl Dönümü nedeniyle anısı karşısında büyük bir saygıyla eğiliyor, geçen yüzyılın başındaki aynı hatalara tekrar düşmememizi temenni ediyorum. Çünkü başımıza ne bela gelmişse, **III. Ahmet (1718-1730)** döneminde başlayan Batılılaşma Hareketi’ni bir türlü beceremediğimizden değil; bunun bir birikim meselesi olduğunu ve ancak bu birikimle refaha erişebileceğimizi kavrayamadığımızdan dolayı olmuştur. Yani biz birikim yapmadan her şeyi Batı’dan almakla Batılılaşacağımızı zannediyorduk. Ama 200 yıl sonra geldiğimiz nokta pek de farklı olmadı. Çünkü biz ilerlerken Batı da ilerliyordu, dolayısıyla aradaki fark bir türlü kapanmıyordu. İşte bu yüzden **Atatürk**’e göre bize 1 değil 100’lerce **Tevfik Fikret** gerekiyordu!

D. PAMUKTULUM, 19.08.2021, 01:54.

D. PAMUKTULUM

⁵ **Mustafa Kemal**’in Çanakkale Savaşı’ndayken **Tevfik Fikret**’e yetişemediğinden dolayı dövündüğünü çok iyi biliriz. **Mustafa Kemal** [19.08.1915](#)’te (**Tevfik Fikret**’in öldüğü gün) 16. Kolordu Komutanı ve aynı zamanda Anafartalar Komutanı olmuş ve [10.12.1915](#)’te de Anafartalar Grup Komutanlığı’nı **Fevzi (Çakmak) Paşa**’ya bırakarak izinli olarak Çanakkale’den ayrılıp İstanbul’a dönmüştü. Fakat **Tevfik Fikret**’i anması ancak [19.08.1918](#)/Pazartesi günü “*Tavaf-ı tahatturunda bulunmakla mübahi perestîşkâran-ı Fikret (Anısı çevresinde bulunmakla övünen, Fikret’in büyük hayranları)*” kaydıyla mümkün olabilmisti.

2.1. Genelleştirilmiş Ole Amble Algoritması (23.06.2021, 01:17:55). *Ole Amble*'in algoritmasına ilişkin ilk çalışmamı 01.02.2019, 20:21'de "[4.1. Ole Amble Algoritması](#)" adlı makalede yapmıştım. Anılan bu tarih, **Prof. Brynjulf Owren**'den "[Vereinfachte numerische Integration, Norske Vid. Selsk. Forh. Trondheim, v. 28, 1955, p. 30-36, MR 61, 517](#)" adlı **Romberg**'in tezini 23.12.2018, 18:30'da almamdan 40 gün sonrasını gösterir. Bu tezi 23.12.2018, 19:30-24.12.2018, 11:00 tarihleri arasında MS-Office 2016 ile A3 formatında "[Vereinfachte numerische Integration, Norske Vid. Selsk. Forh. Trondheim, v. 28, 1955, p. 30-36, MR 61, 517](#)" soluksuz bir şekilde (ki inanın tuvalete bile gitmedim) ilk kez mükemmel bir kopyasını çıkardım (Bkz. "[1.6.4.1. Romberg'in Orijinal Makalesi ve Sonuçları](#)", S. 12). Çünkü tezin orijinali hiç hoş değildi; sayfalandırma konu anlatımına göre kötü bir şekilde yapılmıştı, yani konu anlatımı sayfalara göre çok kötü şekilde bölünmüştü ve tablolar da oldukça dağınıktı. *Ole Amble*'in algoritmasına gelince, o sırada zaten 13705 KB'lık Romberg İntegrali 2016-2019.docx adlı araştırma dosyamda Uygulamalar'da idim ve güzel uygulamalar arıyordum. İşte bu sırada **Romberg**'in tezindeki *Ole Amble*'in algoritması dikkatimi çekti ve onu günümüze kazandırabilmek için hemen çalışmaya başladım. Yaptığım şey çok açıktır: **Romberg**'in anlatımına göre *Ole Amble*'in algoritmasını genelleştirmek, dolayısıyla **Romberg**'in turuncu tablosundan daha büyük tablolar elde etmektir. Bunlara ilişkin tüm sonuçları "[4.1. Ole Amble Algoritması](#)"'nda verdim. Fakat bu çalışmayı uygulamaların başına geçirmem, **Owren**'den aldığım **Romberg**'in tezi nedeniyle değil, matematik tarihçisi **Reinhard Siegmund-Schultze**'nin de çok iyi bildiği gibi **Romberg**'ten sonra gelen matematikçi olduğu için. Ne yazık ki matematikçiler bu konunun üzerinde durmazlar ama matematik tarihçileri bunun ne kadar önemli olduğunu gayet iyi bilirler. Bunu nereden mi biliyorum: 22/7.2002 kayıtlı "[Arşimet'in Metodu M.V.](#)" adlı bir projem vardı ve o sırada bir konuda bilgi almak için Boğaziçi Üniversitesi'nden bir profesöre danışmıştım. Bana dediği şey aynen şu: "Biz, her dönem öğrencilerimize matematik projesi veririz. Ama sen bu kadar bilgiyi (matematik tarihçesinden söz ediyor) nereden buldun?". İşte matematikçilerin zayıf oldukları konu bu! Bu sonuç aynı zamanda araştırmam makalem için de geçerliydi. Çünkü orijinal kayıtlara ulaşamıyordum. Sağ olsun **Owren**, ilk orijinal kayıt olan **Romberg**'in tezini bana verdi. Ama bu teze ulaşabilmek için neler çektiğimi bilerseniz aklınızı kaçırsınız (Bkz. "[1.6.4. Romberg'in Orijinal Makalesinin Peşinde](#)", S. 12).

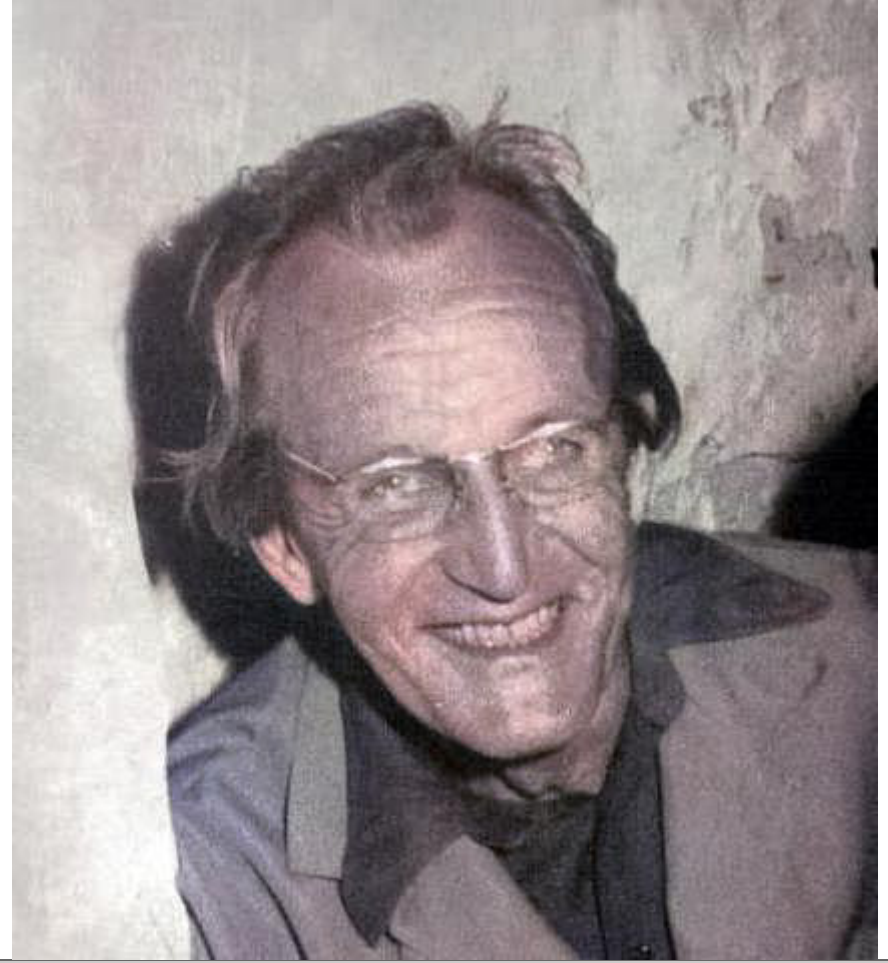
Şimdi tam burada **Reinhard Siegmund-Schultze**'nin bana gönderdiği yanıt e-postasındaki şu ifadeye özellikle dikkatinizi çekerim (Bkz. [EK 1](#)): "I do not know whether you are aware that NTNU the Technical University in Trondheim (Norway) has rather extensive personal papers of Werner Romberg. There is also a file on Romberg in Oxford within the refugee files of the Society for the Protection of Science and Learning."

Bu ifadede **Reinhard Siegmund-Schultze**, **Romberg**'in tezinin elimde olmadığını zannediyor, dolayısıyla Trondheim ve Oxford'taki ilgili kaynakları almamı istiyor. Ama ben zaten Trondheim'dan **Owren** ile 23.12.2018'den beri temas halindeydim ve **Romberg**'in tezini de ondan almıştım. Ayrıca **Romberg**'in hayatını projeye başladığımdan beri zaten araştırıyor ve birçok kaynağa ulaşmıştım bile. Burada bir şeye dikkatinizi çekerim: Norveçliler gerçekten de hümanist insanlardır ve eğer akademik kaynaklarda bir sıkıntıya düşer ve onlara başvurursanız size derhal yardım ediyorlar. Oysa aynı davranışı Almanya'dan göremedim. Ben Norveçlilerin bu samimi davranışlarını **Romberg**'den kaynaklandığını düşünüyorum. Çünkü **Romberg** Trondheim'a geldiğinde bir sürgün idi ve ona orada her türlü olanağı sağlamışlardı. Tabii ki bunda 2. Dünya Savaşı'nın getirdiği yıkımın da etkisi var. Şimdi belki Norveçliler kızacak ama, "[4.1. Ole Amble Algoritması](#)"nın ilk sayfasına Norveç'in en büyük edebiyatçısı **Knut Hamsun**'un fotoğrafı ve onunla ilgili verdiğim bilgiler orijinalde vardı. Takla atan genci resme sonradan ekledim. Peki neden? Bunu az sonra öğreneceksiniz. Hatırladığım kadarıyla bu fotoğrafı yine Norveçli bir diğer edebiyatçı **Tore Rem**'in "[Hitler'e Yolculuk \(Die Reise zu Hitler\)](#)" kitabından almıştım ve o sırada bunu Norveçlilere güzel bir hatırlatma yapmak için koymuştum. Bu arada "[İstanbul'da İki İskandinav Seyyah](#)" kitabıyla **Hamsun** bizi de ilgilendiriyordu. Ama daha o sırada A-ha'nın söz yazarı ve gitaristi **Pål Waaktaar-Savoy**'un 2018'de basılmış "[Tears from a Stone](#)" adlı kitabından haberim yoktu. Bu kitabı lisedeyken büyük bir keyifle dinlediğim ve sözlerini onun yazdığı "[Düşünce Treni \(Train of Thought\)](#)" parçasından keşfettim. Şöyle ki: **Pål**'un, bu parçayı yazarken **Gunvor Hofmo**, **Knut Hamsun** ve **Fyodor Dostoyevski** gibi varoluşçu yazar ve şairlere dayandığına ilişkin bir rivayet dolaşıyordu ortalıkta ve ben de bu bilmeceyi çözebilmek için araştırırken karşıma bu kitap çıktı. Anladığım kadarıyla, **Tore Rem**'in kitabı **Pål**'un üzerinde, özellikle geçmişiyile ilgili, büyük bir etki bırakmış!

Pål'un kitabını nasıl keşfettim?

Pål'un anılan parçasından hareketle Google'da araştırma yaparken 2018'de bir kitap yazmış olduğunu öğrendim ve Google kitaplığında bu kitabın tanıtımı da olsa mevcut olduğunu görünce derhal kitap içinde araştırmalarımaya başladım. Önce soldaki arama kutusunun içine "[Hamsun](#)" yazdım ve karşıma 4 sayfa geldi. Bunlardan sonuncusunda **Tore Rem**'in anılan kitabı da geçer. Ama bu sayfaların hepsi ön izleme olduğu için içeriklerine bakamadım. Çünkü içeriklerini öğrenebilmeniz için sizi kitabı satın almaya yönlendiriyordu. Ama bu kitapta **Hamsun** ile ilgili sayfalarda nelerin yazılmış olduğunu muhakkak öğrenmem gerekiyordu ve 4 sayfa için de kitabı satın almayı gerekli görmüyordum. Sonra Google kitaplığına dönerek arama kutusuna şunu yazdım: "[Waaktaar, Tears from a Stone, Hamsun](#)". İşte karşıma çıkan "İÇİNDE BULUNDU"nun [ön izlemesine](#) tıkladığım zaman **Hamsun**'u buldum ve orada **Hamsun** ile ilgili daha önce hiçbir kaynaktan görmediğim bilgiler veriliyordu. Bunları "[K_n ve T_n İçin İndirgeme Bağlantıları](#)" adlı makalemdeki [Resim 5](#)'in altında verdim (Bkz. Önsöz, VIII-IX. sayfalara). Orada **Hamsun**'un "[Yitik Ada](#)" adlı şiirindeki bir dördlüğün Almancası var. Ama **Hitler** hakkında verilenler daha da dikkatimi çekmişti ve **Hitler**'i **Pål Waaktaar** değil, o dönemi yaşamış bir kişi, **Pål Waaktaar**'ın babası **Olav Nicolai Gamst** anlatıyordu. Diyordu ki: "Benim küçük memleketimde herkes Nazilerden nefret ederdi, kimse onlara sempati duymazdı. Ama **Hamsun**'un **Hitler**'i olumladığı imajını unutursanız, bence **Hamsun** ülkemizdeki en büyük yazardır."

Bu, **Hamsun** hakkında ilk kez birinci elden bir değerlendirmeydi ve şimdilerde **Hamsun**'u kötülemek için, özellikle Norveç'te, yapılan propagandaları geçersiz kılıyordu. Bize bu bilgiyi sağladığı için **Pål Waaktaar Savoy** kardeşimize teşekkürü bir borç biliriz. Çünkü ben de **Hamsun**'u bu şekilde düşünüyordum ama kaynak bulamıyordum. **Hamsun** aslında kötü biri değil; sadece geçmişteki yoksulluk yıllarına bir daha geri dönmek, dolayısıyla önüne çıkan fırsatları değerlendiren biri olduğu için 2. Dünya Savaşı sırasında Nazilerden yana oldu. Örneğin 1899 İstanbul'daki gözlemlerini yazdığı "[İstanbul'da İki İskandinav Seyyah](#)" kitabında, **Hamsun**'un önüne çıkan fırsatları nasıl değerlendirdiğini ve bu fırsatların ona verdiği rahatlığı açıkça görebilirsiniz. Yani adam açıkça rahatına düşkün biri olarak gözükür. Bence Norveçliler **Hamsun**'u kötülemek yerine, neden böyle davrandığını araştırırsalar daha doğru olur. Nobel ödülü aldığı "[Açlık](#)" kitabıyla başlamaları gerekiyor. Bununla birlikte **Hamsun**'un hataları da var. Örneğin "[Hamsun](#)" adlı filmin fragmanında gösterilen **Hamsun**'un, cepheye giden ve birazdan ölecek olan 20'li yaşlardaki Norveçli askerlerle tartışması hiç doğru değildir... Kamyon uzaklaşırken Norveçli askerlerin "**Hamsun**" diye sayıklaması, travma geçirdiklerinin açık bir kanıtıydı!



Resim 2.1. [Ole Amble \(08.05.1913-06.01.1996\)](#), 1950. 8 Mayıs 1913'te Binbaşı **Ole Amble Ommundsen** ve **Anna Kristiansen**'in oğlu olarak Trondheim'da doğdu. Ana dal: Meteoroloji, Yan dal: Astronomi, matematik, fizik, mekanik, coğrafya. 1939'da Oslo'daki Meteoroloji Enstitüsü'nde hava durumu bölümünde meteorolog, 1947'den itibaren iklim bölümünde. Hastalık izni 1941-1945 (**Not.** Muhtemelen **Hitler**'den dolayı kafa izni. Çünkü Norveç [9 Nisan 1940](#)'da Nazi Almanyası tarafından işgal edilmiş ve 1945'e kadar sürmüştü. Bkz. [Dipnot 5](#)). 17.12.1917'de **Ragnhild Aasgaard** ve 11.11.1939'da 2 kız çocuğu doğdu.

"Tropagram, Yeni Bir Havabilim Diyagram, 1940", "Degrade Rüzgarının Hesaplanması, 1945", "Bush Entegratörleri İçin Bağlantı İlkesi Üzerine, 1946" gibi meteoroloji üzerine çeşitli tezler yazdı. Bu nedenle **Ole Amble**'a "**2. Richardson**" denilebilir (Bkz. [RİK 4](#), S. 35, Resim 2.3).

Pål Waaktaar kimdir?

Bu arada **Pål Waaktaar**'dan hiç söz edemedim. Onu müzik dünyasının dışındaki özel hayatını "[Tears from a Stone](#)" kitabından öğrenebilirsiniz. Çünkü biyografilerinde özel hayatı **Romberg**'de olduğu gibi pas geçilmiştir (ki örneğin "[Paal's family](#)"deki bilgileri normal biyografilerde göremezsiniz. Örneğin [Resim 5](#)'in altına yazdığım **Pål**'un saçının renginin sarı olduğunu buradaki turkuaz renkli tabloda öğrenmiştim. Orada ayrıca **Pål**'un bir zamanlar (gençliğinde) metro bilet satıcısı olduğunu öğreniyoruz ki, "[Düşünce Treni \(Train of Thought\)](#)" parçasını [Resim 5](#)'teki soldaki parçadaki gözlemlerine göre yazmıştır). O, 1961'de Oslo'da doğdu ve kız kardeşi **Tonje** ile birlikte bir deniz kenarında, [Manglerud](#)'ta büyüdü. Annesi **Gerd Waaktaar** ve babası **Olav Nicolai Gamst**, hayatlarını **Hamsun**'un eserleriyle doldurdıkları için yetişmesinde çok büyük katkı yaptılar. Ailecek tekne turuna çıktıklarında **Hamsun**'un "[Yitik Ada](#)" adlı şiirini okumalarının nedeni, [Manglerud](#)'un denize açılabilir bir fiyordur ([Oslo Fiyordur](#)) olmasından kaynaklanır. Yani kitabında, dolayısıyla [IX. sayfa](#)da geçen tekne turları buradan başlıyordu.

Şimdi kitapta **Pål Waaktaar**'ın okuma dünyasına dalıyoruz ve ebeveynlerinin onu nasıl değiştirdiğini gözlemliyoruz.



Resim 2.2. A-ha'dan önceki grup [Bridges](#) (1978-1981): Soldan sağa doğru **Magne Furuholmen**, **Øysten Jevanord**, **Pål Waaktaar** (ki ergen olduğu için aynadaki yansımasını seyrediyor) ve **Tone Aarnes**.

"***Dünyayı istiyoruz ve onu şimdi istiyoruz***" kitabında-A-ha hakkında kitapta (1986) Aftenposten'dan gazeteci **Tor Marcussen**, **Pål**'un okulu bitirdikten 1 yıl sonraki hayatını şöyle resmediyor: "Bu yılda (*In diesem Jahr*)» **Hamsun**'u oynadı. Çünkü **Pål** edebiyatı keşfetmişti. Norveççe derslerinde edebi içeriğin soğuk incelemesinden edebiyata karşı tam bir isteksizlik geliştirdikten sonra, **Pål** aniden neyi kaçırdığını fark etti. Kitapların aslında birçok önemli bilgi ve yaşam deneyimi içerdiğini. En ucuz kitaplar için yanıp tutuşuyordu, İngilizce ciltsiz baskılar satın aldı. Her şeyi yalayıp yuttu. Oslo kafelerinde saatlerce kitap okuyarak geçirdi."

1980 sonbaharında **Pål** 19 yaşına girdi ve **Magne (Furuholmen)** son sınıfını bitiriyordu. **Pål**'e göre, o zamana kadar hem o hem de **Magne**, edebi kanonun derinliklerine inmeyi reddetmişlerdi. Okudukları veya duydukları, yaptıklarına etki etmemelidir. "Yeteneğimize olan güvenimiz o kadar sarsılmazdı ki, tüm eski saçmalıklardan ödün vermemeliydik. Başka şeyler duymanın veya okumanın anlamsız olduğunu düşündük"

Bu tutum o yıl boyunca değişti, ancak Oslo kafelerinde kitaplarla geçen uzun saatler sadece büyük edebiyatı keşfetmekle ilgili değildi. Okumak niyetinde olmasa bile, içinde hala büyüyen bir huzursuzluk vardı. Acaba lisede mi kalmalıydı? Okumayı seven bir aileden geliyordu. Anne, Manglerud kütüphanesinin gayretli bir kullanıcısıydı ve evdeki iyi stoklanmış kitaplıkta, diğer şeylerin yanı sıra ciltler dolusu şiir ve kitap kulübü baskıları vardı. **Pål**'un ablası **Tonje**'nin en sevdiği okuma materyali de orada bulundu, roman serisi İsveçli **Vilhelm Moberg**'in "Göçmenler" adlı romanı. Süreli dergilere ek olarak, babasının başucu masasında aynı anda okuduğu 6 ya da 7 kitaptan oluşan bir yığın vardı.

Bu nedenle **Pål**, literatürü yoğun bir şekilde incelemeye karar verdi. Her şey **Dostoyevski** ile başladı. **Pål** doğrudan "[Suç ve Ceza](#)"ya dalar ve sonra **Hamsun** ve **Kafka** ile devam eder. Daha sonra 1981'de Nobel Edebiyat Ödülü'nü kazanan Bulgaristan doğumlu **Elias Canetti** ve 2. Dünya Savaşı'ndan sonra Japonya'nın en tanınmış yazarlarından **Yukio Mishima** izledi. Edebi keşifler, **Pål**'un narin vücudunda derin izler bıraktı. Aynı yıl, Bridges deposunda isim değişikliği, stüdyo kayıtları ve yukarıda bahsedilen stüdyo hırsızlığı ile çok şey oldu. Oslo'da yeni bir 10 yıla girerken kitapçıları, plak dükkanlarını taradı, film kulübüne gitti ve yazmak için çeşitli yerlere yerleşti. Ve oku: **Unmengen**. **Pål**, klasiklere ve **Gunvor Hofmo**'nun keşfine ek olarak, punk şairi **Gene Dalby**'yi de okudu. Oslo'daki Velvetli şair ilk çıkışını 1979'da "[Linedanser på piggråd \(Dikenli tel üzerindeki ip cambazları\)](#)" ile yaptı. Edebiyata olan yoğun ilgi **Pål**'a Londra'ya kadar eşlik etti, burada kütüphanede oturdu ve okudu.

"Kendimi bilgiye verdim, buna bir nevi eğitim eksikliğimin ikamesi diyorum."

Pål'un kendi metinleri genellikle melodi biçimini bulduktan sonra ortaya çıkar. Neredeyse her zaman önce gelir. Ancak, tamamen yeni bir melodiye doğru ilk adımlarda bile, genellikle sonuca etki eden bazı yönlendirmeler, kelimeler, metin parçaları veya bir uğultu vardır. **Pål** bunun nasıl çalıştığını açıklıyor:..." Bundan sonrasını kitaptan okursunuz, çünkü Google kitaplığının bana izin verdiği yere kadar çevirdim. Bu arada "[A-ha The Movie](#)" adlı belgesel şu sıralarda Norveç'te gösterime girecek!

Acilen fonlanmam lazım (!)

Şimdi kaldığım yerden devam edersem, **Ole Amble**'in algoritması için 2. çalışmamı "[K_n ve T_n İçin İndirgeme Bağlantıları](#)" adlı makalemin sonundaki [EK 1](#)'de verdim. Bu çalışmada **Ole Amble**'in şapka ile gösterilen yaklaşıklıklarını **Romberg**'in (1.74)'teki yaklaşıklıklar dizilerine göre (1.76)'da yazdım. Çünkü "[4.1. Ole Amble Algoritması](#)"nda bu gelişmeden haberim yoktu. Sonra **Romberg** ile **Ole Amble**'in yaklaşıklıkları, dolayısıyla tablolarındaki elemanlar arasındaki ilişkileri ele aldım ve bunları **Romberg**'in hazırlamış olduğu [mavi ve turuncu tablolar](#)a göre tam olarak ifade ettim. O sırada bu yeterliydi ama oradaki bağlantıları bu makalemden teoremlerle tam anlamıyla inceledim. Bitmedi, bu çalışmaları yaparken 25.07.2021'de birine gülerken [Samsung 32" CHG70](#) adlı monitörüm göçtü (ki [RİK 4](#)'te bahsettiğim meşhur monitörüm budur). Bu monitörü Vatan Bilgisayar'dan 17.05.2018, 17:48'de almıştım ve 28.07.2021, 17:05:03'te de [Samsung 32" Odyssey G7](#) adlı bir monitör daha satın aldım. Fakat bu son monitördü ve adından dolayı [Apollo 13](#)'e benzettiğim için bir facia olmasından korkuyordum. Korktuğum başıma geldi, çünkü monitörü monte ettikten sonra [panelin tam ortasından 2'ye bölündüğünü ya da 2 eş panelin birleştirilmiş olduğunu gördüm](#). İlk başta tasarımdan dolayı böyle olduğunu zannettim ama fişini takınca bunun bir fabrikasyon hatası olduğunu anladım ve yoğun bir iletişim sonucunda ertesi gün iade ettim. Anladığım kadarıyla bunlar takıntı yaptığım için başıma gelmişti. Apollo 13'tekiler "**13**" ile dalga geçerken bunun farkında değillerdi; [G.H. Hardy](#) da öyle, [Ramanujan](#) da öyle, Eski Babilliler de öyleydi (Bkz. "[Apollo 13](#)", "[1729](#)", "[Hammurabi Kanunları](#)"). Çünkü sorun takıntı yapmaya başladığınız zaman başlıyordu. Takıntı bir yana ekonomik olarak zaten sarsık haldeydim ve bir de üstüne monitörde panel arızası ortaya çıkınca hepten göçtüm. İşte o zaman Norveç Dışişleri Bakanlığı tarafından acilen fonlanmam gerektiğini anladım (!) Bizimkiler zaten fonlamıyor, ne yapayım? Almanya desen hiç mümkün değil!

Ole Amble'in Algoritması. Şimdi şakayı bir kenara bırakırsak ikidir uğraştığım **Ole Amble**'in algoritmasını hiçbir kaynağa bakmadan **Romberg**'in anlatımına göre şu şekilde genelleştirdim: [Romberg'in tezinde](#) verilen bilgilere göre ilkin **Ole Amble**'in yaklaşıklıklığını, $\forall n \in \mathbb{N}, m = 0, 1, \dots, n$ için $N = \frac{2^n}{2^m} = 2^{n-m}$ ve $h_n = \frac{b-a}{2^n}$ farkına göre $Nh_n = \frac{b-a}{2^m} = h_m$ olmak üzere

$$(2.1) \quad A_{2^m} = \frac{Nh_n}{24} (f_N - f_{-N} + f_{(2^m-1)N} - f_{(2^m+1)N})$$

şeklinde verebilir ve bu genel tanımını da,

$$\begin{aligned} A_{2^m} &= \frac{Nh_n}{24} (f_N - f_{-N} + f_{(2^m-1)N} - f_{(2^m+1)N}) \\ &= \frac{Nh_n}{24} (f(a + Nh_n) - f(a - Nh_n) + f(a + (2^m - 1)Nh_n) - f(a + (2^m + 1)Nh_n)) \\ &= \frac{h_m}{24} (f(a + h_m) - f(a - h_m) + f(a + (2^m - 1)h_m) - f(a + (2^m + 1)h_m)) \\ &= \frac{h_m}{24} (f(a + h_m) - f(a - h_m) + f(b - h_m) - f(b + h_m)) \end{aligned}$$

eşitliklerine göre en sade halde şöyle yazabilirim:

$$(2.2) \quad A_{2^m} = \frac{h_m}{24} (f(a + h_m) - f(a - h_m) + f(b - h_m) - f(b + h_m)).$$

Burada **Romberg**'in, tezinde yaptığı şu [uyarı](#)ya dikkat edelim: "Diğer bazı yaklaşım yöntemleri de yaklaşık değerler elde edilir edilmez metodumuza uyarlanabilir. Örneğin O. AMBLE [2], $a \leq x \leq b$ integral aralığının dışında her 2 tarafa h uzaklığında birer nokta ekleyerek I 'ya daha iyi bir yaklaşımın nasıl bulunabileceğini gösterdi (Auch manche anderen Näherungsmethoden können unser Verfahren entsprechend anpassen, sobald Näherungswerte bei mehrmaliger feinerer Teilung vorliegen. So hat u.a. O. AMBLE [2] gezeigt, wie man durch Hinzufügen je eines Punktes im Abstände h auf beiden Seiten ausserhalb des Integrationsgebietes $a \leq x \leq b$ eine bessere Annäherung an I finden kann)". İşte bu açıklamaya göre $[a, b]$ aralığındaki uç noktaların h_m -komşuluklarına göre içteki noktalar $a - h_m$ ve $b - h_m$ ve dıştaki noktalar $a + h_m$ ve $b + h_m$ 'dir. Yani **Romberg**'in "**Ole Amble**, $[a, b]$ integral aralığının dışında her 2 tarafa h uzaklığında birer nokta ekleyerek I 'ya daha iyi bir yaklaşımın nasıl bulunabileceğini gösterdi" dediği noktalar bu son noktalar. Tabii biz bu noktaları 1952'deki haliyle değil; onları günümüze taşıyarak hem modern halde hem de en genel halde görüyoruz!

Fakat **Romberg**, tezinin [2. sayfası](#)nda **Ole Amble**'in algoritmasını $m = 0, 1, 2, 3$, $n = 3$ ve $N = 1$ için şu şekilde vermişti (Bkz. "[4.1. Ole Amble Algoritması](#)", S. 97, (4.2)'ye):

$$(2.3) \quad A_{2^m} = \frac{2^{n-m}h_n}{24} (f_{2^{n-m}} - f_{-2^{n-m}} + f_{2^n N - 2^{n-m}} - f_{2^n N + 2^{n-m}}).$$

Yine **Romberg**'e göre $I = \int_a^b f(x)dx$ 'e yakınsayan **Ole Amble**'in yaklaşıklıkları şöyledir:

$$(2.4) \quad \begin{cases} \hat{K}_n = K_n + A_n + O(h_n^4), \\ \hat{T}_n = T_n - 2A_{n+1} + O(h_n^4). \end{cases}$$

Buradaki ilk yaklaşıklık [\(49\)](#) no'lu

$$(2.5) \quad P_n = K_n + \frac{h_n}{24} (-f_0 + f_2 + f_{2^{n-1}} - f_{2^{n+1}}) = K_n + \frac{h_n}{24} (-f(a) + f(a + h_{n-1}) + f(b - h_n) - f(b + h_n)) + O(h_n^4)$$

Newton-Cotes formülünden ve ikinci yaklaşım da **D. C. Joyce**'nin, "[Survey of Extrapolation Processes In Numerical Analysis/9. Analysis of Romberg's method](#)" kitabının 441. sayfasında [\(26\)](#) no'lu formülde dile getirdiği **Sheppard**'in 14.06.1900'deki,

$$(2.6) \quad S_n = T_n + \frac{h_n}{12} \left(f_0 - f_1 - f_{2^{n-1}} + f_{2^n} \right) = T_n + \frac{h_n}{12} \left(f(a) - f\left(a + \frac{h_n}{2}\right) - f\left(b - \frac{h_n}{2}\right) + f(b) \right) + O(h_n^4)$$

yaklaşıklıklarından daha iyi yakınsama yaparlar. Çünkü **Ole Amble**'in (2.4)'teki yaklaşıklıkları, gerçek yaklaşıklıklardır (Bkz. "[4.1. Ole Amble Algoritması](#)", S. 97, Dipnot 1. Dipnottaki formül için "[W. F. Sheppard: Some quadrature formulas, Proc. London Math. Soc., 32, 1900, pp. 258-277](#)" adlı tezinin 267. sayfasındaki (28) no'lu formüle ve bu formül hakkında daha fazla bilgi almak için de 267-277. sayfalarındaki "[III. Miscellaneous Formulas](#)" parçasına bakınız).

Şu halde **Ole Amble**'in yaklaşıklıklarını (1)&(2) ve (2.2)'yi (2.4)'te yerlerine koyarsak,

$$(2.7) \quad \begin{cases} \hat{K}_n = \frac{K_0}{2^n} + h_n \sum_{k=1}^{2^n-1} f(a + kh_n) + \frac{h_n}{24} (f(a + h_n) - f(a - h_n) + f(b - h_n) - f(b + h_n)), \\ \hat{T}_n = h_n \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(a + \left(k + \frac{1}{2}\right)h_n\right) - \frac{h_n}{24} (f(a + h_{n+1}) - f(a - h_{n+1}) + f(b - h_{n+1}) - f(b + h_{n+1})) \end{cases}$$

şeklinde elde ederiz ve bunlara ait ekstrapolasyon aşağıdaki (2.10)'a göre (2.11)'dedir.

2.2. Romberg İle Ole Amble'in Yaklaşıklıkları İçin Ekstrapolasyonlar



Resim 2.3. Romberg 1'den Romberg 2'ye Doğru: Solda **Werner Romberg** (8-10 Aralık 1988) ve sağda **Posseidon**'un yanında **ben** (İstanbul Arkeoloji Müzesi, M.Ö. 1-M.S. 1. yy. Roma Heykelleri Bölümü, 23.10.2004, 15:10). Buradaki görüntüm, aşağıdaki (2.9)'u vermemden 528 gün (14.05.2003-23.10.2004) sonraki halimdir (Bkz. RİK 4, S. 33, (2.39) no'lu ekstrapolasyon). Bu, **Romberg**'in ölümünden 98 gün (05.02.2003-14.05.2003) sonrasını gösteriyordu. Ama burada yanlış bir anlaşılma olmasın: Ben **Romberg**'in matematikteki ikincisi ya da devamıyım. Tıpkı **Ramses I** ve **Ramses II** de olduğu gibi. Çünkü **Hans Romberg** adında ve şimdi 60'lı yaşların başında bir oğlu varmış. Vallahi ben de yeni öğrendim (Bkz. EK 1).

Bilindiği üzere **Romberg**'in $X_{mn} = K_{mn}, T_{mn}$ yaklaşıklıkları için

$$(2.8) \quad E_{mn,0}(X) = X_{mn}$$

başlangıç değerini göz önüne alırsak $\forall m, k \in \mathbb{N}^+$ için E-ATA M ekstrapolasyonunu şu şekilde tanımlamıştım (Bkz. (2.34) ve (2.39)):

$$(2.9) \quad E_{mn,k}(X) = \frac{4^{mk} E_{mn,k-1}(X) - E_{m(n-1),k-1}(X)}{4^{mk} - 1}.$$

Buna “**Geçiş Ekstrapolasyonu**” diyelim, çünkü bu ekstrapolasyon **Ole Amble**'in (2.7)'deki yaklaşıklıkları için (2.4)'teki yakınsamalar nedeniyle $k = 1$ için çalışmaz. Yani $k = 1 = m$ ve sonraki değerlerde **Romberg**'in K_n ve T_n yaklaşıklıkları çalışırken, **Ole Amble**'in $\hat{K}_n$ ve $\hat{T}_n$ yaklaşıklıkları $k = 2$ ve sonraki değerlerde çalışır. Bu, **Ole Amble**'in yaklaşıklıklarının, yakınsaklık bakımından **Romberg**'in yaklaşıklıklarından 1 adım (mertebe) önde olduğunu gösterir!

Bu durumda **Ole Amble**'in $Y = \hat{K}_{mn}, \hat{T}_{mn}$ yaklaşıklıkları için (2.4)'teki eşitliklerin her 2 tarafının E ile ekstrapolasyonunu alırsak (ki E, bir lineer fonksiyondur. Burada $E_{mn,k}(A) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ olduğundan $E_{mn,1}(A), E_{m(n+1),1}(A) \rightarrow 0$ nedeniyle ihmal edilebilir olduklarına dikkat ediniz),

$$\begin{aligned} \hat{K}_{mn} &\cong \frac{4^m \hat{K}_{mn} - \hat{K}_{m(n-1)}}{4^m - 1} = \frac{4^m E_{mn,0}(\hat{K}) - E_{m(n-1),0}(\hat{K})}{4^m - 1} = E_{mn,1}(\hat{K}) = E_{mn,1}(K + A) = E_{mn,1}(K) + E_{mn,1}(A) \cong E_{mn,1}(K) \Rightarrow \hat{K}_{mn} \cong E_{mn,1}(K) + O(h_n^4), \\ \hat{T}_{mn} &\cong \frac{4^m \hat{T}_{mn} - \hat{T}_{m(n-1)}}{4^m - 1} = \frac{4^m E_{mn,0}(\hat{T}) - E_{m(n-1),0}(\hat{T})}{4^m - 1} = E_{mn,1}(\hat{T}) = E_{mn,1}(T) - 2E_{m(n+1),1}(A) \cong E_{mn,1}(T) \Rightarrow \hat{T}_{mn} \cong E_{mn,1}(T) + O(h_n^4) \end{aligned}$$

yaklaşımları ortaya çıkar ki burada **Ole Amble**'in yaklaşıklıklarının **Romberg**'in yaklaşıklıklarından neden 1 adım ya da mertebe önde olduğu tamamen açığa çıkmıştır. İşte bu nedenle artık (2.9)'u kullanamayız; bunun yerine (2.8)'deki başlangıç değerini 1 adım ilerletirsek,

$$(2.10) \quad F_{mn,0}(Y) = Y_{mn} \cong E_{mn,1}(X)$$

başlangıç değerini elde ederiz ve (2.9)'daki 4'ün kuvvetindeki k'ye de 1 eklersek,

$$(2.11) \quad F_{mn,k}(Y) = \frac{4^{m(k+1)} F_{mn,k-1}(Y) - F_{m(n-1),k-1}(Y)}{4^{m(k+1)} - 1}$$

ekstrapolasyonu geçerli olur. Buna da “**Esas Ekstrapolasyon**” denir.

Not 2.1. Yukarıdaki **Ole Amble**'in genelleştirilmiş algoritmasına göre yazdığım Mathematica programını “[11. 2. Tür E-ATA M Algoritması Üzerindeki Genel Haldeki Ole Amble Algoritması'na Mathematica İle Sembolik Bir Yaklaşım](#)”dan alabilirsiniz. Fakat bu Mathematica dosyamdaki ilk uygulama nedeniyle birkaç noktaya açıklık getirmem gerekiyor: Bundan sonra makalelerime ilişkin Mathematica programlarını (ki bunlara notebook deniliyor) web sitemden değil, az önce linkini verdiğim Wolfram Cloud'taki hesabımdan vereceğim. Çünkü bu dosyaların web sitem üzerindeki görünümü format nedeniyle kısıtlıdır ve bu da okumayı güçleştiriyor. Wolfram Cloud'ta öyle değil, dosya tam ekran boyutunda ve üzerinde istediğiniz işlemi yapabilirsiniz. Örneğin metni ya da formülü mü okuyamadınız, hemen gözaticinizdeki “**Yakınlaştır**” ile istediğiniz büyüklükte okuyabilirsiniz. Ama en iyisi, sağ üstteki “**Download**” ile dosyayı bilgisayarınıza indirerek Mathematica programıyla ya da

[Wolfram Player](#) ile okumaktır. Çünkü bu takdirde dosyayı hem en iyi şekilde okuyabilirsiniz hem de programdaki fonksiyonu ve aralığı değiştirerek istediğiniz integrali hesaplayabilirsiniz. Programa gelince, 3 bölüm halinde verdiğim programın ilk bölümünde yukarıdaki bilgilere göre **Ole Amble**'in genel haldeki algoritmasını tanımladım ve 2. bölümünde de (2.11)'deki ekstrapolasyonu verdim. 3. bölümde ise top bir örnek ele alarak (ki bu örnek internetteki pek çok kaynakta geçer ve sonucu 11061 olarak verilir) metodumuz ile ilgili kritik bilgileri verdim. İşte bu bölümün altında örneğimiz için 2 farklı çözüm vererek aralarındaki farkı ve bunların program kullanmadan iteratif olarak nasıl çalıştıklarını gösterdim. Özetle bu dosya **Ole Amble**'in algoritmasında **Romberg**'in 1955'teki örneğinden sonra 2. örneği gösterdiği için tarihi bir öneme sahiptir. Bununla birlikte programdaki fonksiyonu ve aralık değerlerini değiştirirseniz istediğiniz kadar örnek yapabilirsiniz. Çünkü ne de olsa **Ole Amble**'in algoritmasını genelleştirmiş bulunuyoruz! Bakalım, Norveçliler beni fonlayacak mı? Ama bana asıl fonu Resim 2.1'deki artist verdi desem şaşırır mıydınız? Çünkü o beni (bakışlarıyla) fonladı, ben de onu (bu makaledeki sonuçlarla onun gerçek bir Nümerik Analizci olduğunu kanıtlayarak) fonladım!

2.3. Romberg İle Ole Amble'in Yaklaşıklıkları Arasındaki İlişkiler. Öncelikle (2.4) ya da (2.7)'den

$$\hat{K}_{n+1} - K_{n+1} = \frac{h_{n+1}}{24} (f(a + h_{n+1}) - f(a - h_{n+1}) + f(b - h_{n+1}) - f(b + h_{n+1})) = \frac{T_n - \hat{T}_n}{2}$$

eşitliklerine göre sadece şu bağıntının mevcut olduğunu görürüz (ki bu bağıntıyı (1.82)'de vermiştim. Bkz. "[Tablolardaki Elemanlar Arasındaki İlişkiler](#)", S. 17-19).

$$(2.12) \quad 2\hat{K}_{n+1} + \hat{T}_n = 2K_{n+1} + T_n.$$

Eğer bu bağıntıda T_n 'yi (1.20)'den çözer ve yerine koyarsak,

$$2\hat{K}_{n+1} + \hat{T}_n = 2K_{n+1} + T_n = 2K_{n+1} + 2K_{n+1} - K_n = 4K_{n+1} - K_n = 3E_{n+1,1}(K) \Rightarrow E_{n+1,1}(K) = \frac{2\hat{K}_{n+1} + \hat{T}_n}{3}$$

eşitliklerinden

$$(2.13) \quad E_{n+1,1}(K) = \frac{2\hat{K}_{n+1} + \hat{T}_n}{3} + O(h_n^4)$$

bağıntısını elde ederiz ki buradan şu sonuçlar çıkar:

1. Eğer (2.12)'deki eşitliğin her 2 yanını 3'e bölersek elde edilen eşitliğin sağ tarafı (2.25)'teki 2. Snell bağıntısını gösterirken, sol tarafı aynı bağıntının (2.13) ile **Ole Amble**'in yaklaşıklıkları için de geçerli olduğunu gösterir.



Resim 2.4. 13.06.2021'de Johan Cruijff Arena'daki [Hollanda-Ukrayna maçı](#)nı izleyen 16,000 taraftara Hollanda Kralı ve Kraliçesi de eşlik etti. İkinci yarının başında Kraliyet çifti şu twiti attı: "Johan Cruijff Arena'da heyecan verici bir oyun. Hollanda Milli Takımı'nın orada oynadığını görmek harika. Güzel bir Avrupa Şampiyonası için sabırsızlanıyoruz." 7 dakika sonra **Wijnaldum**, skoru 1-0 yaptı. Bu sırada Hollanda Kralı **Willem-Alexander**'in sevinci görülmeye değerdi (Bkz. "[Holland lässt den König jubeln](#)"). Şimdi sansüre uğrayan Kral'ın bu sevincini maçı canlı izlediğim için gördüm ve [Şekil 1](#)'in altına (2.24)'teki 1. Snell bağıntısı nedeniyle not düşerek bu sevince katıldım. Gördüğüm kadarıyla Kral, **Wijnaldum**'un golünden sonra yerinden kalktı ve 2 elini yumruk yaptıktan sonra sağa-sola sallanarak sevindi (Bkz. [Helmich Lubberts'in twiti](#)). İşte tam bu sırada Kraliçe **Maxima**, ona yukarıdaki resimde görüldüğü üzere garip garip baktı. Anladığım kadarıyla Kral'ın bu davranışının yanlış değerlendirilmesinden korkuluyordu. Fakat şimdi görüyorum ki, (2.13)'teki bulgum nedeniyle tekrar aynı sevinç içerisindeyim. Çünkü **Ole Amble**'in yaklaşıklıklarını bir tek bu bağıntı açıklar. Düşünsenize: **Ole Amble**'in anılan 1952 tarihli tezini Prof. **Brynjulf Owren**'den istedim; bana elinde olmadığını söyledi ve son olarak Norveç Kralı'ndan istedim; ondan da bir sonuç alamadım (Bkz. "[Saygıdeğer Ekselansları V. HARALD'a Taziye Mesajı](#)", S. 16). Biri bu tezin yazıldığı Trondheim Üniversitesi Matematik Bölümü'nün profesörü, diğeri bu tezin basıldığı **DKNVS**'nin 1760'tan beri koruyucusu. İşin kötüsü, bu konuda elimizde bir tek "[W. F. Sheppard: Some quadrature formulas, Proc. London Math. Soc., 32, 1900, pp. 258-277](#)" adlı tezi, özellikle "[III. Miscellaneous Formulas](#)" parçası, var ama o da **Ole Amble**'in algoritmalarını açıklamaktan uzak. Özetle bu konudaki düşüncem **Hamsun**'unkiyle aynıdır: "(Alman subayların **Hamsun**'un odasına girip **Sultan Abdülhamit**'in Hamidiye Camii'ne geliş-gidişinin seyir ahengini bozması üzerine) Ekselansları Teşrifat Müdürü bu odayı sadece biz ikimize tahsis etmekle ne kaybederdi ki? Bu asil davranışını hiç hatırımızdan çıkartmaz, biz de ona bir hizmette bulunmaya gayret ederdik. İşte şimdi, Türkiye'nin Avrupa'da iyi dostlar temin etme imkânını ziyan etmiş oldu", [IV. Bölüm: Sultan'ın Cami Ziyareti](#), S. 54. Yani sevinmek hakkımız, söke söke alırız!

2. (2.13)'te (2.4)'teki yakınsamalar gerçekleşmiştir. Çünkü eşitliğin sol tarafı (2.50)'de $k = 1$ için büyük O içindeki h_n 'ye 4. mertebeden yaklaşır, yani eşitliğin sağ tarafındaki $\hat{K}_{n+1}$ ve $\hat{T}_n$, dolayısıyla $\hat{K}_n$ ve $\hat{T}_n$ yaklaşıklıkları da aynı yakınsamayı gerçeklerler. Ama bu sonuç (2.4)'teki $\hat{K}_n$ ve $\hat{T}_n$ 'nin $O(h_n^4)$ 'te yakınsama yaptıklarını göstermeye yeterli değildir!

Ole Amble'in Yaklaşıklıklarının Mertebesi İçin Dolaylı Bir İspat!

Ama şu Snell bağıntısı bu yakınsamayı göstermeye yeterlidir: Eğer $\hat{K}_n$ 'ye **Huygens**'in algoritmasını uygular ve (2.25)'i kullanırsak,

$$E_{n+1,1}(\hat{K}) = \frac{4\hat{K}_{n+1} - \hat{K}_n}{3} \stackrel{(2.12)}{=} \frac{2 \cdot (2K_{n+1} + T_n - \hat{T}_n) - \hat{K}_n}{3} = 2 \cdot \frac{2K_{n+1} + T_n}{3} - \frac{2\hat{T}_n + \hat{K}_n}{3} \stackrel{(2.13)}{=} 2E_{n+1,1}(K) - \frac{2\hat{T}_n + \hat{K}_n}{3} \Rightarrow \frac{2\hat{T}_n + \hat{K}_n}{3} = 2E_{n+1,1}(K) - E_{n+1,1}(\hat{K})$$

eşitliklerinden **Ole Amble**'in yaklaşıklıkları için (2.24)'teki gibi şu Snell bağıntısını elde ederiz:

$$(2.14) \quad \underbrace{2E_{n+1,1}(K)}_{+O(h_n^4)} - \underbrace{E_{n+1,1}(\hat{K})}_{+O(h_n^4)} = \frac{2\hat{T}_n + \hat{K}_n}{3}.$$

Bu, (2.13)'tekinden daha iyi yakınsama yapar. Fakat bu bağıntıyı sakın (2.24)'tekiyle karıştırmayın; çünkü bu bağıntıda kullanılan yaklaşıklıkların yakınsaklıkları farklıdır. Yani (2.24)'teki **Romberg**'in K_n ve T_n yaklaşıklıkları $O(h_n^2)$ mertebesinde yakınsarken **Ole Amble**'in $\hat{K}_n$ ve $\hat{T}_n$ yaklaşıklıkları $O(h_n^4)$ mertebesinde yakınsar, dolayısıyla **Romberg**'in yaklaşıklıkları **Ole Amble**'in yaklaşıklıklarından 1 mertebe geride kalır. İşte **Romberg** bu yüzden **turuncu tablonun** 2. sütununda (2.4)'ten dolayı $E_{n+1,1}(\hat{K})$ ve $E_{n+1,1}(\hat{T})$ 'yi kullanamadı; $E_{n+1,2}(\hat{K})$ ve $E_{n+1,2}(\hat{T})$ ya da daha doğru bir deyişle $F_{n+1,1}(\hat{K})$ ve $F_{n+1,1}(\hat{T})$ 'yi kullandı! (Bkz. "[4.1. Ole Amble Algoritması](#)") adlı makalemdeki Tablo 4.1-4.4'e)

Şu halde bu sonuca göre (2.14)'ün sol tarafındaki ilk terimde (2.50)'de $k = 1$ için $O(h_n^4)$ sonucunun ve ikinci terimde ise (2.4) nedeniyle boşa döndüğünden aynı sonucun mevcut olduklarını biliyoruz. O zaman eşitliğin sağ tarafı da, dolayısıyla bu ağırlığa katılan $\hat{K}_n$ ve $\hat{T}_n$ yaklaşıklıkları da aynı sonucu yani yakınsamayı gerçeklerler!

Şimdi bundan sonraki **Romberg** ile **Ole Amble**'in yaklaşıklıkları arasındaki ilişkiler için ilk kez "[K_n ve T_n İçin İndirgeme Bağıntıları](#)" adlı makalemin [EK 1](#)'inde geçen "[Tablolardaki Elemanlar Arasındaki İlişkiler](#)" bölümündeki sonuçları genelleştirdiğim aşağıdaki teoreme bakacağız. Bunu yapmamın nedeni, oradaki tüm ekstrapolasyonları E ile tanımlamış, dolayısıyla buradaki (2.9)'daki E ve (2.11)'deki F ile tanımladığım ekstrapolasyonları orada söylemediğim için bir karışıklık söz konusu olmuştur. Daha doğrusu anlayan için bir sorun yok ama konunun uzağında kalanlar karıştırabilir. İşte buradaki amacım, karışık gibi görünen o ayrımı burada kesinleştirmek ve böylece "[Tablolardaki Elemanlar Arasındaki İlişkiler](#)" bölümündeki sonuçların doğru olduklarını bir kez daha teyit etmekten başka bir şey değildir.

Teorem 2.1. $\forall n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}^+$ için **Romberg**'in K_n ve T_n yaklaşıklıkları ile **Ole Amble**'in $\hat{K}_n$ ve $\hat{T}_n$ yaklaşıklıkları için (ki burada A, (2.2)'deki Ole Amble yaklaşıklıklıdır)

$$(2.15) \quad \begin{cases} \frac{4^{k+1} - 1}{3} F_{n+1,k}(\hat{K}) - \frac{4^{k+1} - 4}{3} F_{n+1,k-1}(\hat{K}) = E_{n+1,k}(K) + E_{n+1,k}(A), \\ \frac{4^{k+1} - 1}{3} F_{n,k}(\hat{T}) - \frac{4^{k+1} - 4}{3} F_{n,k-1}(\hat{T}) = E_{n,k}(T) - 2E_{n+1,k}(A) \end{cases}$$

eşitlikleri geçerli olmak üzere **Romberg** ile **Ole Amble**'in tablolarındaki elemanları arasında şu bağıntı mevcuttur:

$$(2.16) \quad 2 \left(\frac{4^{k+1} - 1}{3} F_{n+1,k}(\hat{K}) - \frac{4^{k+1} - 4}{3} F_{n+1,k-1}(\hat{K}) \right) + \frac{4^{k+1} - 1}{3} F_{n,k}(\hat{T}) - \frac{4^{k+1} - 4}{3} F_{n,k-1}(\hat{T}) = 2E_{n+1,k}(K) + E_{n,k}(T).$$

Fakat bu son eşitlikteki her 2 taraftaki ifadelerin, özellikle sağ taraftaki ifadenin (bkz. (2.30)'daki parantez içindeki ifadeye), birer Snell bağıntısı olduklarına ve

$$(2.17) \quad E_{n+1,k}(A) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

sonucuna dikkat ediniz. Çünkü bu limit (2.15)'e göre (2.16)'daki ekstrapolasyonik yaklaşıklıkların karşılıklı olarak birbirlerine hemen hemen eşit olduklarını gösterir!

İspat. Öncelikle $F_{n+1,1}(\hat{K})$ ve $F_{n,1}(\hat{T})$ ifadelerini (2.11)'e göre açarsak,

$$\begin{aligned} F_{n+1,1}(\hat{K}) &= \frac{4^2 F_{n+1,0}(\hat{K}) - F_{n,0}(\hat{K})}{4^2 - 1} = \frac{4^2 \hat{K}_{n+1} - \hat{K}_n}{4^2 - 1} = \frac{4^2 (K_{n+1} + A_{n+1}) - (K_n + A_n)}{4^2 - 1} = \frac{4^2 K_{n+1} - K_n}{4^2 - 1} + \frac{4^2 A_{n+1} - A_n}{4^2 - 1} = \frac{4K_{n+1} + \frac{4K_{n+1} - K_n}{3}}{5} + \frac{4A_{n+1} + \frac{4A_{n+1} - A_n}{3}}{5} \\ &= \frac{4K_{n+1} + E_{n+1,1}(K)}{5} + \frac{4A_{n+1} + E_{n+1,1}(A)}{5} = \frac{E_{n+1,1}(K) + E_{n+1,1}(A)}{5} + 4 \cdot \frac{K_{n+1} + A_{n+1}}{5} = \frac{E_{n+1,1}(K) + E_{n+1,1}(A)}{5} + 4 \cdot \frac{\hat{K}_{n+1}}{5} = \frac{E_{n+1,1}(K) + E_{n+1,1}(A) + 4F_{n+1,0}(\hat{K})}{5} \\ &\Rightarrow 5F_{n+1,1}(\hat{K}) - 4F_{n+1,0}(\hat{K}) = E_{n+1,1}(K) + E_{n+1,1}(A) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} F_{n,1}(\hat{T}) &= \frac{4^2 F_{n,0}(\hat{T}) - F_{n-1,0}(\hat{T})}{4^2 - 1} = \frac{4^2 \hat{T}_n - \hat{T}_{n-1}}{4^2 - 1} = \frac{4^2 (T_n - 2A_{n+1}) - (T_{n-1} - 2A_n)}{4^2 - 1} = \frac{4^2 T_n - T_{n-1}}{4^2 - 1} - 2 \cdot \frac{4^2 A_{n+1} - A_n}{4^2 - 1} = \frac{4T_n + \frac{4T_n - T_{n-1}}{3}}{5} - 2 \cdot \frac{4A_{n+1} + \frac{4A_{n+1} - A_n}{3}}{5} \\ &= \frac{4T_n + E_{n,1}(T)}{5} - 2 \cdot \frac{4A_{n+1} + E_{n+1,1}(A)}{5} = \frac{E_{n,1}(T) - 2E_{n+1,1}(A)}{5} + 4 \cdot \frac{T_n - 2A_{n+1}}{5} = \frac{E_{n,1}(T) - 2E_{n+1,1}(A)}{5} + 4 \cdot \frac{\hat{T}_n}{5} = \frac{E_{n,1}(T) - 2E_{n+1,1}(A) + 4F_{n,0}(\hat{T})}{5} \\ &\Rightarrow 5F_{n,1}(\hat{T}) - 4F_{n,0}(\hat{T}) = E_{n,1}(T) - 2E_{n+1,1}(A) \end{aligned}$$

sonuçları geçerli olduğundan

$$(2.18) \quad \begin{cases} 5F_{n+1,1}(\hat{K}) - 4F_{n+1,0}(\hat{K}) = E_{n+1,1}(K) + E_{n+1,1}(A), \\ 5F_{n,1}(\hat{T}) - 4F_{n,0}(\hat{T}) = E_{n,1}(T) - 2E_{n+1,1}(A) \end{cases}$$

bağıntılarını elde ederiz. Bu, $k = 1$ için (2.15)'i doğrular!

O halde bu eşitliklerden ilkinin her 2 tarafının 2 katını alıp ikincisiyle taraf tarafa toplarsak,

$$(2.19) \quad 2 \left(5F_{n+1,1}(\hat{K}) - 4F_{n+1,0}(\hat{K}) \right) + 5F_{n,1}(\hat{T}) - 4F_{n,0}(\hat{T}) = 2E_{n+1,1}(K) + E_{n,1}(T)$$

şeklinde (2.16)'yı $k = 1$ için doğrulamış oluruz. Bunu adı geçen bölümde (1.84)'de vermiştik!

Diğer taraftan, yine aynı işlemi yaparsak yani (2.18)'deki ilk eşitliğin her 2 yanının 2 katını alıp ikincisiyle taraf tarafa toplarsak,

$$\begin{aligned} 2F_{n+1,1}(\hat{K}) + F_{n,1}(\hat{T}) &= 2 \cdot \frac{E_{n+1,1}(K) + E_{n+1,1}(A) + 4\hat{K}_{n+1}}{5} + \frac{E_{n,1}(T) - 2E_{n+1,1}(A) + 4\hat{T}_n}{5} = \frac{2E_{n+1,1}(K) + E_{n,1}(T)}{5} + 4 \cdot \frac{2\hat{K}_{n+1} + \hat{T}_n}{5} \\ &= \frac{2E_{n+1,1}(K) + E_{n,1}(T)}{5} + 4 \cdot \frac{2(K_{n+1} + A_{n+1}) + T_n - 2A_{n+1}}{5} = \frac{2E_{n+1,1}(K) + E_{n,1}(T)}{5} + 4 \cdot \frac{2K_{n+1} + 2A_{n+1} + T_n - 2A_{n+1}}{5} \\ &= \frac{2E_{n+1,1}(K) + E_{n,1}(T)}{5} + 4 \cdot \frac{2K_{n+1} + T_n}{5} = \frac{2E_{n+1,1}(K) + E_{n,1}(T)}{5} + 4 \cdot \frac{2E_{n+1,0}(K) + E_{n,0}(T)}{5} = \sum_{i=0}^1 4^i \frac{2E_{n+1,1-i}(K) + E_{n,1-i}(T)}{5} \end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$(2.20) \quad 2F_{n+1,1}(\hat{K}) + F_{n,1}(\hat{T}) = \sum_{i=0}^1 4^i \frac{2E_{n+1,1-i}(K) + E_{n,1-i}(T)}{5}$$

şeklinde bir ikinci sonuç elde ederiz.

İkinci olarak bu sefer $F_{n+1,2}(\hat{K})$ ve $F_{n,2}(\hat{T})$ ifadelerini (2.11)'e göre açarsak,

$$\begin{aligned} F_{n+1,2}(\hat{K}) &= \frac{4^3 F_{n+1,1}(\hat{K}) - F_{n,1}(\hat{K})}{4^3 - 1} = \frac{4^3 \cdot \frac{4^2(K_{n+1} + A_{n+1}) - (K_n + A_n)}{4^2 - 1} - \frac{4^2(K_n + A_n) - (K_{n-1} + A_{n-1})}{4^2 - 1}}{4^3 - 1} \\ &= \frac{4^3 \cdot \frac{4^2 K_{n+1} - K_n}{4^2 - 1} + 4^3 \cdot \frac{4^2 A_{n+1} - A_n}{4^2 - 1} - \frac{4^2 K_n - K_{n-1}}{4^2 - 1} - \frac{4^2 A_n - A_{n-1}}{4^2 - 1}}{4^3 - 1} \\ &= \frac{4^3 \cdot \left(\frac{4}{5} K_{n+1} + \frac{\frac{4K_{n+1} - K_n}{3}}{5} \right) + 4^3 \cdot \left(\frac{4}{5} A_{n+1} + \frac{\frac{4A_{n+1} - A_n}{3}}{5} \right) - \left(\frac{4}{5} K_n + \frac{\frac{4K_n - K_{n-1}}{3}}{5} \right) - \left(\frac{4}{5} A_n + \frac{\frac{4A_n - A_{n-1}}{3}}{5} \right)}{4^3 - 1} \\ &= \frac{4^3 \cdot \left(\frac{4}{5} K_{n+1} + \frac{E_{n+1,1}(K)}{5} \right) + 4^3 \cdot \left(\frac{4}{5} A_{n+1} + \frac{E_{n+1,1}(A)}{5} \right) - \left(\frac{4}{5} K_n + \frac{E_{n,1}(K)}{5} \right) - \left(\frac{4}{5} A_n + \frac{E_{n,1}(A)}{5} \right)}{4^3 - 1} \\ &= \frac{\frac{4^3 E_{n+1,1}(K) - E_{n,1}(K)}{5} + \frac{4^3 E_{n+1,1}(A) - E_{n,1}(A)}{5} + \frac{4}{5} (4^3 K_{n+1} - K_n) + \frac{4}{5} (4^3 A_{n+1} - A_n)}{4^3 - 1} \\ &= \frac{\left(\frac{16}{5} E_{n+1,1}(K) + \frac{4^2 E_{n+1,1}(K) - E_{n,1}(K)}{4^2 - 1} \right) + \left(\frac{16}{5} E_{n+1,1}(A) + \frac{4^2 E_{n+1,1}(A) - E_{n,1}(A)}{4^2 - 1} \right) + \frac{4}{5} (20K_{n+1} + \frac{4K_{n+1} - K_n}{3}) + \frac{4}{5} (20A_{n+1} + \frac{4A_{n+1} - A_n}{3})}{21} \\ &= \frac{\left(\frac{16}{5} E_{n+1,1}(K) + E_{n+1,2}(K) \right) + \left(\frac{16}{5} E_{n+1,1}(A) + E_{n+1,2}(A) \right) + \frac{4}{5} (20K_{n+1} + E_{n+1,1}(K)) + \frac{4}{5} (20A_{n+1} + E_{n+1,1}(A))}{21} \\ &= \frac{E_{n+1,2}(K) + E_{n+1,2}(A) + 16K_{n+1} + 4E_{n+1,1}(K) + 16A_{n+1} + 4E_{n+1,1}(A)}{21} = \frac{E_{n+1,2}(K) + E_{n+1,2}(A) + 4E_{n+1,1}(K) + 4E_{n+1,1}(A) + 16\hat{K}_{n+1}}{21} \\ &= \frac{E_{n+1,2}(K) + E_{n+1,2}(A) + 4.5F_{n+1,1}(\hat{K})}{21} = \frac{E_{n+1,2}(K) + E_{n+1,2}(A) + 20F_{n+1,1}(\hat{K})}{21} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} F_{n,2}(\hat{T}) &= \frac{4^3 F_{n,1}(\hat{T}) - F_{n-1,1}(\hat{T})}{4^3 - 1} = \frac{4^3 \cdot \frac{4^2(T_n - 2A_{n+1}) - (T_{n-1} - 2A_n)}{4^2 - 1} - \frac{4^2(T_{n-1} - 2A_n) - (T_{n-2} - 2A_{n-1})}{4^2 - 1}}{4^3 - 1} \\ &= \frac{4^3 \cdot \frac{4^2 T_n - T_{n-1}}{4^2 - 1} - 2 \cdot 4^3 \cdot \frac{4^2 A_{n+1} - A_n}{4^2 - 1} - \frac{4^2 T_{n-1} - T_{n-2}}{4^2 - 1} + 2 \cdot \frac{4^2 A_n - A_{n-1}}{4^2 - 1}}{4^3 - 1} \\ &= \frac{4^3 \cdot \left(\frac{4}{5} T_n + \frac{\frac{4T_n - T_{n-1}}{3}}{5} \right) - 2 \cdot 4^3 \cdot \left(\frac{4}{5} A_{n+1} + \frac{\frac{4A_{n+1} - A_n}{3}}{5} \right) - \left(\frac{4}{5} T_{n-1} + \frac{\frac{4T_{n-1} - T_{n-2}}{3}}{5} \right) + 2 \cdot \left(\frac{4}{5} A_n + \frac{\frac{4A_n - A_{n-1}}{3}}{5} \right)}{4^3 - 1} \\ &= \frac{4^3 \cdot \left(\frac{4}{5} T_n + \frac{E_{n,1}(T)}{5} \right) - 2 \cdot 4^3 \cdot \left(\frac{4}{5} A_{n+1} + \frac{E_{n+1,1}(A)}{5} \right) - \left(\frac{4}{5} T_{n-1} + \frac{E_{n-1,1}(T)}{5} \right) + 2 \cdot \left(\frac{4}{5} A_n + \frac{E_{n,1}(A)}{5} \right)}{4^3 - 1} \\ &= \frac{\frac{4^3 E_{n,1}(T) - E_{n-1,1}(T)}{5} - 2 \cdot \frac{4^3 E_{n+1,1}(A) - E_{n,1}(A)}{5} + \frac{4}{5} (4^3 T_n - T_{n-1}) - 2 \cdot \frac{4}{5} (4^3 A_{n+1} - A_n)}{4^3 - 1} \\ &= \frac{\left(\frac{16}{5} E_{n,1}(T) + \frac{4^2 E_{n,1}(T) - E_{n-1,1}(T)}{4^2 - 1} \right) - 2 \cdot \left(\frac{16}{5} E_{n+1,1}(A) + \frac{4^2 E_{n+1,1}(A) - E_{n,1}(A)}{4^2 - 1} \right) + \frac{4}{5} (20T_n + \frac{4T_n - T_{n-1}}{3}) - \frac{8}{5} (20A_{n+1} + \frac{4A_{n+1} - A_n}{3})}{21} \\ &= \frac{\left(\frac{16}{5} E_{n,1}(T) + E_{n,2}(T) \right) - 2 \cdot \left(\frac{16}{5} E_{n+1,1}(A) + E_{n+1,2}(A) \right) + \frac{4}{5} (20T_n + E_{n,1}(T)) - \frac{8}{5} (20A_{n+1} + E_{n+1,1}(A))}{21} \\ &= \frac{E_{n,2}(T) - 2E_{n+1,2}(A) + 16T_n + 4E_{n,1}(T) - 32A_{n+1} - 8E_{n+1,1}(A)}{21} = \frac{E_{n,2}(T) - 2E_{n+1,2}(A) + 4E_{n,1}(T) - 8E_{n+1,1}(A) + 16\hat{T}_n}{21} \\ &= \frac{E_{n,2}(T) - 2E_{n+1,2}(A) + 4.5F_{n,1}(\hat{T})}{21} = \frac{E_{n,2}(T) - 2E_{n+1,2}(A) + 20F_{n,1}(\hat{T})}{21} \end{aligned}$$

bağıntılarını elde ederiz ki bu da, $k = 2$ için (2.15)'i doğrular:

$$(2.21) \quad \begin{cases} 21F_{n+1,2}(\hat{K}) - 20F_{n+1,1}(\hat{K}) = E_{n+1,2}(K) + E_{n+1,2}(A), \\ 21F_{n,2}(\hat{T}) - 20F_{n,1}(\hat{T}) = E_{n,2}(T) - 2E_{n+1,2}(A) \end{cases}$$

O halde bu eşitliklerde yine ilkinin her 2 tarafının 2 katını alıp ikincisiyle taraf tarafa toplarsak (2.16)'yı $k = 2$ için doğrulamış oluruz ki, bunu da (1.88)'de vermiştik:

$$(2.22) \quad 2 \left(21F_{n+1,2}(\hat{K}) - 20F_{n+1,1}(\hat{K}) \right) + 21F_{n,2}(\hat{T}) - 20F_{n,1}(\hat{T}) = 2E_{n+1,2}(K) + E_{n,2}(T)$$

Fakat diğer taraftan, (2.21)'deki ilk eşitliğin her 2 yanının 2 katını alıp ikincisiyle taraf tarafa toplarsak,

$$\begin{aligned} 2F_{n+1,2}(\hat{K}) + F_{n,2}(\hat{T}) &= 2 \cdot \frac{E_{n+1,2}(K) + E_{n+1,2}(A) + 20F_{n+1,1}(\hat{K})}{21} + \frac{E_{n,2}(T) - 2E_{n+1,2}(A) + 20F_{n,1}(\hat{T})}{21} = \frac{2E_{n+1,2}(K) + E_{n,2}(T)}{21} + 20 \cdot \frac{2F_{n+1,1}(\hat{K}) + F_{n,1}(\hat{T})}{21} \\ &= \frac{2E_{n+1,2}(K) + E_{n,2}(T)}{21} + 20 \cdot \frac{2 \cdot \frac{E_{n+1,1}(K) + E_{n+1,1}(A) + 4F_{n+1,0}(\hat{K})}{5} + \frac{E_{n,1}(T) - 2E_{n+1,1}(A) + 4F_{n,0}(\hat{T})}{5}}{21} = \frac{2E_{n+1,2}(K) + E_{n,2}(T)}{21} + 4 \cdot \frac{2E_{n+1,1}(K) + E_{n,1}(T)}{21} \\ &+ 16 \cdot \frac{2F_{n+1,0}(\hat{K}) + F_{n,0}(\hat{T})}{21} = \frac{2E_{n+1,2}(K) + E_{n,2}(T)}{21} + 4 \cdot \frac{2E_{n+1,1}(K) + E_{n,1}(T)}{21} + 16 \cdot \frac{2(K_{n+1} + A_{n+1}) + T_n - 2A_{n+1}}{21} = \frac{2E_{n+1,2}(K) + E_{n,2}(T)}{21} + 4 \cdot \frac{2E_{n+1,1}(K) + E_{n,1}(T)}{21} \\ &+ 16 \cdot \frac{2K_{n+1} + T_n}{21} = \frac{2E_{n+1,2}(K) + E_{n,2}(T)}{21} + 4 \cdot \frac{2E_{n+1,1}(K) + E_{n,1}(T)}{21} + 16 \cdot \frac{2E_{n+1,0}(K) + E_{n,0}(T)}{21} = \sum_{i=0}^2 4^i \frac{2E_{n+1,2-i}(K) + E_{n,2-i}(T)}{21} \end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$(2.23) \quad 2F_{n+1,2}(\hat{K}) + F_{n,2}(\hat{T}) = \sum_{i=0}^2 4^i \frac{2E_{n+1,2-i}(K) + E_{n,2-i}(T)}{21}$$

sonucunu elde ederiz.

Özetle, diğer k değerleri için işleme bu şekilde devam edip diğer sonuçları da benzer şekilde bulabiliriz. Fakat MEM gereğince buna gerek yok, çünkü (2.20) ve (2.23)'ten hareketle

$$(2.24) \quad \begin{cases} 2F_{n+1,1}(\hat{K}) + F_{n,1}(\hat{T}) = \sum_{i=0}^1 4^i \frac{2E_{n+1,1-i}(K) + E_{n,1-i}(T)}{\frac{4^{1+1} - 1}{3}}, \\ 2F_{n+1,2}(\hat{K}) + F_{n,2}(\hat{T}) = \sum_{i=0}^2 4^i \frac{2E_{n+1,2-i}(K) + E_{n,2-i}(T)}{\frac{4^{2+1} - 1}{3}}, \\ \vdots \\ 2F_{n+1,k}(\hat{K}) + F_{n,k}(\hat{T}) = \sum_{i=0}^k 4^i \frac{2E_{n+1,k-i}(K) + E_{n,k-i}(T)}{\frac{4^{k+1} - 1}{3}} \end{cases}$$

eşitliklerinden görüldüğü üzere şu genel sonucu verebiliriz:

$$(2.25) \quad \frac{4^{k+1} - 1}{3} (2F_{n+1,k}(\hat{K}) + F_{n,k}(\hat{T})) = \sum_{i=0}^k 4^i (2E_{n+1,k-i}(K) + E_{n,k-i}(T)).$$

İşte bu eşitliğin sağ tarafındaki toplamdan hareket edersek,

$$\begin{aligned} \frac{4^{k+1} - 1}{3} (2F_{n+1,k}(\hat{K}) + F_{n,k}(\hat{T})) &= \sum_{i=0}^k 4^i (2E_{n+1,k-i}(K) + E_{n,k-i}(T)) = 2E_{n+1,k}(K) + E_{n,k}(T) + \sum_{i=1}^k 4^i (2E_{n+1,k-i}(K) + E_{n,k-i}(T)) \\ &= 2E_{n+1,k}(K) + E_{n,k}(T) + \sum_{i=0}^{k-1} 4^{i+1} (2E_{n+1,k-1-i}(K) + E_{n,k-1-i}(T)) = 2E_{n+1,k}(K) + E_{n,k}(T) + 4 \sum_{i=0}^{k-1} 4^i (2E_{n+1,k-1-i}(K) + E_{n,k-1-i}(T)) \\ &\stackrel{(2.25)}{=} 2E_{n+1,k}(K) + E_{n,k}(T) + 4 \cdot \frac{4^k - 1}{3} (2F_{n+1,k-1}(\hat{K}) + F_{n,k-1}(\hat{T})) = 2E_{n+1,k}(K) + E_{n,k}(T) + \frac{4^{k+1} - 4}{3} (2F_{n+1,k-1}(\hat{K}) + F_{n,k-1}(\hat{T})) \end{aligned}$$

eşitliklerine göre teoremdaki (2.16)'yı şu şekilde elde etmiş oluruz:

$$(2.26) \quad 2 \left(\frac{4^{k+1} - 1}{3} F_{n+1,k}(\hat{K}) - \frac{4^{k+1} - 4}{3} F_{n+1,k-1}(\hat{K}) \right) + \frac{4^{k+1} - 1}{3} F_{n,k}(\hat{T}) - \frac{4^{k+1} - 4}{3} F_{n,k-1}(\hat{T}) = 2E_{n+1,k}(K) + E_{n,k}(T).$$

Şu halde bu sonuçla (2.18) ve (2.21)'i genel olarak şu şekilde formüle edip teoremdaki (2.15)'i şu şekilde verebiliriz artık:

$$(2.27) \quad \begin{cases} \frac{4^{k+1} - 1}{3} F_{n+1,k}(\hat{K}) - \frac{4^{k+1} - 4}{3} F_{n+1,k-1}(\hat{K}) = E_{n+1,k}(K) + E_{n+1,k}(A), \\ \frac{4^{k+1} - 1}{3} F_{n,k}(\hat{T}) - \frac{4^{k+1} - 4}{3} F_{n,k-1}(\hat{T}) = E_{n,k}(T) - 2E_{n+1,k}(A). \end{cases}$$

Teorem 2.2 (2. Snell Bağıntısı). $\forall k, n \in \mathbb{N}$ için *Ole Amble*'in yaklaşıklıklarına göre 2. Snell bağıntısı şu şekilde mevcuttur:

$$(2.28) \quad E_{n+1,k+1}(K) = \frac{2F_{n+1,k}(\hat{K}) + F_{n,k}(\hat{T})}{3}.$$

Romberg'in Örneğinden Ole Amble'in Algoritmasının Genelleştirilmesine Doğru

Bunu [RİK 1](#)'den beri veriyorum ve en son [RİK 4](#)'te [\(2.30\)](#)'daki parantez içinde verdim. Fakat bu bağıntı oralarda İ'ya yakınsayan fantezi bir yaklaşıklık iken burada tam bir hüviyete kavuşmuştur!

İspat. Öncelikle (2.12)'deki eşitliğin her 2 yanını 3'e bölersek,

$$E_{n+1,1}(K) \stackrel{(2.9)}{=} \frac{4E_{n+1,0}(K) - E_{n,0}(K)}{3} = \frac{4K_{n+1} - K_n}{3} = \frac{4K_{n+1} - (2K_{n+1} - T_n)}{3} = \frac{2K_{n+1} + T_n}{3} \stackrel{(2.12)}{=} \frac{2\hat{K}_{n+1} + \hat{T}_n}{3} = \frac{2F_{n+1,0}(\hat{K}) + F_{n,0}(\hat{T})}{3}$$

eşitliklerinden

$$(2.29) \quad E_{n+1,1}(K) = \frac{2F_{n+1,0}(\hat{K}) + F_{n,0}(\hat{T})}{3}$$

sonucunu elde ederiz.

İkinci olarak eğer $E_{n+1,2}(K)$ ifadesini açarsak,

$$E_{n+1,2}(K) \stackrel{(2.9)}{=} \frac{4^2 E_{n+1,1}(K) - E_{n,1}(K)}{4^2 - 1} \stackrel{(2.29)}{=} \frac{16 \cdot \frac{2\hat{K}_{n+1} + \hat{T}_n}{3} - \frac{2\hat{K}_n + \hat{T}_{n-1}}{3}}{15} = 2 \cdot \frac{\frac{16\hat{K}_{n+1} - \hat{K}_n}{15}}{3} + \frac{\frac{16\hat{T}_n - \hat{T}_{n-1}}{15}}{3} = \frac{2F_{n+1,1}(\hat{K}) + F_{n,1}(\hat{T})}{3}$$

eşitliklerinden

$$(2.30) \quad E_{n+1,2}(K) = \frac{2F_{n+1,1}(\hat{K}) + F_{n,1}(\hat{T})}{3}$$

sonucunun geçerli olduğunu görürüz.

Üçüncü olarak yine $E_{n+1,3}(K)$ ifadesini açarsak,

$$E_{n+1,3}(K) \stackrel{(2.9)}{=} \frac{4^3 E_{n+1,2}(K) - E_{n,2}(K)}{4^3 - 1} = \frac{4^3 \cdot \frac{2F_{n+1,1}(\hat{K}) + F_{n,1}(\hat{T})}{3} - \frac{2F_{n,1}(\hat{K}) + F_{n-1,1}(\hat{T})}{3}}{4^3 - 1} = 2 \cdot \frac{\frac{4^3 F_{n+1,1}(\hat{K}) - F_{n,1}(\hat{K})}{4^3 - 1}}{3} + \frac{\frac{4^3 F_{n,1}(\hat{T}) - F_{n-1,1}(\hat{T})}{4^3 - 1}}{3} = \frac{2F_{n+1,2}(\hat{K}) + F_{n,2}(\hat{T})}{3}$$

eşitliklerine göre

$$(2.31) \quad E_{n+1,3}(K) = \frac{2F_{n+1,2}(\hat{K}) + F_{n,2}(\hat{T})}{3}$$

sonucu geçerli olur.

Şu halde bu işlemi diğer k'ler için aynı şekilde yaparsak (2.29), (2.30) ve (2.31)'den görüldüğü üzere MEM gereğince teoremdaki sonucun çıktığını görürüz:

$$(2.32) \quad E_{n+1,k+1}(K) = \frac{2F_{n+1,k}(\hat{K}) + F_{n,k}(\hat{T})}{3}.$$

Sonuç 2.1. Burada Teorem 2.1'deki sonuçları Teorem 2.2 ile birlikte daha da kısaltabilir ve yeni sonuçlara erişebiliriz. Bu yeni sonuçlarla birlikte Teorem 2.1'deki her bir sonucu ispatıyla açıklayayım ki kafalarda herhangi bir kuşku kalmasın!

Buna göre ilkin (2.15)'ten

$$\begin{aligned} E_{n+1,k}(K) + E_{n+1,k}(A) &\stackrel{(2.15)}{=} \frac{4^{k+1} - 1}{3} F_{n+1,k}(\hat{K}) - \frac{4^{k+1} - 4}{3} F_{n+1,k-1}(\hat{K}) \stackrel{(2.11)}{=} \frac{4^{k+1} - 1}{3} \cdot \frac{4^{k+1} F_{n+1,k-1}(\hat{K}) - F_{n,k-1}(\hat{K})}{4^{k+1} - 1} - \frac{4^{k+1} - 4}{3} F_{n+1,k-1}(\hat{K}) \\ &= \frac{4^{k+1} F_{n+1,k-1}(\hat{K}) - F_{n,k-1}(\hat{K}) - (4^{k+1} - 4) F_{n+1,k-1}(\hat{K})}{3} = \frac{4F_{n+1,k-1}(\hat{K}) - F_{n,k-1}(\hat{K})}{3}, \\ E_{n,k}(T) - 2E_{n+1,k}(A) &\stackrel{(2.15)}{=} \frac{4^{k+1} - 1}{3} F_{n,k}(\hat{T}) - \frac{4^{k+1} - 4}{3} F_{n,k-1}(\hat{T}) \stackrel{(2.11)}{=} \frac{4^{k+1} - 1}{3} \cdot \frac{4^{k+1} F_{n,k-1}(\hat{T}) - F_{n-1,k-1}(\hat{T})}{4^{k+1} - 1} - \frac{4^{k+1} - 4}{3} F_{n,k-1}(\hat{T}) \\ &= \frac{4^{k+1} F_{n,k-1}(\hat{T}) - F_{n-1,k-1}(\hat{T}) - (4^{k+1} - 4) F_{n,k-1}(\hat{T})}{3} = \frac{4F_{n,k-1}(\hat{T}) - F_{n-1,k-1}(\hat{T})}{3} \end{aligned}$$

eşitliklerine göre şu bağıntılar geçerli olur:

$$(2.33) \quad \begin{cases} \frac{4F_{n+1,k-1}(\hat{K}) - F_{n,k-1}(\hat{K})}{3} = E_{n+1,k}(K) + E_{n+1,k}(A), \\ \frac{4F_{n,k-1}(\hat{T}) - F_{n-1,k-1}(\hat{T})}{3} = E_{n,k}(T) - 2E_{n+1,k}(A). \end{cases}$$

Bu durumda bu son eşitlikte ilkinin her iki tarafının 2 katını alıp ikincisiyle taraf tarafa toplarsak (2.16) şu hale dönüşür:

$$(2.34) \quad 2 \cdot \frac{4F_{n+1,k-1}(\hat{K}) - F_{n,k-1}(\hat{K})}{3} + \frac{4F_{n,k-1}(\hat{T}) - F_{n-1,k-1}(\hat{T})}{3} = 2E_{n+1,k}(K) + E_{n,k}(T).$$

Peki bu doğru mu?

Kesinlikle öyledir çünkü,

$$\begin{aligned}
 2E_{n+1,k}(K) + E_{n,k}(T) &\stackrel{(2.34)}{=} 2 \cdot \frac{4F_{n+1,k-1}(\hat{K}) - F_{n,k-1}(\hat{K})}{3} + \frac{4F_{n,k-1}(\hat{T}) - F_{n-1,k-1}(\hat{T})}{3} \\
 2E_{n+1,k}(K) + E_{n,k}(T) &= 4 \cdot \frac{2F_{n+1,k-1}(\hat{K}) + F_{n,k-1}(\hat{T})}{3} - \frac{2F_{n,k-1}(\hat{K}) + F_{n-1,k-1}(\hat{T})}{3} \\
 2E_{n+1,k}(K) + E_{n,k}(T) &\stackrel{(2.28)}{=} 4E_{n+1,k}(K) - E_{n,k}(K) \\
 E_{n,k}(K) + E_{n,k}(T) &= 2E_{n+1,k}(K) \\
 E_{n+1,k}(K) &= \frac{E_{n,k}(K) + E_{n,k}(T)}{2}
 \end{aligned}$$

işleminin sonucu (2.7)'yi verir!

Eğer benzer şekilde (2.16)'yı ispatlamak istersek,

$$\begin{aligned}
 &2 \left(\frac{4^{k+1} - 1}{3} F_{n+1,k}(\hat{K}) - \frac{4^{k+1} - 4}{3} F_{n+1,k-1}(\hat{K}) \right) + \frac{4^{k+1} - 1}{3} F_{n,k}(\hat{T}) - \frac{4^{k+1} - 4}{3} F_{n,k-1}(\hat{T}) = 2E_{n+1,k}(K) + E_{n,k}(T) \\
 &(4^{k+1} - 1) \cdot \frac{2F_{n+1,k}(\hat{K}) + F_{n,k}(\hat{T})}{3} - (4^{k+1} - 4) \cdot \frac{2F_{n+1,k-1}(\hat{K}) + F_{n,k-1}(\hat{T})}{3} = 2E_{n+1,k}(K) + E_{n,k}(T) \\
 &(4^{k+1} - 1)E_{n+1,k+1}(K) - (4^{k+1} - 4)E_{n+1,k}(K) \stackrel{(2.28)}{=} 2E_{n+1,k}(K) + E_{n,k}(T) \\
 &(4^{k+1} - 1) \cdot \frac{4^{k+1}E_{n+1,k}(K) - E_{n,k}(K)}{4^{k+1} - 1} - (4^{k+1} - 4)E_{n+1,k}(K) \stackrel{(2.11)}{=} 2E_{n+1,k}(K) + E_{n,k}(T) \\
 &4E_{n+1,k}(K) - E_{n,k}(K) = 2E_{n+1,k}(K) + E_{n,k}(T) \\
 &2E_{n+1,k}(K) = E_{n,k}(K) + E_{n,k}(T) \\
 &E_{n+1,k}(K) = \frac{E_{n,k}(K) + E_{n,k}(T)}{2}
 \end{aligned}$$

işleminin sonucu yine (2.7)'yi verir!

Burada son olarak (2.15) ya da (2.33)'teki $E_{n+1,k}(A)$ 'yı hesaplayabilmek için $E_{n+1,k+1}(K)$ için (2.7)'yi kullanırsak,

$$\begin{aligned}
 \frac{E_{n,k+1}(K) + E_{n,k+1}(T)}{2} &= E_{n+1,k+1}(K) \stackrel{(2.28)}{=} E_{n+1,k+1}(K) = \frac{2F_{n+1,k}(\hat{K}) + F_{n,k}(\hat{T})}{3} \\
 3 \cdot \frac{2F_{n,k}(\hat{K}) + F_{n-1,k}(\hat{T})}{3} + 3E_{n,k+1}(T) &\stackrel{(2.28)}{=} 3E_{n,k+1}(K) + 3E_{n,k+1}(T) = 4F_{n+1,k}(\hat{K}) + 2F_{n,k}(\hat{T}) \\
 3E_{n,k+1}(T) &= 4F_{n+1,k}(\hat{K}) + 2F_{n,k}(\hat{T}) - 2F_{n,k}(\hat{K}) - F_{n-1,k}(\hat{T}) \\
 E_{n,k+1}(T) &= \frac{4F_{n+1,k}(\hat{K}) + 2F_{n,k}(\hat{T}) - 2F_{n,k}(\hat{K}) - F_{n-1,k}(\hat{T})}{3}
 \end{aligned}$$

eşitliklerine göre

$$(2.35) \quad E_{n,k+1}(T) = \frac{4F_{n+1,k}(\hat{K}) - 2F_{n,k}(\hat{K}) + 2F_{n,k}(\hat{T}) - F_{n-1,k}(\hat{T})}{3}$$

bağıntısının geçerli olduğuna dikkat etmemiz gerekiyor.

Şu halde (2.33)'teki her iki eşitlikten de,

$$\begin{aligned}
 E_{n+1,k}(A) &\stackrel{(2.33)}{=} \frac{4F_{n+1,k-1}(\hat{K}) - F_{n,k-1}(\hat{K})}{3} - E_{n+1,k}(K) \stackrel{(2.28)}{=} \frac{4F_{n+1,k-1}(\hat{K}) - F_{n,k-1}(\hat{K})}{3} - \frac{2F_{n+1,k-1}(\hat{K}) + F_{n,k-1}(\hat{T})}{3} = \frac{2F_{n+1,k-1}(\hat{K}) - F_{n,k-1}(\hat{K}) - F_{n,k-1}(\hat{T})}{3}, \\
 2E_{n+1,k}(A) &\stackrel{(2.33)}{=} E_{n,k}(T) - \frac{4F_{n,k-1}(\hat{T}) - F_{n-1,k-1}(\hat{T})}{3} \stackrel{(2.35)}{=} \frac{4F_{n+1,k-1}(\hat{K}) + 2F_{n,k-1}(\hat{T}) - 2F_{n,k-1}(\hat{K}) - F_{n-1,k-1}(\hat{T})}{3} - \frac{4F_{n,k-1}(\hat{T}) - F_{n-1,k-1}(\hat{T})}{3} \\
 &= \frac{4F_{n+1,k-1}(\hat{K}) - 2F_{n,k-1}(\hat{K}) - 2F_{n,k-1}(\hat{T})}{3}
 \end{aligned}$$

işlemlerinin sonuçlarından görüldüğü üzere $E_{n+1,k}(A)$ için şu bağıntı geçerli olur:

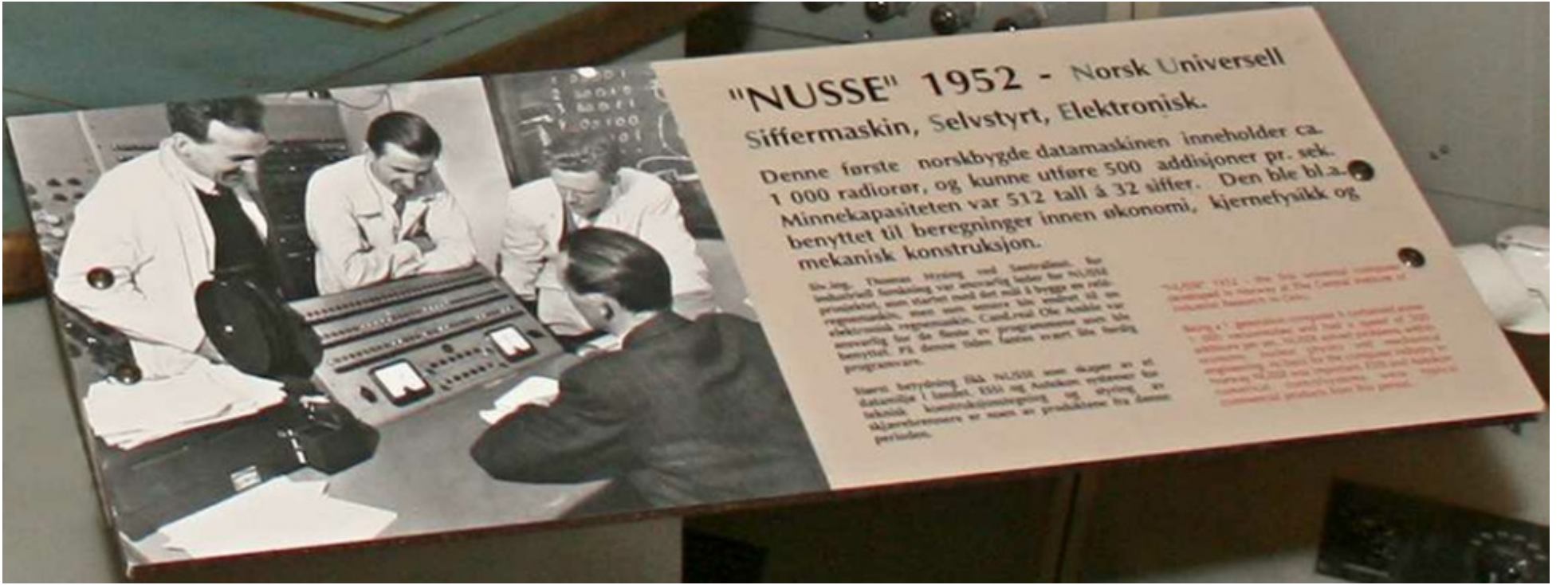
$$(2.36) \quad E_{n+1,k}(A) = \frac{2F_{n+1,k-1}(\hat{K}) - F_{n,k-1}(\hat{K}) - F_{n,k-1}(\hat{T})}{3}.$$

Burada dikkat edilirse pay inanılmaz hızla sıfıra gider, dolayısıyla (2.17)'nin doğru olduğunu görürüz.

Not 2.2. *Ole Amble*'in genelleştirilmiş algoritmasına ilişkin yukarıdaki Teorem 2.1&2.2 ve Sonuç 2.1'deki bağıntıların Mathematica'da nasıl çalıştıklarını “[12. Teorem 2.1&2.2 ve Sonuç 2.1'deki Bağıntıların Mathematica'daki Uygulamaları](#)”nda görebilirsiniz. Bu uygulamalarda örnek olarak **Romberg**'in örneğini seçtim. Çünkü hesaplaması kolay ve yakınsaklığı iyi olup fazla hafıza gerektirmez. İşte bu örnek üzerinde tam 9 bağıntıyı tablolar halinde çalıştırdım ve siz bu bağıntılardaki sol ve sağ taraflarındaki ifadelerle ait tablolardaki aynı elemanları karşılaştırarak elde edilen sonuçların aynı, dolayısıyla bu 9 bağıntının doğru olduklarını görebilirsiniz.

2.4. Ole Amble'in Algoritmasının Diğer Varyantları. Bilindiği gibi *Ole Amble*, Norveç'in ilk bilgisayarı NUSSE'yi 1954'te ilk kez **NİM** adlı oyunun dijital bir varyantıyla çalıştırmış ve o anı ölümsüzleştiren bir fotoğraf çekilmişti. Ben, [Resim 2](#)'de görülen bu siyah-beyaz hatıra fotoğrafını [Resim 1](#)'de mükemmel bir şekilde renklendirdim (Bkz. “[Bir sürpriz de benden olsun: Ole Amble Algoritması](#)”, S. III-V).

Burada söz konusu olan [Resim 2](#)'deki hatıra fotoğrafının sağ tarafında NUSSE için giriş bilgileri şöyle verilir (ki bu bilgileri okuyabilmek için tabii ki [Resim 2](#)'de yer alan hatıra fotoğrafına zoomluyoruz):



Resim 2.5. “NUSSE” 1952 - Norsk Universell Siffermaskin, Selvstyrt, Elektronisk (Norveç Evrensel Sayısal Makinesi, Kendinden Kontrollü, Elektronik).

Denne første norskbygde datamaskinen inneholder ca. 1000 radiorør, og kunne utføre 500 addisjoner pr. sek. Minnekapasiteten var 512 tall å 32 siffer. Den ble bl.a. benyttet til beregninger innen økonomi, kjernefysikk og mekanisk konstruksjon. (Bu ilk Norveç yapımı bilgisayar şunları içerir: 1000 radyo tüpü ve saniyede 500 ekleme yapılabilir. Hafıza kapasitesi: 32 basamaklı 512 sayı. Diğer şeylerin yanı sıra Ekonomi, Nükleer Fizik ve Mekanik İnşaat’taki hesaplamalar için de kullanılır).

İşte yukarıdaki bilgilere göre [Tablo 4.4](#)’ün 1955’te NUSSE ile verilebilir olduğu sonucu çıkmakla birlikte, 01.02.2019, 20:21’de *Ole Amble*’in algoritmasını *Romberg*’in örneği için doğru bir şekilde genelleştirdiğim sonucu çıkar.



Resim 2.6. Knut Hamsun’un 1899 tarihli ve imzalı tek fotoğrafı.

Dün gibi hatırlıyorum. 02.11.2016, 22:54’te başladığım “*Romberg İntegrali Metodu*” hakkındaki tezimi güncelleye güncelleye epey bir birikim yapmış ve “4. Uygulamalar” bölümünde ilk olarak *Romberg*’in tezinde geçen “*Ole Amble’in Metodu*”nu 01.02.2019, 20:21’de yazmışım. Bunda tabii ki *Hamsun*’un belirttiği gibi *Owren*’den gelen bir şevk (*Romberg*’in tezi) de vardı. Ama ben zaten o sırada “Bölüm 4. Uygulamalar”da idim ve her 2 tezi de tarihe karşı duyduğum sorumluluktan dolayı ele almak ve onları günümüze kazandırmak istiyordum. Burada şuna dikkat ediniz: Aslında tezimde ne *Romberg*’in tezine ne de *Ole Amble*’in tezine ihtiyacım yoktu. Çünkü metot olarak zaten en modern yani en son şekli kullanıyordum. Yalnız bu tarihi ve nadide tezleri bir arkeolog gibi eşeleme ve günümüze bir şeyler kazandırma dürtüsüne karşı koyamıyorum. Herhalde piramitlerde çalışırken geçti, bilemiyorum. Ama araştırma tezimi zenginleştiren esas şeylerin bunlar olduğunun gayet farkındayım. Buna göre *Romberg*’in metodunu *Owren*’den tezi almadan önce Bölüm 1’de çözmüştüm zaten (Bkz. “1.6.4.1. *Romberg’in Orijinal Makalesi ve Sonuçları*”, S. 12). Fakat aynı şeyi *Ole Amble*’in metodu için yapmaya kalktığımda, hiç olmazsa *Romberg*’in tezindeki örneğe uygulanmasına ilişkin, yani 30.05.2021, 07:54’te *Owren*’den *Ole Amble*’in “*A set of formulas for numerical integration, Norske Vid. Selsk. Forh. Trondheim, v. 25, 1952, p. 38-41. MR 14, 907*” adlı tezini istediğimde 09:16’da bana gelen yanıt e-postasında sonuç olumsuz oldu (Bkz. “*Saygıdeğer Ekselansları V. HARALD’a Taziye Mesajım*”, S. 16). Ama taziye de belirttiğim üzere bu son tezi kendim için değil *Ole Amble* için istemiştim!

Hamsun, bir keresinde şöyle demişti: “(Alman subayların *Hamsun*’un odasına girip *Sultan Abdülhamit*’in Hamidiye Camii’ne geliş-gidişinin seyir ahengini bozması üzerine) Ekselansları Teşrifat Müdürü bu odayı sadece biz ikimize tahsis etmekle ne kaybederdi ki? Bu asil davranışını hiç hatırmızdan çıkartmaz, biz de ona bir hizmette bulunmaya gayret ederdik. İşte şimdi, Türkiye’nin Avrupa’da iyi dostlar temin etme imkânını ziyan etmiş oldu”, [IV. Bölüm: Sultan’ın Cami Ziyareti](#), S. 54.

METOT Hakkında Birkaç Söz. *Ole Amble* ve *Romberg*’in metotları *W.F. Sheppard*’inkinden daha ilkindir. Yani metotta ileri gidileceğine geri gidilmiştir, çünkü *Sheppard*’ın “*Some quadrature formulas, Proc. London Math. Soc., 32, 1900, pp. 258-277*” adlı tezinin yayın tarihi 14.06.1900, *Ole Amble*’inkinin 1952 ve *Romberg*’inkinin 14.02.1955’tir. Bu arada *Sheppard*’ın metodunun bana 2003’teki “ATA 1 Algoritmaları”nı feci şekilde hatırlattığını söyleyebilirim. Çünkü 2003’teyken bu algoritmaları ben de onun gibi, 262. sayfadaki 4. Madde ve 263. sayfadaki 5. Maddede gösterdiği gibi lineer kombinasyonlar yoluyla buluyordum. Bunlardan kimisi *Sheppard*’inki gibi basit algoritmalar olarak çıkıyordu, kimisi de genel algoritmalar (Bkz. 6. Sayfa, [Son Paragraf](#)). Bunlardan bazılarını [RİK 3](#) ve [RİK 4](#)’te verdim! Özetle, *Sheppard* 2003’teki halim olarak gözükür!

Şimdi *Ole Amble*’in algoritması ve diğer varyantlarına ilişkin teoreme geçebiliriz.

Teorem 2.3 (Ole Amble’in Algoritmasının Diğer Varyantları, 04.07.2021, 05:39:22). *Ole Amble*’in 1952’de (2.4)’te verdiği yaklaşıklıkları $\forall p \in \mathbb{R} - \mathbb{R}^-$ için

$$A_n = \frac{h_n}{24} [(f(a + h_n) - f(a - h_n)) - (f(b + h_n) - f(b - h_n))] \cong \frac{2^p h_n}{24} \left[\left(f\left(a + \frac{h_n}{2^p}\right) - f\left(a - \frac{h_n}{2^p}\right) \right) - \left(f\left(b + \frac{h_n}{2^p}\right) - f\left(b - \frac{h_n}{2^p}\right) \right) \right] \\ = 2^{2p} \cdot \frac{h_{n+p}}{24} [(f(a + h_{n+p}) - f(a - h_{n+p})) - (f(b + h_{n+p}) - f(b - h_{n+p}))] = 2^{2p} A_{n+p}$$

yaklaşımına göre şu şekilde düzeltebilirim:

$$(2.37) \quad \begin{cases} \hat{K}_n = K_n + 2^{2p} A_{n+p} + O(h_n^4), \\ \hat{T}_n = T_n - 2^{2p-1} A_{n+p} + O(h_n^4). \end{cases}$$

Bu formüllerde dikkat ederseniz $\hat{K}_n$ ve $\hat{T}_n$ yaklaşıklıkları Γ ’ya hemen hemen eş yaklaşımlardadırlar. Böylece *Ole Amble*’in yaklaşıklıklarını burada hem genelleştirmiş oldum, hem de Γ ’ya yakınsamalarındaki yakınsaklık bozukluğunu gidererek homojenize etmiş oldum!

Not 2.3. (2.37)’deki en genel haldeki *Ole Amble*’in algoritmasının Mathematica’daki programı için “[13. 2. Tür E-ATA M Algoritması Üzerindeki En Genel Haldeki Ole Amble Algoritması’na Mathematica İle Sembolik Bir Yaklaşım](#)”a bakınız. Bu program yine 3 bölümden oluşur. İlkinde (2.37)’deki yaklaşıklıkları ve bunun altına da A_{n+p} ’nin yukarıdaki elde edilişine ilişkin limit hesabını ve sonuçlarını verdim.

Önce kafamızda herhangi bir kuşku kalmaması için şu limit hesabına bir bakalım. Eğer (2.37)'nin üzerindeki yaklaşımda p sonsuza giderken limit alırsam,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} 2^{2p} A_{n+p} = \lim_{p \rightarrow \infty} 2^{2p} \cdot \frac{h_{n+p}}{24} \left[\left(f(a + h_{n+p}) - f(a - h_{n+p}) \right) - \left(f(b + h_{n+p}) - f(b - h_{n+p}) \right) \right] = \left(\lim_{p \rightarrow \infty} 2^{2p} \cdot \frac{h_{n+p}}{24} \right) \left(\lim_{p \rightarrow \infty} \left[\left(f(a + h_{n+p}) - f(a - h_{n+p}) \right) - \left(f(b + h_{n+p}) - f(b - h_{n+p}) \right) \right] \right) = \left(\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{2^p}{24} h_n \right) \left(\lim_{p \rightarrow \infty} \left[(f(a) - f(a)) - (f(b) - f(b)) \right] \right) = \infty \cdot 0 \text{ (B. H.)}$$

sonucundan görüldüğü gibi bir belirsizlik çıkar.

Fakat $c = a, b$ için

$$\lim_{p \rightarrow \infty} 2^{2p} h_{n+p} f(c \pm h_{n+p}) = \left(\lim_{p \rightarrow \infty} 2^p h_{n+p} \right) \left(\lim_{p \rightarrow \infty} 2^p f(c \pm h_{n+p}) \right) = \left(\lim_{p \rightarrow \infty} h_n \right) \left(\lim_{p \rightarrow \infty} 2^p f(c \pm h_{n+p}) \right) = h_n \cdot \lim_{p \rightarrow \infty} 2^p f(c \pm h_{n+p}) = h_n f(c \pm h_n)$$

limiti geçerli olduğundan

$$\lim_{p \rightarrow \infty} 2^{2p} A_{n+p} = A_n$$

sonucu geçerli olur. Demek ki yukarıda yaptığım yaklaşımım doğruymuş! Eğer **Sheppard** bu yaklaşımı bilseydi, eliminasyon yoluyla keşfettiği (31)-(44)'teki yaklaşımları hem daha kolay bir şekilde bulmuş olacaktı, hem de yakınsaklığı bunlardan daha etkin yaklaşımlar bulabilecekti! Bu onun adına kötü şans ama bizim için iyi bir şans oldu. Çünkü "[1.1. En Genel Haldeki Ole Amble Algoritması'ndaki Yaklaşıklıklar](#)"da bu son limitin altında **Parmentier (19. yy.)**, **Sheppard (1900)** ve **Ole Amble (1952)**'a ait yaklaşıklıkların mertebelerini teker teker inceledim ve **Parmentier**'de $O(h_n^3)$, **Sheppard**'ta (ki bunun için en iyi yaklaşıklık olarak iddia ettiği (38) no'lu formülü kullandım) $O(h_n^2)$ ve **Ole Amble**'de $O(h_n^4)$ olduğunu gördüm. Yani bu sonuçlara göre en iyi yaklaşıklık **Ole Amble**'inkidir. Hadi biraz dedektiflik yapalım: **Romberg** 1949'da Tröndheim'a geldiğinde orada bunu buradaki gibi değil ama bir şekilde fark etti ve 1955'teki tezinde inceledi. Bu konuda **Romberg**'in 1949-1968 yıllarında Tröndheim'da olduğunu ve **Sheppard**'ın tezinden dolayı şimdi adıyla anılan yöntemi hemen bulmadığını biliyoruz (Bkz. [EK 1](#)). Fakat Norveçliler **Ole Amble**'ı **Romberg** kadar takdir edemediler, çünkü **Ole Amble**'ı bir Nümerik Analizci'den çok bilgisayarçı zannediyorlardı. Bunun için eğer "[Norveç'in İlk Veri Yöneticisi: OLE AMBLE](#)" adlı okuma parçasını okursanız ne demek istediğimi gayet iyi anlarsınız. **Ole Amble** çok yönlü bir bilim adamıydı; meteoroloji, astrofizik, matematik ve fizik alanlarında son derece önemli çalışmalarda bulundu. Bu makalemde onu bir meteorolog olarak tanıttım ve meteorolojideki çalışmalarına yer verdim (Bkz. Resim 2.1).

2. bölümde en genel haldeki **Ole Amble**'in algoritması için (2.11)'deki genel ekstrapolasyonu verdim. Dikkat ediniz, bu ekstrapolasyon hem bana ait, hem de onu en genel hale getirdiğim **Ole Amble**'in algoritmasına uyarladım. Bunlar çok iş tabii ki ama, **Ole Amble**'in 1736'ya kadar geriye giden (ki [e-Devlet](#)'te en fazla 1900'e kadar geriye gidebildim) "**Amble**" ailesinin soyağacındaki alttaki sol baştaki [Ole Amble Ommundsen](#)'in oğlu olduğunu ve çekirdek aile fotoğrafını [100. sayfa](#)da göstersem Norveçliler ne düşünürdü acaba?

3. bölümde en genel haldeki **Ole Amble**'in algoritması için Mathematica programını verdikten sonra yine "[11. 2. Tür E-ATA M Algoritması Üzerindeki Genel Haldeki Ole Amble Algoritması'na Mathematica İle Sembolik Bir Yaklaşım](#)"daki örneği ele aldım. Fakat bunlardan önce (2.37)'deki $\hat{K}_n$ ve $\hat{T}_n$ yaklaşıklıklarındaki K_n , T_n ve A_{n+p} yaklaşıklıklar dizilerini hem Çözüm 1'e göre hem de Çözüm 2'ye göre verdim. Bu yaklaşıklıklar dizilerinin önemi şurada: $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = I = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ ve $\lim_{p \rightarrow \infty} A_{n+p} = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} A_{n+p}$. Ancak Mathematica Çözüm 1'deki K_n ve T_n yaklaşıklıklarını Pochhammer sembolüne göre verdiği için bunların limitlerini belirleyebilmek mümkün olmadı. Ama Çözüm 2'den (1.27)&(1.28)'den görüldüğü üzere I integral sonuçlarını elde edebildim. Orada bunlar (1.19)'daki I integrali sonucundan farklı görünür ancak gerçekte hepsi birbirlerine eşittir. İşte bu yüzden programda Çözüm 2'yi kullandım. Eğer orada bu çözüme ait Romberg tablosuna bakarsanız, çıktıların **Ole Amble**'in algoritmasına göre daha dengeli dağılmış olduklarını görürsünüz. Çünkü **Ole Amble**'in algoritmasındaki K_n , T_n 'den 1 adım geride kalıyordu, dolayısıyla bunlar Romberg tablosunda homojen olarak dağılmıyorlardı. **Ole Amble**'in algoritmasındaki bu problemi nasıl düzelttiğimi hemen aşağıdaki 1. maddede açıkladım!

Şimdi tarihi malumatlara geçerseniz (2.37)'den şu sonuçlar çıkar:

1. **Ole Amble'in yaklaşıklıklarındaki eş yakınsaklık probleminin düzeltilmesi.** Hatırlanacağı üzere **Ole Amble**, anılan tezinde (2.37)'deki yaklaşıklıkların ilkinde $p = 0$ ve ikincisinde $p = 1$ alarak (2.4)'teki yaklaşıklıkları vermişti. Fakat **Ole Amble**, bu seçimleri yaparken farkında olmadan, ikincisinin yakınsaklığını ilkinden biraz daha ileriye taşımış ve bunun sonucunda bu yaklaşıklıkların I'ya yakınsamalarındaki homojenliği (eş yakınsama) bozmuştur.

Burada **Ole Amble**'in esas yaklaşıklıklığı, **Romberg**'in, "**O. AMBLE** [2], $a \leq x \leq b$ integral aralığının dışında her 2 tarafa h uzaklığında birer nokta ekleyerek I'ya daha iyi bir yaklaşımın nasıl bulunabileceğini gösterdi (**O. AMBLE** [2] gezeigt, wie man durch Hinzufügen je eines Punktes im Abstände h auf beiden Seiten ausserhalb des Integrationsgebietes $a \leq x \leq b$ eine bessere Annäherung an I finden kann)" açıklamasına göre $[a, b]$ aralığının uç noktalarının yani a ve b 'nin h_{n+p} komşuluklarındaki $(a - h_{n+p}, a + h_{n+p})$ ve $(b - h_{n+p}, b + h_{n+p})$ noktalarının ordinatları arasındaki farkların farkına göre (2.2)'den şu şekildedir (ki **Romberg**'in uyarısına göre bu noktalardan $[a, b]$ aralığının içine düşenleri köşeli parantezle ve dışına düşenleri küçük parantezle gösterdiğime dikkat ediniz):

$$(2.38) \quad A_{n+p} = \frac{h_{n+p}}{24} \left[\left(f(a + h_{n+p}) - f(a - h_{n+p}) \right) - \left(f(b + h_{n+p}) - f(b - h_{n+p}) \right) \right].$$

Fakat bu formüldeki köşeli parantez içindeki ifadeye benzer ifadeler **Parmentier**'den sonra ilk kez esaslı bir şekilde 14.06.1900'de **W.F. Sheppard** tarafından verildi (Bkz. "[Some quadrature formulas, Proc. London Math. Soc., 32, 1900, pp. 258-277](#)").

Buna göre **Ole Amble**, 1952'de (2.4)'teki yaklaşıkları NUSSE'de kullanmış (ki buna kanıt olarak [Resim 1](#)'i verebilirim. O, orada adeta uçuyordu) ve bunların I'ya yakınsamalarında RAM'lerdeki gibi birbirlerine eşlik etmediklerini görmüş olmalı. Çünkü $\hat{K}_n$, I'ya yakınsarken $\hat{T}_n$ 'den biraz geride kalıyordu. Bu durumda **Ole Amble**'in, örneğin $p = 0$ için

$$(2.39) \quad \begin{cases} \hat{K}_n = K_n + A_n + O(h_n^4), \\ \hat{T}_n = T_n - \frac{1}{2} A_n + O(h_n^4) \end{cases}$$

yaklaşıklıklarını alması gerekiyordu ve böylece eş yakınsaklık problemi de ortadan kalkmış olurdu! Fakat bu haldeyken bile (2.37)'deki hem eş yakınsaklık bozulur ve böylece (2.39)'da **Ole Amble**'in algoritmasındaki duruma düşeriz, hem de bundan dolayı bu yaklaşıklıklardan elde edilen sonuçlar diğer p değerlerine göre elde edilen yaklaşıklıklardan daha kötü sonuçlar üretir. İşte bu yüzden (2.37)'de p yerine 0 almayın da ne alırsanız alın! Merak etmeyin, p yerine milyon, milyar, trilyon vb., hatta

istediğiniz rasyonel (tam sayılı kesir) ve irrasyonel sayıyı koysanız bile (ki bu, $[0,1]$ aralığının dışında yani 1'den büyük olmalıdır), (2.37)'deki eş yakınsama bozulmaz!

2. **1. Snell bağıntısı.** Eğer (2.37)'de ikinci eşitliğin her iki yanını 2 ile çarpar ilkiyle taraf tarafa toplarsak,

$$(2.40) \quad \hat{K}_n + 2\hat{T}_n = K_n + 2T_n$$

bağıntısını elde ederiz ki, bu eşitliğin sağ tarafındaki ifadenin (2.24)'teki Snell bağıntısının 3 katı olduğunu görürüz!

İşte bu sonuç (2.13)'teki ilk sonuçta neden o kadar çok sevindiğimi açıklar. Çünkü Hollanda Kralı orada bir anlık sevinirken, benimki evladiyelik idi! Bununla birlikte, eğer bu eşitliğin her 2 tarafını 3'e bölersek elde edilen eşitliğin sağ tarafındaki ifadenin (2.24)'teki Snell bağıntısı olduğunu ve bunun aşağıdaki Teorem 2.4'e göre ekstrapolasyon altında da sabit kaldığını görürüz!

Yaklaşımın Arka Planı. Öncelikle Euler-Maclaurin toplam formülüne göre I integrali için K_n trapez formülü ve T_n orta nokta formülü için

$$(2.41) \quad \begin{cases} I = K_n - a_1 h^2 - a_2 h^4 - \dots, \\ I = T_n - b_1 h^2 - b_2 h^4 - \dots \end{cases}$$

eşitliklerinin geçerli olduklarına dikkat edelim.

Bu eşitliklerdeki katsayılar,

$$(2.42) \quad a_q = \frac{B_{2q}}{(2q)!} \left(f^{(2q-1)}(b) - f^{(2q-1)}(a) \right), \quad b_q = \frac{B_{2q} \left(\frac{1}{2} \right)}{(2q)!} \left(f^{(2q-1)}(b) - f^{(2q-1)}(a) \right)$$

dir. Ama ilkindeki Bernoulli sayıları $B_q = B_q(1)$ 'dir (Bkz. "[Euler-Maclaurin Formula](#)"). Ayrıca (2.41)'deki yaklaşımlar için "[Konvergenzbeschleunigung durch Extrapolation am Beispiel der Romberg-Integration](#)" tezindeki 35 ve 43. sayfalara bakınız).

Şimdi (2.41)'deki K_n ve T_n yaklaşımlar dizilerinin ardışık 2 elemanını

$$(2.43) \quad \begin{cases} K_n = I + a_1 h^2 + a_2 h^4 + \dots, & T_n = I + b_1 h^2 + b_2 h^4 + \dots, \\ K_{n+1} = I + a_1 \left(\frac{h}{2} \right)^2 + a_2 \left(\frac{h}{2} \right)^4 + \dots, & T_{n+1} = I + b_1 \left(\frac{h}{2} \right)^2 + b_2 \left(\frac{h}{2} \right)^4 + \dots \end{cases}$$

şeklinde alır (ki n'yi 1 arttıgınızda h farkının 2'ye bölündüğüne dikkat ediniz) ve bunlara **Huygens**'in algoritmasını uygularsak,

$$\begin{aligned} E_{n,1}(K) &= \frac{4K_{n+1} - K_n}{3} = \frac{4 \left(I + a_1 \left(\frac{h}{2} \right)^2 + a_2 \left(\frac{h}{2} \right)^4 + \dots \right) - (I + a_1 h^2 + a_2 h^4 + \dots)}{3} = I - \frac{3}{4} a_2 h^4 - \dots, \\ E_{n,1}(T) &= \frac{4T_{n+1} - T_n}{3} = \frac{4 \left(I + b_1 \left(\frac{h}{2} \right)^2 + b_2 \left(\frac{h}{2} \right)^4 + \dots \right) - (I + b_1 h^2 + b_2 h^4 + \dots)}{3} = I - \frac{3}{4} b_2 h^4 - \dots \end{aligned}$$

eşitliklerinden görüldüğü üzere

$$(2.44) \quad \begin{cases} I = E_{n,1}(K) + \frac{3}{4} a_2 h^4 + \dots, \\ I = E_{n,1}(T) + \frac{3}{4} b_2 h^4 + \dots \end{cases}$$

sonuçlarının geçerli olduklarını görürüz.

Özetle bu sonuçlarla birlikte eğer işleme aynı şekilde devam edersek, bu eliminasyon sistemine göre her k için (2.9)'daki $E_{n,k}(X)$ ile h^{2k} 'lı terim silinir. Bu işleme "**Sıfırlama**" ve bu işi yapanlara "**Sıfırlayıcılar**" denir. 2002-2003 ve 2017-2018'de bir sürü ekstrapolasyon keşfettim, pardon sıfırlama yaptım ve hala da yapıyorum. Ama aşağıdaki uygulama bunlardan farklıdır. Çünkü önceki ekstrapolasyonlarda $h^2, h^4, \dots, h^{2k}$ 'nın katsayılarını belirsiz olarak alırken aşağıdakinde öyle değildir; katsayıların belirli olması gerekir.

Şimdi de $h_{n+p} =: h$ ve $2^{2p} A_{n+p} =: B(h)$ dersek (2.38)'i

$$(2.45) \quad \begin{aligned} B(h) &= \frac{h}{24} [f(a+h) - f(a-h) + f(b-h) - f(b+h)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{24n!} [(1 + (-1)^{n+1})f^{(n)}(a) - (1 + (-1)^{n+1})f^{(n)}(b)] h^{n+1} \\ &= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{12(2n+1)!} (f^{(2n+1)}(b) - f^{(2n+1)}(a)) h^{2n+2} = - \frac{1}{12} (f'(b) - f'(a)) h^2 - \frac{1}{72} (f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a)) h^4 - \dots \end{aligned}$$

ve böylece (2.37)'yi

$$(2.46) \quad \begin{cases} \hat{K}_n = K_n + B(h) = I + a_1 h^2 + a_2 h^4 + \dots + \frac{h}{24} [f(a+h) - f(a-h) + f(b-h) - f(b+h)], \\ \hat{T}_n = T_n - \frac{B(h)}{2} = I + b_1 h^2 + b_2 h^4 + \dots - \frac{h}{48} [f(a+h) - f(a-h) + f(b-h) - f(b+h)] \end{cases}$$

şeklinde ele alabiliriz ve bu durumda (2.45)&(2.46)'ya göre $\hat{K}$ ve $\hat{T}$ yaklaşımlar dizisinin n-inci ve n + 1-inci elemanlarında h^2 'nin katsayılarının sıfırlanmış olduğunu görürüz:

$$(2.47) \left\{ \begin{aligned} \hat{K}_n &= K_n + B(h) = I + a_1 h^2 + a_2 h^4 + \dots + \frac{h}{24} [f(a+h) - f(a-h) + f(b-h) - f(b+h)] \\ &= I + \frac{B_2}{2!} (f'(b) - f'(a)) h^2 + \frac{B_4}{4!} (f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a)) h^4 + \dots + \frac{h}{24} [f(a+h) - f(a-h) + f(b-h) - f(b+h)] \\ &= I + \frac{1}{12} (f'(b) - f'(a)) h^2 - \frac{1}{720} (f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a)) h^4 + \dots - \frac{1}{12} (f'(b) - f'(a)) h^2 - \frac{1}{72} (f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a)) h^4 - \dots \\ &= I - \frac{11}{720} (f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a)) h^4 - \dots, \\ \hat{K}_{n+1} &= K_{n+1} + B\left(\frac{h}{2}\right) = I + a_1 \left(\frac{h}{2}\right)^2 + a_2 \left(\frac{h}{2}\right)^4 + \dots + \frac{h}{48} \left[f\left(a + \frac{h}{2}\right) - f\left(a - \frac{h}{2}\right) + f\left(b - \frac{h}{2}\right) - f\left(b + \frac{h}{2}\right) \right] \\ &= I + \frac{B_2}{2!} (f'(b) - f'(a)) \left(\frac{h}{2}\right)^2 + \frac{B_4}{4!} (f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a)) \left(\frac{h}{2}\right)^4 + \dots + \frac{h}{48} \left[f\left(a + \frac{h}{2}\right) - f\left(a - \frac{h}{2}\right) + f\left(b - \frac{h}{2}\right) - f\left(b + \frac{h}{2}\right) \right] \\ &= I + \frac{1}{48} (f'(b) - f'(a)) h^2 - \frac{1}{11520} (f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a)) h^4 + \dots - \frac{1}{48} (f'(b) - f'(a)) h^2 - \frac{1}{1152} (f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a)) h^4 - \dots \\ &= I - \frac{11}{11520} (f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a)) h^4 - \dots, \\ \hat{T}_n &= T_n - \frac{B(h)}{2} = I + b_1 h^2 + b_2 h^4 + \dots - \frac{h}{48} [f(a+h) - f(a-h) + f(b-h) - f(b+h)] \\ &= I + \frac{B_2}{2!} (f'(b) - f'(a)) h^2 + \frac{B_4}{4!} (f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a)) h^4 + \dots - \frac{h}{48} [f(a+h) - f(a-h) + f(b-h) - f(b+h)] \\ &= I - \frac{1}{24} (f'(b) - f'(a)) h^2 + \frac{7}{5760} (f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a)) h^4 + \dots + \frac{1}{24} (f'(b) - f'(a)) h^2 + \frac{1}{144} (f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a)) h^4 + \dots \\ &= I + \frac{47}{5760} (f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a)) h^4 + \dots, \\ \hat{T}_{n+1} &= T_{n+1} - \frac{B\left(\frac{h}{2}\right)}{2} = I + b_1 \left(\frac{h}{2}\right)^2 + b_2 \left(\frac{h}{2}\right)^4 + \dots - \frac{h}{96} \left[f\left(a + \frac{h}{2}\right) - f\left(a - \frac{h}{2}\right) + f\left(b - \frac{h}{2}\right) - f\left(b + \frac{h}{2}\right) \right] \\ &= I + \frac{B_2}{2!} (f'(b) - f'(a)) \left(\frac{h}{2}\right)^2 + \frac{B_4}{4!} (f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a)) \left(\frac{h}{2}\right)^4 + \dots - \frac{h}{96} \left[f\left(a + \frac{h}{2}\right) - f\left(a - \frac{h}{2}\right) + f\left(b - \frac{h}{2}\right) - f\left(b + \frac{h}{2}\right) \right] \\ &= I - \frac{1}{96} (f'(b) - f'(a)) h^2 + \frac{7}{92160} (f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a)) h^4 + \dots + \frac{1}{96} (f'(b) - f'(a)) h^2 + \frac{1}{2304} (f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a)) h^4 + \dots \\ &= I + \frac{47}{92160} (f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a)) h^4 + \dots \end{aligned} \right.$$

Eğer bu ardışık yaklaşıklara (2.11)'deki ekstrapolasyonu $k = 1$ için uygularsak,

$$(2.48) \left\{ \begin{aligned} F_{n,1}(\hat{K}) &= \frac{16\hat{K}_{n+1} - \hat{K}_n}{15} = I + \frac{1}{28800} (f^{(5)}(b) - f^{(5)}(a)) h^6 + \frac{1}{967680} (f^{(7)}(b) - f^{(7)}(a)) h^8 + \dots, \\ F_{n,1}(\hat{T}) &= \frac{16\hat{T}_{n+1} - \hat{T}_n}{15} = I - \frac{1}{57600} (f^{(5)}(b) - f^{(5)}(a)) h^6 - \frac{1}{1935360} (f^{(7)}(b) - f^{(7)}(a)) h^8 - \dots \end{aligned} \right.$$

sonuçlarının geçerli olduklarını görürüz. Tarihi bir malumat olarak belirtmem gerekirse, bunlar **Romberg**'in [turuncu tablonun](#) 2. sütununda yaptığı işlemlere karşılık gelir!

İşte bu sonuçlara göre yani gerek (2.47)'ye göre, gerekse (2.48)'e göre I 'ya yakınsama bakımından $(\hat{K}_n, \hat{T}_n)$, (K_n, T_n) 'den 1 mertebe ya da adım önde olur. Aynı şekilde, **Ole Amble**'in $(\hat{K}_n, \hat{T}_{n+1})$ yaklaşıklıkları da, (K_n, T_n) 'den 1 adım öndedir. Buna göre siz, $(\hat{K}_n, \hat{T}_n)$ 'ye (2.9)'daki E ekstrapolasyonunu uygularsanız (2.47)'ye göre h^2 'nin katsayısı sıfır olduğundan boşa döner ve onlara yakın sonuçlar elde edersiniz. Bu nedenle (2.48) gereğince (2.9)'daki 4'ün kuvvetini 1 artırmanız gerekir ve bunun sonucunda (2.11)'deki F ekstrapolasyonu karşınıza çıkar!

Sonuç 2.2. Burada şu 2 kritik sonuç dikkat çeker:

1. **B(h)'ye Limitsel Yaklaşım.** Eğer $B(h)$ 'ye limitsel yaklaşım için $f(x)$ 'in a ve b noktalarındaki 1. türevine ilişkin limit tanımlarını kullanır,

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{(a+h) - (a-h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}, \\ f'(b) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(b+h) - f(b-h)}{(b+h) - (b-h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(b+h) - f(b-h)}{2h} \end{aligned}$$

ve bu eşitliklerdeki ilkinden ikincisini taraf tarafa çıkarırsak,

$$(2.49) \quad B(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{24} [f(a+h) - f(a-h) + f(b-h) - f(b+h)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a) - f'(b)}{12} h^2$$

sonucu geçerli olur ki bu, (2.45)'e göre $B(h)$ 'nin ilk terimini verir ve bu yeterlidir. Ama daha hassas yaklaşımlar için (2.45)'teki diğer terimleri de göz önüne almamız gerekir.

Ayrıca bu eşitliklerde $h = h_n$ için h zaten sıfıra gittiğinden $B(h)$ 'nin h sıfıra giderken limiti almaya gerek yoktur ve ben de öyle yazdım. Çünkü aslında bu eşitliklerdeki tüm limitleri kaldırabiliriz ve bu durumda $B(h)$ 'nin ilk teriminin açığa çıktığını görebilir ve bunun da $B(h)$ için yeterli olduğunu söyleyebiliriz. Şöyle ki, [ortalama değer teoremi](#)ne göre öyle $c_1(a-h, a+h)$ ve $c_2(b-h, b+h)$ vardır ki şu sonuçlar mevcut olur:

$$(2.50) \quad \left\{ \begin{aligned} f'(c_1) &= \frac{f(a+h) - f(a-h)}{(a+h) - (a-h)} = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}, \\ f'(c_1) &= \frac{f(b+h) - f(b-h)}{(b+h) - (b-h)} = \frac{f(b+h) - f(b-h)}{2h}. \end{aligned} \right.$$

Sheppard'ın tezini incelemek gerekiyor!

Çok ilginçtir, **Sheppard**'a göre buradaki c_1 ve c_2 noktaları orta noktalardır, yani $c_1 = a$ ve $c_2 = b$ 'dir. Çünkü o, 14.06.1900'de $[a, b]$ aralığının orta noktasının ordinatını $z_{\frac{1}{2}m} = f\left(x_{\frac{1}{2}m}\right) = f\left(a + \frac{m}{2}h\right)$ şeklinde aldıktan sonra, bu orta noktadan eşit uzaklıkta bulunan $z_{\frac{1}{2}m(1-\alpha)}$ ve $z_{\frac{1}{2}m(1-\beta)}$ ordinat çiftini alarak Parmentier kuralını modifiye etti ve **Ole Amble**'in 1952'de yaptığı gibi (ki bu, makalemde genelleştirme sonucu keşfettiğim (2.2)'deki yaklaşıklık) bir sürü yaklaşık buldu (Bkz. "[Some quadrature formulas, Proc. London Math. Soc., 32, 1900, pp. 258-277](#)", 10. Madde, S. 267). Hepsini teker teker kontrol ettim; hiçbirisi (2.2)'deki **Ole Amble**'in yaklaşıklığının yanına bile yaklaşmıyor. Çünkü **Sheppard** (11)&(26) ile (2.41)'deki açılımları bilmesine rağmen, $B(h)$ için (2.45)'teki köşeli parantez içindeki ifadenin açılımını orada gösterdiğim şekilde genel olarak değil, (30)'da görüldüğü gibi Cosh fonksiyonunun açılımına göre yani özel olarak verir. Bu da tabii ki doğal olarak (31)-(44)'te bulunduğu yaklaşıklıklarda düzensiz yakınsamalara neden olmuştur (ki bu durum **Sheppard**'ın yaklaşıklıklarının hiçbirisinin neden **Ole Amble**'inki kadar iyi olmadığını gösterir). Bu sonuçla **Sheppard**'ın düzgün yakınsayan yaklaşıklıklar bulması için oradaki gibi değil buradaki (2.47)'deki gibi olmalıydı!

Peki (2.37)'deki 24 nereden geliyor?

Sheppard (31)-(44)'teki yaklaşıklıklarının katsayılarını şu şekilde bulmalıydı: Örneğin (2.38)'deki yaklaşıklığın katsayısındaki p 'yi bulabilmek için (2.45)&(2.46)'ya göre,

$$(2.51) \quad \left\{ \begin{aligned} \hat{K}_n &= K_n + B(h) = I + a_1 h^2 + \dots + \frac{h}{p} [f(a+h) - f(a-h) + f(b-h) - f(b+h)] = I + \frac{B_2}{2!} (f'(b) - f'(a)) h^2 + \dots - \frac{2}{p} (f'(b) - f'(a)) h^2 - \dots \\ &= I + \frac{1}{12} (f'(b) - f'(a)) h^2 - \dots - \frac{2}{p} (f'(b) - f'(a)) h^2 - \dots = I + \underbrace{\frac{p-24}{12p}}_{=0} (f'(b) - f'(a)) h^2 - \dots \Rightarrow p-24=0 \Rightarrow p=24, \\ \hat{T}_n &= T_n - \frac{B(h)}{2} = I + b_1 h^2 + \dots - \frac{h}{2p} [f(a+h) - f(a-h) + f(b-h) - f(b+h)] = I + \frac{B_2 \left(\frac{1}{2}\right)}{2!} (f'(b) - f'(a)) h^2 + \dots + \frac{2}{p} (f'(b) - f'(a)) h^2 \\ &= I - \frac{1}{24} (f'(b) - f'(a)) h^2 + \dots + \frac{2}{p} (f'(b) - f'(a)) h^2 + \dots = I - \underbrace{\frac{2p-48}{24p}}_{=0} (f'(b) - f'(a)) h^2 + \dots \Rightarrow 2p-48=0 \Rightarrow p=24 \end{aligned} \right.$$

işlemlerini yapmamız gerekir ve ancak bu işlemlerin sonucunda $p = 24$ buluruz. Sonra **Parmentier**, **Sheppard**, **Ole Amble**'in yaklaşıklıklarındaki 24 nereden geliyor diye sormayın; işte buradan geliyor. Bu sonuç aynı zamanda **Ole Amble**'in (2.1)-(2.3)'teki yaklaşıklıklarının katsayısıdır. Ama benimki tabii ki modern bir çıkarım, dolayısıyla **Ole Amble**'in 24'ü nasıl bulduğunu bilmiyorum! Acaba **Ole Amble**, 24'ü 4!'den mi bulmuştu?

İster inanın ister inanmayın, bu makaleyi MS Word 2019'da her açtığımda ister istemez Resim 2.1'deki artisti görürüm ve her seferinde parmentier kuralını en iyi modifiye edenin kendisi olduğunu bilirim. Bakmayın siz ona meteorolog, astrofizikçi, fizikçi vs. denmesine, o bu işte 1. Sınıf bir matematikçiydi. Norveçlilerin bu gelişmeden habersiz olduğuna kesinlikle eminim. Sadece Norveçlilerin değil, kimsenin haberi yok. Çünkü **Ole Amble**'in tezi **Romberg**'in tezinde olduğu gibi unutulup gitmiş ve bunlarla bir daha kimse uğraşmamış. Yani bu tezler birer "**Kayıp Çalışma**"dır ve ben de bunları günümüze taşıyorum!



a alamy stock photo

Resim 2.7. [William Fleetwood Sheppard \(1863-1936\)](#). [Ramanujan](#)'ın Avustralyalı-İngiliz versiyonu, memur, matematikçi ve istatistikçi. İstatistik Teorisi (ki daha çok "[Sheppard'ın Doğrulamaları](#)" ile bilinir), İnterpolasyon ve Sonlu Farklar'daki çalışmalarıyla hatırlanır.

Diğer taraftan bu son sonuca göre **Sheppard**'ın (11) ile lineer kombinasyonlar sonucunda elde ettiği (7)'deki **Huygens**'in algoritması (1654) ya da ona göre **Simpson**'un 1. kuralı (**Simpson**'un 1/3 kuralı), (9)'daki **Simpson**'un 2. kuralı (**Simpson**'un 3/8 kuralı), (10)'daki **Weddle**'in kuralı için sırasıyla (14), (15) ve (16)'da gösterdiği şekilde katsayıların bilinmesine gerek yoktur. Çünkü 2003'teyken ben de aynı şekilde lineer kombinasyonlar yoluyla bir sürü algoritma bulmuştum ama bu katsayıları genel olarak almıştım (Y.N. 2003'te bu algoritmaları "**ATA 1 Algoritmaları**" başlığı altında toplamıştım. İnanmazsanız [A1A.jpg](#) ([A1A.rar](#)), [A1A SV.jpg](#) ([A1A SV.rar](#)) resimlerine bakınız. Parantez içindekilerden bu resimlerin orijinal kayıt tarihlerini görebilirsiniz). Ama (2.37)'deki yaklaşıklıkların I 'ya yakınsamalarını (2.47)'de gösterirken bu katsayıların bilinmesinin gerekli olduğuna dikkat ediniz!

Keşke... (Wish...)

Sheppard, **Malcolm Gerrie**'nin dediği gibi keşke (23) ile (i)-(xiii) algoritmalarını teker teker bulacağına, bunları bir sistem içinde yani iteratif (tekrarlı) olarak bulsaymış (ki (2.9)'daki E ekstrapolasyonunda $k = 1$ için (i), $k = 2$ için (iii), $k = 3$ için (vii) algoritmalarını bulmuştu. Bunlardan sonuncusu en iyi algoritmadır ve 6. Maddeki $\int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \ln 2 = 0.693147180 \dots$ örneğinde bu algoritmayı kullansaymış daha iyi olurmuş), çok daha isabetli olurmuş (Bkz. "[John Lennon'un Son Haftası](#)"). E ekstrapolasyonunu **Richardson** adına kotarmaya çalışan **J.A. Gaunt**, 1927'de şöyle demişti: "*h'nin 4. kuvvetin ötesine genişletmede önemli bir zorluk olmayacaktır; ama öyle bir inceliğin pratik değeri az olurdu!* (There would be no essential difficulty in extending the expansion beyond the fourth power of h ; but such a refinement would have little practical value)" (Bkz. "[VIII. The Deferred Approach to the Limit: Part I-Single Lattice by Lewis Fry Richardson, Part II-Interpenetrating Lattices by Arthur Gaunt](#)", Son paragraf, S. 361. Daha detaylı bilgi için [RİK 3](#)'ün 22. sayfasındaki (2.1)'in altındaki paragrafa bakınız). İyi ama **Sheppard** 14.06.1900'de bunu zaten yapmış ve ötesine geçmişti: (i), (iii) ve (vii) ile h^2, h^4, h^6 'nın katsayılarını sıfırlamıştı!

2. **A_{n+p} nasıl bir yaklaşıklık?** Öncelikle $2^{2p} A_{n+p} =: B_{n+p}$ dersek (2.37) (2.39)'daki gibi şu şekle dönüşür:

$$(2.52) \quad \left\{ \begin{aligned} \hat{K}_n &= K_n + B_{n+p} + O(h_n^4), \\ \hat{T}_n &= T_n - \frac{1}{2} B_{n+p} + O(h_n^4). \end{aligned} \right.$$

Buna göre eğer düzgün yakınsama mevcut ise yani $K_n \lesssim I \lesssim T_n$ ya da $T_n \lesssim I \lesssim K_n$ eşitsizliklerinden biri daima gerçekleşiyorsa $\hat{K}_n \lesssim I \lesssim \hat{T}_n$ ya da $\hat{T}_n \lesssim I \lesssim \hat{K}_n$ eşitsizliklerinden biri daima gerçekleşir. Burada (K_n, T_n) ve $(\hat{K}_n, \hat{T}_n)$ çiftleri I 'ya alttan ve üstten hemen hemen eş yakınsarlar ama ilk çifttekiler ikinci çifttekilerden uzak

bir şekilde Γ 'ya yakınsarlar. Yani daima $K_n \lesssim \hat{K}_n \lesssim I \lesssim \hat{T}_n \lesssim T_n$, $T_n \lesssim \hat{K}_n \lesssim I \lesssim \hat{T}_n \lesssim K_n$, $K_n \lesssim \hat{T}_n \lesssim I \lesssim \hat{K}_n \lesssim T_n$, $T_n \lesssim \hat{T}_n \lesssim I \lesssim \hat{K}_n \lesssim K_n$ eşitsizliklerinden biri gerçekleşir.

Mantıksız Mantıklı İşlemler

Bu durumda $(\hat{K}_n, \hat{T}_n)$ çiftinin Γ 'ya alttan ve üstten hemen hemen eş yakınsamasıyla ilgili 2 durum ve bunlara ilişkin şu sonuçlar geçerli olur:

1. Eğer $\hat{K}_n \lesssim I \lesssim \hat{T}_n$ ise B_{n+p} 'nin işareti

$$(2.53) \quad \begin{cases} T_n \lesssim T_n - \frac{B_{n+p}}{2} = \hat{T}_n \lesssim I \lesssim \hat{K}_n = K_n + B_{n+p} \lesssim K_n \Rightarrow \begin{cases} I - K_n \lesssim B_{n+p} < 0, \\ 2(T_n - I) \lesssim B_{n+p} < 0 \end{cases} \Rightarrow 2(T_n - I) \lesssim I - K_n \lesssim B_{n+p} < 0 \\ K_n \lesssim T_n - \frac{B_{n+p}}{2} = \hat{T}_n \lesssim I \lesssim \hat{K}_n = K_n + B_{n+p} \lesssim T_n \Rightarrow \begin{cases} 0 < I - K_n \lesssim B_{n+p}, \\ 0 < 2(T_n - I) \lesssim B_{n+p} \end{cases} \Rightarrow 0 < 2(T_n - I) \lesssim I - K_n \lesssim B_{n+p} \end{cases}$$

olup (ki mavi renkle işaret ettiğim eşitsizliği göstermek imkânsızdır; boşuna göstermeye çalışmayın. Çünkü normalde (K_n, T_n) çifti Γ 'ya alttan ve üstten hemen hemen eş yakınsarlarken $0 < I - K_n \lesssim 2(T_n - I)$ olması gerekiyordu)

$$(2.54) \quad \begin{cases} 2(T_n - I) \lesssim I - K_n \Rightarrow E_{n,1}(K) = \frac{4K_{n+1} - K_n}{3} = \frac{K_n + 2T_n}{3} \lesssim I \Rightarrow E_{n,1}(K) - E_{n,0}(K) = E_{n,1}(K) - K_n \lesssim I - K_n \stackrel{(2.53)}{\lesssim} B_{n+p} \\ E_{n,1}(K) \lesssim E_{n,1}(T) \\ \Leftrightarrow -2(E_{n,1}(T) - E_{n,0}(T)) \lesssim E_{n,1}(K) - E_{n,0}(K) \lesssim B_{n+p} \end{cases}$$

şeklinde kırmızı renkle gösterdiğim eşitsizlikler ⁶ gerçekleşir. Burada $E_{n,1}(K) - E_{n,0}(K)$ yerine $E_{n,k}(K) - E_{n,0}(K)$ ve $E_{n,1}(T) - E_{n,0}(T)$ yerine $E_{n,k}(T) - E_{n,0}(T)$ alınabilir ama $k = 1$ için olanları yeterlidir!

Şu halde bu sonuçlara göre aynı mertebeden yaklaşıklıklar için şu 4 durumdan biri gerçekleşir:

$$(2.55) \quad \begin{cases} \hat{T}_n \lesssim E_{n,1}(K) \lesssim I \lesssim E_{n,1}(T) \lesssim \hat{K}_n, \\ \hat{T}_n \lesssim E_{n,1}(K) \lesssim I \lesssim \hat{K}_n \lesssim E_{n,1}(T), \\ E_{n,1}(K) \lesssim \hat{T}_n \lesssim I \lesssim \hat{K}_n \lesssim E_{n,1}(T), \\ E_{n,1}(K) \lesssim \hat{T}_n \lesssim I \lesssim E_{n,1}(T) \lesssim \hat{K}_n. \end{cases}$$

2. Eğer $\hat{T}_n \lesssim I \lesssim \hat{K}_n$ ise B_{n+p} 'nin işareti

$$(2.56) \quad \begin{cases} T_n \lesssim K_n + B_{n+p} = \hat{K}_n \lesssim I \lesssim \hat{T}_n = T_n - \frac{B_{n+p}}{2} \lesssim K_n \Rightarrow B_{n+p} < 0 \Rightarrow \begin{cases} B_{n+p} \lesssim I - K_n < 0, \\ B_{n+p} \lesssim 2(T_n - I) < 0 \end{cases} \Rightarrow B_{n+p} \lesssim I - K_n \lesssim 2(T_n - I) < 0 \\ K_n \lesssim K_n + B_{n+p} = \hat{K}_n \lesssim I \lesssim \hat{T}_n = T_n - \frac{B_{n+p}}{2} \lesssim T_n \Rightarrow 0 < B_{n+p} \Rightarrow \begin{cases} 0 < B_{n+p} \lesssim I - K_n, \\ 0 < B_{n+p} \lesssim 2(T_n - I) \end{cases} \Rightarrow 0 < B_{n+p} \lesssim I - K_n \lesssim 2(T_n - I) \end{cases}$$

olup (ki burada da mavi renkle işaret ettiğim eşitsizliği göstermeye çalışmayın. Çünkü yine normalde (K_n, T_n) çifti Γ 'ye alttan ve üstten hemen hemen eş yakınsarlarken bu sefer $2(T_n - I) \lesssim I - K_n < 0$ olması gerekiyordu. Yani mavi renkli eşitsizliklerde bir mantık aramayın, çünkü bunlar yakınsamalardan dolayı böyle oluyor)

$$(2.57) \quad \begin{cases} I - K_n \lesssim 2(T_n - I) \Rightarrow I \lesssim \frac{K_n + 2T_n}{3} = \frac{4K_{n+1} - K_n}{3} = E_{n,1}(K) \Rightarrow B_{n+p} \stackrel{(2.53)}{\lesssim} I - K_n \lesssim E_{n,1}(K) - K_n = E_{n,1}(K) - E_{n,0}(K) \\ E_{n,1}(T) \lesssim E_{n,1}(K) \\ \Leftrightarrow B_{n+p} \lesssim E_{n,1}(K) - E_{n,0}(K) \lesssim -2(E_{n,1}(T) - E_{n,0}(T)) \end{cases}$$

şeklinde kırmızı renkli eşitsizlikler gerçekleşir. Burada da $E_{n,1}(K) - E_{n,0}(K)$ yerine $E_{n,k}(K) - E_{n,0}(K)$ ve $E_{n,1}(T) - E_{n,0}(T)$ yerine $E_{n,k}(T) - E_{n,0}(T)$ alınabilir ama $k = 1$ için olanları yeterlidir!

Şu halde bu sonuçlara göre aynı mertebeden yaklaşıklıklar için yalnızca 2 durum mevcuttur:

$$(2.58) \quad \begin{cases} E_{n,1}(T) \lesssim \hat{K}_n \lesssim I \lesssim \hat{T}_n \lesssim E_{n,1}(K), \\ \hat{K}_n \lesssim E_{n,1}(T) \lesssim I \lesssim \hat{T}_n \lesssim E_{n,1}(K). \end{cases}$$

Şimdi az önce (2.54)&(2.57)'de sözüne ettiğim Snell bağıntısına ⁷ ilişkin Teorem 2.4'e geçmeden önce 2002-2003'te bu algoritma hakkında neler yapmışım, kısaca özetleyeyim. Böylece hem 400. yıl dönümündeki *Snellius*'u (bkz. [RİK 4](#)) ve hem de 121. yıl dönümündeki *Sheppard*'ı birlikte anmış oluruz!

⁶ Büyük Piramit'teki shaft yapımcıları, shaftların bazı yerlerine mühendislik hesaplarının sonuçlarını kırmızı renkli aşı boyasıyla ve kesin karar verdikleri sonuçları da siyah boyayla yazmışlardı (Bkz. "[Robot Gizemli Shaft Hiyerogliflerini Keşfediyor!](#)"). Bu çözümüme göre Gantenbrink kapısının 21 CM ilerisindeki Hawass kapısının altından siyah boyanın akması, Kraliçe Odası'nın güney shaftının kesin olarak kapanmış olduğunu gösterir. *Hawass* ve yanındakiler hala bu son kapının arkasında ne olduğunu merak ediyorlar. Hiç unutmam, UPUAUT projesinin başı Alman arkeolog [Prof. Rainer Stadelmann, 22.03.1993](#)'te [Gantenbrink kapısı keşfedildiğinde](#), bu kapının ardında tahtında oturan ve gökyüzüne bakan bir Osiris heykeli olduğunu iddia etmişti (Y.N. Bu konuda diğer iddialar için 203. sayfada başlayan "[Bölüm 12: Osiris Yolları](#)"na bakınız. Ayrıca [RİK 4](#)'ün 9. sayfasında söylediğim gibi "[UPUAUT Projesi](#)" adlı sitenin Şubat 2021'de kapanmış olduğunu "[Every CAD drawing of Cheops Pyramid from www.cheops.org](#)" videosundaki CAD çizimlerinden de görebilirsiniz. Merak etmeyin, *Eysteinn Gudni Gudnason* orada bu çizimleri site üzerinden anlatırken bu çizimlerin tamamını zamanında almıştım (ki özel bir teknikle alınıyordu). Bu CAD dosyaları ve bazı kritik web dosyaları şimdi arşivimdedir). Şimdi benzer şeyler diğer kapı için de düşünülüyor. Keşke bana sorsalardı söyledim: Güney shaftı Hawass kapısının biraz ilerisinde 45°'lik açıyla batıya kırılarak sonlanır. Boşuna *Stadelmann* gibi hayal kurmasınlar, sonra hüsrana uğrarlar!

⁷ *Sheppard* Simpson kuralları için "*Simpson's rule (Simpson'un kuralı)*" ve "*Simpson's second rule (Simpson'un 2. kuralı)*" diyordu. Dikkat ediniz, "*Simpson's first rule (Simpson'un 1. kuralı)*" demiyordu. Çünkü buna esas kural gözüyle bakıyordu (Bkz. "[Some quadrature formulas, Proc. London Math. Soc., 32, 1900, pp. 258-277](#)"). Aynı şekilde, aşağıdaki Teorem 2.4'tekine her ne kadar "*1. Snell Bağıntısı*" demişsem de, aslında bu, esas, daha doğrusu tek Snell bağıntısıdır. Çünkü "*2. Snell Bağıntısı*"nı *Snellius* vermedi, ben türettim (Bkz. [RİK 3](#) ve [RİK 4](#)'teki (2.25)'e).



Resim 2.8. [Willebrord Snel van Royen \(1580-1626\)](#). Hollandalı matematikçi ve gökbilimci. O daha çok ışığın kırılması yasasıyla tanınır. Ama matematikte büyük bir gelişime yol açan π 'yi hesaplamak için [\(2.24\)](#) ile yeni bir yöntem geliştirdiğinde büyük bir devrim yaptı!

Snellius Algoritması'nın 400. Yıl Dönümü: 2002'den Kalma Bir Performans

2002'de Snellius algoritmasını genelleştirirken, **Sheppard** gibi sıfırlamaya dayanan bir eliminasyonla ama onunkinden farklı olarak MEM ile sistematik olarak ekstrapolasyona dönüştürdüğümü biliyor muydunuz? Ama bunun hikâyesi çok farklı. Çünkü Snellius algoritmasının nasıl geliştirileceği belli değildi. Yani birden fazla genelleştirmesi vardı ve en uygun olanını seçmek zorunda kaldım (Bkz. [“21.rar”](#)). Bu sıkıştırılmış dosyadaki **“Addendum_Files”**’in içindeki **“ATA_Algorithm.zip”**’ten **“ATA_Algorithm.pdf”** dosyasını çıkarttığınız zaman **“Snellius Metodu’nun Genelleştirilmesi Üzerine”** başlıklı 6-9. sayfalarda 11.10.2002, 01:25 itibarıyla 5 tane algoritma (ki aslında 9 tane. Biraz sabredin, [“Snellius Algoritması’nın 400. Yıl Dönümü”](#) için 2002’deki çalışmalarımı toparlayıp çok özel bir seçki hazırlıyorum) ve hemen bunların altına sonuçlarını verdiğimi görürsünüz. Bunlardan 1, 2 ve 3. algoritmalar aynı iterasyona aittirler ve bunları AA_zip’teki AA.nb dosyasının 2. tabındaki kavuniçi tabloda $S_n^{(0)}, S_n^{(1)}, S_n^{(3)}$ olarak görebilirsiniz (ki $S_n^{(2)}$ olmadığına dikkat ediniz). Söz konusu bu genelleştirme 10.09.2002, 01:45-27.10.2002, 05:40 tarihleri arasında oldu ama çoğu araştırmaya gitti. Çünkü **Snellius** tek bir algoritma vermişti ve [RİK 3](#) ve [RİK 4](#)’teki **Saigey**’in (2.1)’de verdiği ardışık 3 algoritmadaki gibi bir yönlendirme yoktu ortalıkta. İlk sinüs ve tanjant serileriyle **Snellius**’un algoritmasını buldum (ki bu biliniyordu zaten). Sonra aynı metotla yani sinüs ve tanjant serilerinin seçilen terim hariçindeki tüm katsayılarını sıfırlamayla 9 algoritma buldum. Ama baktım ki bu iş olacak gibi değil; o zaman bunlardan aynı iterasyona ait olanları yani $S_n^{(0)}, S_n^{(1)}, S_n^{(3)}$ ’ü seçmek zorunda kaldım (ki bunlardan ilk ikisini aşağıdaki **1. Algoritma** ve **2. Algoritma**’da verdim) ve genel bir iterasyona ulaşmaya çalıştım. İspat 9 sayfa sürdü ve işin içine Mersenne sayıları ([Arşimet’in kaldırıcıları](#)) girdi (Bkz. [“Snellius Ekstrapolasyonu 2002”](#)). Ama 2003’ten kalma bu sayfaları daha temiz, ilk günkü gibi, ve toplu bir şekilde [“Snellius Ekstrapolasyonu”](#)’nda görebilirsiniz. Ancak bu sayfalar her ne kadar Snellius ekstrapolasyonu için bir ispat barındırıyorsa da sonuçta bir karalamadan ibarettir. Yani sizin bu karalamadan bir şeyler anlayabilmeniz için 18 yıl önce Pi gününde tasdik ettirdiğim [“ATA Algoritması Ver. 1, 2, 3”](#)’teki (ki 4. Versiyonu da var) ilk versiyona bakmanız gerekir. Orada bu karalamada takıldığınız yerlerdeki tüm soruların yanıtlarını bulabilirsiniz).

Buna göre (2.9)’daki E ekstrapolasyonunda $k = 1$ için [\(i\)](#), $k = 2$ için [\(iii\)](#), $k = 3$ için [\(vii\)](#) algoritmalarını bulan **Sheppard**’tan farkım, **Snellius**’un $S_n^{(0)}$ algoritmasıyla başladığım ekstrapolasyon araştırmasında tüm mümkün durumları çıkarmak ve bunların içinden iteratif olanları genel bir yöntem altında toplamak oldu. Eğer **Sheppard** da [\(i\)](#), [\(iii\)](#) ve [\(vii\)](#) algoritmalarının devamını getirip benim gibi genelleştirmiş olsaydı, şimdi **“Richardson Ekstrapolasyonu”** olarak anılan E ekstrapolasyonunu **“Sheppard Ekstrapolasyonu”** olarak anıyor olacaktık. Ama bu yarış tabii ki İngilizler arasındaydı!

Diğer tarihi malumatlar şunlardır: **Snellius**, 1621’de $S_n^{(0)}$ algoritmasını geometrik yöntemle keşfederken hemen aşağıdaki 1. Algoritma’da görüldüğü üzere sinüs ve tanjant serileriyle nasıl keşfedildiğini gösterdim. Aynı şekilde, gerek sözüne ettiğim 9 algortmada, gerekse $S_n^{(0)}$ algoritmasını bir ekstrapolasyona dönüştürdüğüm 2002’deki ispatımda da sinüs ve tanjant serilerinde x ’li terim haricindeki tüm katsayıların adım adım nasıl sıfırlandığını gösterdim. Fakat **Snellius**’un döneminde seriler daha bilinmiyordu, hatta limit bile bilinmiyordu (Y.N. **Snellius**’un [“Cyclometricus”](#) adlı eserinde Latince **“Limitem”** kelimesi 3 yerde geçer ve **“Sınır”** anlamında kullanılır). 16-17. yy. (1684’e kadar) Avrupası’nda limit hakkında bilinen tek şey, **Arşimet**’ten kalma tüketme metodundan ibaretti. Örneğin (2.49)’daki $B(h)$ ’nin limit-sel tanımındaki **türev tanımı** 1684’te **Leibnitz** tarafından ortaya konulmuştu (Bkz. [“Nova Methodus pro Maximis et Minimis”](#)). Adamlar teolojiye düşkün olduklarından, kitapta “+” yerine Haç kullanılmıştır).

Fakat tüm bu gelişmeler içinde acı da olsa bir gerçekten söz etmem gerekiyor: **Snellius**’un 1621’deki $S_n^{(0)}$ algoritmasından hareketle 10.09.2002, 01:44:39’da başladığım araştırmamı 27.10.2002, 05:40’ta [“Snellius Ekstrapolasyonu”](#)’nda tamamlarken 21 gün önce (06.10.2002) Hollanda Prensi [Claus van Amsberg](#)’in hayatını kaybettiğinin farkında değildim (Bkz. [“2.2. E-ATA 1 Algoritmaları’ndan Transferler”](#), S. 30-31). Onu bırakın, **Snellius**’un şimdilerde yayınlanan [“Cyclometricus”](#) kitabı bile elimde yoktu (Bkz. [“2.2. E-ATA 1 Algoritmaları’ndan Transferler”](#), S. 30-31). Yani o sırada böyle bir ortam vardı ve durumu şimdiki Hollanda Kralı’na (oğlu) [açık bir mektup](#) yazarak bildirdim! (Y.N. Oradaki resmin filmini [şurada](#) görebilir ve Prens Claus Vakfı’nca hazırlanan [“Rondom Prins Claus-Documentarie 2001”](#)’i izleyebilirsiniz)

Şimdi hem **W.F. Sheppard**’ın [“Some quadrature formulas, Proc. London Math. Soc., 32, 1900, pp. 258-277”](#) adlı tezindeki ekstrapolasyonik algoritmaları nasıl bulduğunun anlaşılması açısından, hem de Snellius ekstrapolasyonunun biraz anlaşılabilmesi için sözüne ettiğim 9 algortmadan ilk 3’ünü nasıl bulduğumu aşağıya çıkarayım.

1. Algoritma (Willebrord Snellius-1621): Öncelikle tarihi bilgilerimize göre sinüs serisinin [1670](#)’te **Newton** ve [1676](#)’da **Leibnitz** tarafından (ki bu mesele bayağı bir karışıktır. Yani ilk kimin keşfettiği belli değildir) ve tanjant serisinin [Bernoulli sayıları](#)’ndan sonra keşfedildiklerine dikkat ediniz!

Şimdi bu serilerin ilk 2 terimini

$$(2.59) \quad \begin{cases} \text{Sin}x \cong x - \frac{x^3}{6} + O(x^5), \\ \text{Tan}x \cong x + \frac{x^3}{3} + O(x^5) \end{cases}$$

şeklinde aldıktan sonra ilkinin 2 katını alıp ikincisiyle taraf tarafa toplarsak,

$$2\text{Sin}x + \text{Tan}x \cong 3x$$

ya da

$$(2.60) \quad x \cong \frac{2\text{Sin}x + \text{Tan}x}{3} + O(x^5)$$

şeklinde **Snellius**’un 1621’de verdiği algoritmanın ortaya çıktığı görüldü. Şah mat yani! Ama **Snellius** bu yaklaşımı ya da algoritmayı bu şekilde serilerle değil, geometrik olarak keşfetmişti. Çünkü onun zamanında seriler bilinmiyordu!

Şu halde bu ilk yaklaşımda x yerine $\frac{\tan^{-1}x}{2^n}$ yazar,

$$\tan^{-1}x \cong \frac{2^{n+1}\sin\frac{\tan^{-1}x}{2^n} + 2^n\tan\frac{\tan^{-1}x}{2^n}}{3}$$

ve burada $\tan^{-1}x$ 'e bir yaklaşım söz konusu olduğundan $\tan^{-1}x \xleftarrow{n \rightarrow \infty} S_n^{(0)}(x)$ yaklaşımını gözönüne alırsak düzgün çokgenler için

$$(2.61) \quad S_n^{(0)}(x) = \frac{2\pi_n(x) + \Pi_n(x)}{3}$$

şeklinde Snellius algoritmasını elde etmiş oluruz (Bkz. "[21.rar](#)"). Bu, **Frits Beukers-Weia Reinboud**'un "[Snellius versneld](#)" adlı makalesinde biliniyordu zaten (Y.N. Bu makalenin orijinali "[Snellius Versneld \(2002\)](#)" sayfasındadır. Orada bu makale sağ taraftaki "[Download Links](#)" yazan yerdeki [PDF](#)'de 13.11.2000 tarihli ve [[www.math.uu.nl](#)]'de 14.02.2001 tarihli olarak sunulur ve o sırada yararlandığım kaynaklardan biri bu idi). Fakat sorun bundan sonra başlıyordu, çünkü aşağıdaki algoritmalarından bunu kestirebilmek oldukça güçtür!

2. Algoritma (Derya PAMUK TULUM-10.09.2002, 01:45): "[1. Nesil Arkatanjant Fonksiyonu ile Pi Sayısının Hesabı Ver. 3](#)" çalışmasındaki düzgün çokgenlerin yakınsaklıklarını hızlandıran bu algoritmayı ilk kez "[21.rar/ Addendum Files/ATA Algorithm.zip/ATA Algorithm.pdf](#)" dosyasında vermiştim!

Şimdi bu algoritmayı nasıl keşfettiğimi açık bir şekilde aşağıda inceleyelim. Öncelikle **Snellius**'un algoritmasından hareketle bu sefer sinüs ve tanjant serilerinin ilk 3 terimini

$$(2.62) \quad \begin{cases} \sin x \cong x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7), \\ \sin \frac{x}{2} \cong \frac{x}{2} - \frac{x^3}{48} + \frac{x^5}{3840} + O(x^7), \\ \tan x \cong x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + O(x^7), \\ \tan \frac{x}{2} \cong \frac{x}{2} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^5}{240} + O(x^7) \end{cases}$$

şeklinde ele alalım. Burada şöyle düşünmüştüm: "*Belki bu düşünüşle **Snellius**'un algoritmasından daha hızlı bir algoritma bulabilirim!*" Gerçekten de ilk başta beni bu düşünceye sevk edecek hiçbir bilgi yoktu ve "*eğer böyle bir algoritma varsa, **Snellius**'un algoritmasından daha hızlı bir algoritmayı bulabilmek için nasıl bir yaklaşımda bulunmalıyım?*" dedim ve bu bana "*Snellius'un Metodu'nun Genelleştirilmesi*" için ilk adımı atma imkânını verdi! (Bkz. 2002 tarihli "[Snellius Ekstrapolasyonu](#)"ndaki ilk sayfaya)

Şimdi (2.62)'ye göre ilkin

$$(2.63) \quad \begin{cases} \sin x - 2^3 \sin \frac{x}{2} \cong -3x + \frac{x^5}{160}, \\ \tan x - 2^3 \tan \frac{x}{2} \cong -3x + \frac{x^5}{10} \end{cases}$$

yaklaşım çiftini göz önüne alırsak,

$$-2^4 \sin x + 2^7 \sin \frac{x}{2} + \tan x - 2^3 \tan \frac{x}{2} \cong (2^4 + 2^6 + 2^0 - 2^2)x$$

ya da

$$(2.64) \quad x \cong \frac{-2^4 \sin x + 2^7 \sin \frac{x}{2} + 2^0 \tan x - 2^3 \tan \frac{x}{2}}{-2^4 + 2^6 + 2^0 - 2^2} = \frac{-16 \sin x + 128 \sin \frac{x}{2} + \tan x - 8 \tan \frac{x}{2}}{45} + O(x^7)$$

şeklinde bir 2. yaklaşım elde ederiz.

Yine bu yaklaşımda x yerine $\frac{\tan^{-1}x}{2^n}$ yazar ve gerekli düzenlemeleri yaparsak,

$$\tan^{-1}x \cong \frac{-2^{n+4} \sin \frac{\tan^{-1}x}{2^n} + 2^{n+7} \sin \frac{\tan^{-1}x}{2^{n+1}} + 2^n \tan \frac{\tan^{-1}x}{2^n} - 2^{n+3} \tan \frac{\tan^{-1}x}{2^{n+1}}}{45}$$

olur ve $\tan^{-1}x$ 'e yaklaşım nedeniyle $\tan^{-1}x \xleftarrow{n \rightarrow \infty} S_n^{(1)}(x)$ yaklaşımını gözönüne alırsak düzgün çokgenler için

$$(2.65) \quad S_n^{(1)}(x) = \frac{-2^4 \pi_n(x) + 2^6 \pi_{n+1}(x) + 2^0 \Pi_n(x) - 2^2 \Pi_{n+1}(x)}{-2^4 + 2^6 + 2^0 - 2^2} = \frac{-16 \pi_n(x) + 64 \pi_{n+1}(x) + \Pi_n(x) - 4 \Pi_{n+1}(x)}{45}$$

şeklinde **Snellius**'un algoritmasından sonra bir ikinci yaklaşım algoritmasını elde etmiş oluruz (Bkz. "[21.rar](#)"). Çok ilginçtir, **Snellius**'un öğretmeni **Van Ceulen**'in mezar taşına $x = 1$ için π 'nin $S_{18}^{(1)}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ alt sınırı ve $S_{28}^{(0)}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ üst sınırı kazılır! (Bkz. "[RİK 3](#)", S. 43, (4.16) ve (4.17). Bu arada $S_{20}^{(1)}$ 'de bir kopyalama hatası olmuş. Yani (4.16)'daki kesrin payı 3 değil 45 olacaktır).

3. Algoritma: Bu sefer (2.62)'den

$$(2.66) \quad \begin{cases} \sin x - 2^5 \sin \frac{x}{2} \cong -15x + \frac{x^3}{2}, \\ \tan x - 2^5 \tan \frac{x}{2} \cong -15x - x^3 \end{cases}$$

yaklaşım çiftini göz önüne alırsak,

$$2\sin x - 2^6 \sin \frac{x}{2} + \tan x - 2^5 \tan \frac{x}{2} \cong -45x + O(x^7)$$

ya da kısaca

$$(2.67) \quad T_n^{(1)}(x) = \frac{-2\pi_n(x) + 2^5\pi_{n+1}(x) - \Pi_n(x) + 2^4\Pi_{n+1}(x)}{45}$$

şeklinde (2.65)'e benzer bir 3. algoritma elde ederiz.

İşte bu sonuçla yani (2.65) ve (2.67)'ye göre Snellius algoritmasının genelleştirilmesinin tek türlü belirli olmadığı sonucu çıkar ki başta vurguladığım nokta bu idi. Çünkü Snellius algoritması **Saigey**'in (2.1)'de verdiği gibi açık değildi, dolayısıyla genelleştirilmesi de tek türlü belirli olamazdı. Ama ben 1 tane buldum, yani sözüne ettiğim 9 algoritmadan “[21.rar/Addendum Files/ATA Algorithm.zip/ATA Algorithm.pdf](#)”deki 1, 2 ve 3. algoritmaların (ki bunlar “[21.rar/Addendum Files/AA zip/AA.nb](#)”nin 2. tabındaki kavuniçi tabloda sırasıyla $S_n^{(0)}$, $S_n^{(1)}$, $S_n^{(3)}$ olarak geçerler) aynı iterasyona ait olduğunu gördükten sonra genel bir iterasyon buldum ve böylece Snellius algoritmasını genelleştirmiş oldum (ki bu, (2.2)'den de bulunabilir. Dolayısıyla siz buna **Huygens**'in algoritmasının genelleştirilmesindeki gibi bakabilirsiniz).

Keşke **Snellius**, **Saigey** ya da **Sheppard** gibi 1-2 tane daha algoritma vermiş olsaydı, o zaman **Snellius**'un algoritmasının içeriğini daha iyi anlayabilir ve böylece onu genelleştirmemiz çok daha kolay olurdu. Ama ben, 2002'deki “[Snellius Ekstrapolasyonu](#)”nda yaptığım ispattan eminim. Yani **Snellius**, **Saigey** ya da **Sheppard** gibi işleme devam etseydi bu ekstrapolasyonu bulmuş olacaktık!

Peki, bunu nereden anladım?

Çünkü eğer **Huygens**'in algoritmasının genelleştirilmiş şekli (2.2)'yi gösteriyorsa o zaman **Snellius**'un algoritmasının genelleştirilmiş şekli de (2.32)'yi gösterir. Bunu kolayca şöyle anlayabiliriz: **Snellius**, hocası **Ludolf van Ceulen**'in 1610'daki ani ölümü üzerine π 'nin 32 ondalıkta takılan hesabını 35 ondalığa tamamlayabilmek için hem yolu hem de zamanı kısaltmak adına bu algoritmayı 1621'de keşfederken, bir daire içine ve dışına çizilmiş aynı düzgün çokgenler için vermişti, dolayısıyla içteki düzgün çokgenlerin çevreleri sinüs ve dıştaki düzgün çokgenlerin çevreleri tanjantla bulunduğundan öyle tanımlamak zorunda kalmıştı (Bkz. “[4.4. Van Ceulen ve Snellius'a Bir Saygı Ziyareti](#)”, S. 50-51). Peki **Huygens**, 1654'te keşfettiği (2.23)'teki algoritmayı **Snellius**'tan farklı bir şekilde mi tanımlamıştı? Hayır, o da **Snellius** gibi a_n 'yi düzgün bir çokgenin çevresi olarak alıyordu. Dikkat ediniz a_{2n} , kenarları 2'ye katlanmış düzgün çokgenin çevresini gösterir. O zaman (2.2) ya da buradaki (2.9)'daki E ekstrapolasyonundan $k = 1$ için elde edilen algoritmaya neden Huygens algoritması deniliyor? Şüphesiz bu bir yakıştırma, çünkü **Snellius** ile **Huygens**'in algoritmalarının düzgün çokgenlerde, dolayısıyla π 'de eşit değillerken ekstrapolasyonda eşit olduklarını biliyoruz (Bkz. (2.24)'ün elde ediliş şekline). İşte bu sonuçla aslında **Snellius**'un algoritması ile **Huygens**'in algoritması aynı şey demektir. Ama **Huygens** bunları sadece π 'de kullandığı için farklı görüyordu!

Bu arada konuyla ilgili **Romberg**'in Türkiye Şubesi'nden bir yetkiliyle görüştüğüm sırada bana, “ATA 1 Algoritmaları'nı nerede yayınladın?” sorusunu sormuş ve ben de ona kendi web sitemde yayınladım, yanıtını vermiştim (Bkz. “[Romberg'in Türkiye'deki şubesiyle görüşmelerim!](#)”, S. 35). Şimdi hiç üşenmeden arşivimden o günkü web sitemin [index.html](#) dosyasını çıkartıyor ve bunun üzerindeki ATA 1 Algoritmalarına kanıt olarak [A1A.jpg](#) ([A1A.rar](#)), [A1A_SV.jpg](#) ([A1A_SV.rar](#)) ve [A1A_WXP.jpg](#) ([A1A_WXP.rar](#)) duvar kağıtlarını veriyorum.

Ters Trigonometrik, Hiperbolik ve Logaritmik Fonksiyonlar İçin İlk Gerçek Algoritmalar

Dikkat ediniz, bu duvar kağıtlarından sonuncusunun üzerinde ters trigonometrik ve hiperbolik fonksiyonların tamamının ($6 + 6 = 12$ 'si birden) ve bunlarla birlikte tüm logaritmik fonksiyonların düzgün çokgensel algoritmalara dayalı ilk gerçek tanımları mevcuttur. O sırada bunlara, te **Arşimet** amcadan kalma (M.Ö. 3. yy) algoritmalar oldukları için “**1. Nesil Ters Fonksiyonlar**” diyordum. İşte ATA 1 Algoritmaları'nı bu çokgensel algoritmaların yakınsaklığını hızlandırmak için bulmuştum. Fakat orada “**ATA 1 ALGORITHMS Version 1.0**” yazdığım göre (ki ileride geliştiririm, diye böyle yazmıştım), 14 yıl sonra keşfettiğim “[p²-inci Mertebeden Ekstrapolasyon](#)” ise “**E-ATA Algoritmaları Ver. 2.0**” demek oluyor!

Şimdi **Ole Amble**'in (2.4)'teki algoritmasında geçerli olan sonuçlar yakınsaklık problemi düzeltilmiş (2.37)'deki algoritma için de geçerli olduğundan, bu benzer sonuçları vereyim.

Teorem 2.4 (1. Snell Bağıntısı). $\forall k, n \in \mathbb{N}$ için

$$(2.68) \quad E_{n+1,k+1}(K) = \frac{F_{n,k}(\hat{K}) + 2F_{n,k}(\hat{T})}{3}$$

şeklinde Snell bağıntısı mevcuttur. Bunu daha önceden Richardson ekstrapolasyonunu Snell formunda yazarken farkında olmadan, (2.26) ve (2.26)'da vermiştim! Neden? Çünkü orada başlangıç değerini $E_{n+1,1}(K) = \frac{K_n + 2T_n}{3}$ olarak almıştım. Yani bu tür hesaplar piyango gibi kime vuracağı belli olmuyor. Çünkü bu **Snellius**'un 1621'de verdiği orijinal bağıntısıdır ve daha ATA 1 Algoritmaları'nı yazmadan ilkin 2002'de **Snellius**'un (2.24)'teki algoritmasını genelleştirerek ekstrapolasyona dönüştürmüştüm. Gelelim günümüze, [RİK 1](#)'den [RİK 4](#)'e kadar tüm çalışmalarım hep bu bağıntıyı verdim. Örneğin [RİK 1](#)'i ne ile açmıştım, **Snellius**'un portresiyle. İşte bu bağıntı orada (43)'te geçer (Daha yakın bir okuma için “[2.3. Tekrar Hoş Geldin Snell Amca!](#)” ve “[2.4. Snellius-Huygens Algoritmaları Arasındaki İlişki](#)”ye bakınız). Özetle, hep **Snellius** ile birlikteydim ve **Hamsun**'un ifadelerinden anladığıma göre, bu, Avrupa'da, dolayısıyla tüm Batı'da bulunmayan bir meziyet idi. Çünkü **Hamsun** ve genelde Batı, karşılıksız bir iş yapmaz!

İspat. Öncelikle (2.40)'taki eşitliğin her 2 yanını 3'e bölersek,

$$E_{n+1,1}(K) = \frac{2E_{n,0}(T) + E_{n,0}(K)}{3} = \frac{K_n + 2T_n}{3} = \frac{\hat{K}_n + 2\hat{T}_n}{3} = \frac{F_{n,0}(\hat{K}) + 2F_{n,0}(\hat{T})}{3}$$

eşitliklerinden

$$(2.69) \quad E_{n+1,1}(K) = \frac{F_{n,0}(\hat{K}) + 2F_{n,0}(\hat{T})}{3}$$

sonucunu elde ederiz.

İkinci olarak $E_{n+1,2}(K)$ ifadesini (2.9)'a göre açarsak,

$$E_{n+1,2}(K) = \frac{16E_{n+1,1}(K) - E_{n,1}(K)}{15} = \frac{16 \cdot \frac{\hat{K}_n + 2\hat{T}_n}{3} - \frac{\hat{K}_{n-1} + 2\hat{T}_{n-1}}{3}}{15} = \frac{16\hat{K}_n - \hat{K}_{n-1}}{15} + 2 \cdot \frac{16\hat{T}_n - \hat{T}_{n-1}}{15} = \frac{F_{n,1}(\hat{K}) + 2F_{n,1}(\hat{T})}{3}$$

eşitliklerinden

$$(2.70) \quad E_{n+1,2}(K) = \frac{F_{n,1}(\hat{K}) + 2F_{n,1}(\hat{T})}{3}$$

sonucunun geçerli olduğunu görürüz.

Üçüncü olarak $E_{n+1,3}(K)$ ifadesini (2.9)'a göre açarsak,

$$E_{n+1,3}(K) = \frac{4^3 E_{n+1,2}(K) - E_{n,2}(K)}{4^3 - 1} = \frac{4^3 \cdot \frac{F_{n,1}(\hat{K}) + 2F_{n,1}(\hat{T})}{3} - \frac{F_{n-1,1}(\hat{K}) + 2F_{n-1,1}(\hat{T})}{3}}{4^3 - 1} = \frac{4^3 F_{n,1}(\hat{K}) - F_{n-1,1}(\hat{K})}{4^3 - 1} + 2 \cdot \frac{4^3 F_{n,1}(\hat{T}) - F_{n-1,1}(\hat{T})}{4^3 - 1} = \frac{F_{n,2}(\hat{K}) + 2F_{n,2}(\hat{T})}{3}$$

eşitliklerine göre

$$(2.71) \quad E_{n+1,3}(K) = \frac{F_{n,2}(\hat{K}) + 2F_{n,2}(\hat{T})}{3}$$

sonucu geçerli olur.

Şu halde bu işlemi diğer k'ler için aynı şekilde yaparsak (2.69), (2.70) ve (2.71)'den görüldüğü üzere MEM gereğince teoremdaki sonucun çıktığını görürüz:

$$(2.72) \quad E_{n+1,k+1}(K) = \frac{F_{n,k}(\hat{K}) + 2F_{n,k}(\hat{T})}{3}.$$

Bu sonuçla (2.37)'deki $\hat{K}_n$ ve $\hat{T}_n$ yaklaşıklıklarına ait Teorem 2.1'deki sonuçlar aşağıdaki teoremdesine döner.

Teorem 2.5. $\forall n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}^+$ için (1)&(2)'deki trapez ve orta nokta formüllerine ilişkin K_n ve T_n yaklaşıklıkları ile (2.37)'deki $\hat{K}_n$ ve $\hat{T}_n$ yaklaşıklıkları için

$$(2.73) \quad \begin{cases} \frac{4^{k+1} - 1}{3} F_{n,k}(\hat{K}) - \frac{4^{k+1} - 4}{3} F_{n,k-1}(\hat{K}) = E_{n,k}(K) + 2^{2p} \cdot E_{n+p,k}(A), \\ \frac{4^{k+1} - 1}{3} F_{n,k}(\hat{T}) - \frac{4^{k+1} - 4}{3} F_{n,k-1}(\hat{T}) = E_{n,k}(T) - 2^{2p-1} E_{n+p,k}(A) \end{cases}$$

eşitlikleri geçerli olmak üzere bu yaklaşıklık çiftleri arasında şu bağıntı mevcuttur:

$$(2.74) \quad \frac{4^{k+1} - 1}{3} F_{n,k}(\hat{K}) - \frac{4^{k+1} - 4}{3} F_{n,k-1}(\hat{K}) + 2 \left(\frac{4^{k+1} - 1}{3} F_{n,k}(\hat{T}) - \frac{4^{k+1} - 4}{3} F_{n,k-1}(\hat{T}) \right) = E_{n,k}(K) + 2E_{n,k}(T).$$

Fakat bu son eşitlikteki her 2 taraftaki ifadelerin, özellikle sağ taraftaki ifadenin (bkz. (2.30)'daki parantez içindeki ifadeye), birer Snell bağıntısı olduklarına ve

$$(2.75) \quad E_{n+p,k}(A) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

sonucuna dikkat ediniz. Çünkü bu limit (2.73)'e göre (2.74)'teki ekstrapolasyonik yaklaşıklıkların karşılıklı olarak birbirlerine hemen hemen eşit olduklarını gösterir!

İspat. Yine ilkin $F_{n+1,1}(\hat{K})$ ve $F_{n,1}(\hat{T})$ ifadelerini (2.11)'e göre açarsak,

$$\begin{aligned} F_{n,1}(\hat{K}) &= \frac{4^2 F_{n,0}(\hat{K}) - F_{n-1,0}(\hat{K})}{4^2 - 1} = \frac{4^2 \hat{K}_n - \hat{K}_{n-1}}{4^2 - 1} \stackrel{(2.37)}{=} \frac{4^2 (K_n + 2^{2p} A_{n+p}) - (K_{n-1} + 2^{2p} A_{n+p-1})}{4^2 - 1} = \frac{4^2 K_n - K_{n-1}}{4^2 - 1} + 2^{2p} \cdot \frac{4^2 A_{n+p} - A_{n+p-1}}{4^2 - 1} = \frac{4K_n + \frac{4K_n - K_{n-1}}{3}}{5} \\ &+ 2^{2p} \cdot \frac{4A_{n+p} + \frac{4A_{n+p} - A_{n+p-1}}{3}}{5} = \frac{4K_n + E_{n,1}(K)}{5} + 2^{2p} \cdot \frac{4A_{n+p} + E_{n+p,1}(A)}{5} = \frac{E_{n,1}(K) + 2^{2p} \cdot E_{n+p,1}(A)}{5} + 4 \cdot \frac{K_n + 2^{2p} \cdot A_{n+p}}{5} \\ &= \frac{E_{n,1}(K) + 2^{2p} \cdot E_{n+p,1}(A)}{5} + 4 \cdot \frac{\hat{K}_n}{5} = \frac{E_{n,1}(K) + 2^{2p} \cdot E_{n+p,1}(A) + 4F_{n,0}(\hat{K})}{5} \Rightarrow 5F_{n,1}(\hat{K}) - 4F_{n,0}(\hat{K}) = E_{n,1}(K) + 2^{2p} \cdot E_{n+p,1}(A), \\ F_{n,1}(\hat{T}) &= \frac{4^2 F_{n,0}(\hat{T}) - F_{n-1,0}(\hat{T})}{4^2 - 1} = \frac{4^2 \hat{T}_n - \hat{T}_{n-1}}{4^2 - 1} \stackrel{(2.37)}{=} \frac{4^2 (T_n - 2^{2p-1} A_{n+p}) - (T_{n-1} - 2^{2p-1} A_{n+p-1})}{4^2 - 1} = \frac{4^2 T_n - T_{n-1}}{4^2 - 1} - 2^{2p-1} \cdot \frac{4^2 A_{n+p} - A_{n+p-1}}{4^2 - 1} = \frac{4T_n + \frac{4T_n - T_{n-1}}{3}}{5} \\ &- 2^{2p-1} \cdot \frac{4A_{n+p} + \frac{4A_{n+p} - A_{n+p-1}}{3}}{5} = \frac{4T_n + E_{n,1}(T)}{5} - 2^{2p-1} \cdot \frac{4A_{n+p} + E_{n+p,1}(A)}{5} = \frac{E_{n,1}(T) - 2^{2p-1} E_{n+p,1}(A)}{5} + 4 \cdot \frac{T_n - 2^{2p-1} A_{n+p}}{5} = \frac{E_{n,1}(T) - 2^{2p-1} E_{n+p,1}(A)}{5} + 4 \cdot \frac{\hat{T}_n}{5} \\ &= \frac{E_{n,1}(T) - 2^{2p-1} E_{n+p,1}(A) + 4F_{n,0}(\hat{T})}{5} \Rightarrow 5F_{n,1}(\hat{T}) - 4F_{n,0}(\hat{T}) = E_{n,1}(T) - 2^{2p-1} E_{n+p,1}(A) \end{aligned}$$

sonuçları geçerli olduğundan

$$(2.76) \quad \begin{cases} 5F_{n,1}(\hat{K}) - 4F_{n,0}(\hat{K}) = E_{n,1}(K) + 2^{2p} \cdot E_{n+p,1}(A), \\ 5F_{n,1}(\hat{T}) - 4F_{n,0}(\hat{T}) = E_{n,1}(T) - 2^{2p-1} E_{n+p,1}(A) \end{cases}$$

bağıntılarını elde ederiz. Bu, $k = 1$ için (2.73)'ü doğrular!

O halde bu eşitliklerde ikincisinin her 2 tarafının 2 katını alıp ilkiyle taraf tarafa toplarsak,

$$(2.77) \quad 5F_{n,1}(\hat{K}) - 4F_{n,0}(\hat{K}) + 2(5F_{n,1}(\hat{T}) - 4F_{n,0}(\hat{T})) = E_{n,1}(K) + 2E_{n,1}(T)$$

şeklinde (2.74)'ü $k = 1$ için doğrulamış oluruz!

Diğer taraftan yine aynı işlemi yaparsak yani (2.76)'daki ikinci eşitliğin her 2 yanının 2 katını alıp ilkiyle taraf tarafa toplarsak,

$$\begin{aligned} F_{n,1}(\hat{K}) + 2F_{n,1}(\hat{T}) &= \frac{E_{n,1}(K) + 2^{2p} \cdot E_{n+p,1}(A) + 4\hat{K}_n}{5} + 2 \cdot \frac{E_{n,1}(T) - 2^{2p-1} E_{n+p,1}(A) + 4\hat{T}_n}{5} = \frac{E_{n,1}(K) + 2E_{n,1}(T)}{5} + 4 \cdot \frac{\hat{K}_n + 2\hat{T}_n}{5} \\ &\stackrel{(2.40)}{=} \frac{E_{n,1}(K) + 2E_{n,1}(T)}{5} + 4 \cdot \frac{K_n + 2T_n}{5} = \frac{E_{n,1}(K) + 2E_{n,1}(T)}{5} + 4 \cdot \frac{E_{n,0}(K) + 2E_{n,0}(T)}{5} = \sum_{i=0}^1 4^i \frac{E_{n,1-i}(K) + 2E_{n,1-i}(T)}{5} \end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$(2.78) \quad F_{n,1}(\hat{K}) + 2F_{n,1}(\hat{T}) = \sum_{i=0}^1 4^i \frac{E_{n,1-i}(K) + 2E_{n,1-i}(T)}{5}$$

şeklinde bir ikinci sonuç elde ederiz.

İkinci olarak bu sefer $F_{n+1,2}(\hat{K})$ ve $F_{n,2}(\hat{T})$ ifadelerini (2.11)'e göre açarsak,

$$\begin{aligned} F_{n,2}(\hat{K}) &= \frac{4^3 F_{n,1}(\hat{K}) - F_{n-1,1}(\hat{K})}{4^3 - 1} \stackrel{(2.76)}{=} \frac{4^3 \cdot \frac{E_{n,1}(K) + 2^{2p} \cdot E_{n+p,1}(A) + 4\hat{K}_n}{5} - \frac{E_{n-1,1}(K) + 2^{2p} \cdot E_{n+p-1,1}(A) + 4\hat{K}_{n-1}}{5}}{4^3 - 1} \\ &= \frac{\frac{4^3 E_{n,1}(K) - E_{n-1,1}(K)}{5} + 2^{2p} \cdot \frac{4^3 E_{n+p,1}(A) - E_{n+p-1,1}(A)}{5} + 4 \cdot \frac{4^3 \hat{K}_n - \hat{K}_{n-1}}{5}}{4^3 - 1} \\ &= \frac{\left(\frac{16}{5} E_{n,1}(K) + \frac{4^2 E_{n,1}(K) - E_{n-1,1}(K)}{4^2 - 1} \right) + 2^{2p} \left(\frac{16}{5} E_{n+p,1}(A) + \frac{4^2 E_{n+p,1}(A) - E_{n+p-1,1}(A)}{4^2 - 1} \right) + 4 \left(\frac{16}{5} \hat{K}_n + \frac{16\hat{K}_n - \hat{K}_{n-1}}{15} \right)}{21} \\ &= \frac{\left(\frac{16}{5} E_{n,1}(K) + E_{n,2}(K) \right) + 2^{2p} \left(\frac{16}{5} E_{n+p,1}(A) + E_{n+p,2}(A) \right) + 4 \left(\frac{16}{5} \hat{K}_n + F_{n,1}(\hat{K}) \right)}{21} \\ &= \frac{E_{n,2}(K) + 2^{2p} E_{n+p,2}(A) + \frac{16}{5} (E_{n,1}(K) + 2^{2p} E_{n+p,1}(A) + 4\hat{K}_n) + 4F_{n,1}(\hat{K})}{21} \stackrel{(2.76)}{=} \frac{E_{n,2}(K) + 2^{2p} E_{n+p,2}(A) + 16F_{n,1}(\hat{K}) + 4F_{n,1}(\hat{K})}{21} \\ &= \frac{E_{n,2}(K) + 2^{2p} E_{n+p,2}(A) + 20F_{n,1}(\hat{K})}{21}, \\ F_{n,2}(\hat{T}) &= \frac{4^3 F_{n,1}(\hat{T}) - F_{n-1,1}(\hat{T})}{4^3 - 1} \stackrel{(2.76)}{=} \frac{4^3 \cdot \frac{E_{n,1}(T) - 2^{2p-1} \cdot E_{n+p,1}(A) + 4\hat{T}_n}{5} - \frac{E_{n-1,1}(T) - 2^{2p-1} \cdot E_{n+p-1,1}(A) + 4\hat{T}_{n-1}}{5}}{4^3 - 1} \\ &= \frac{\frac{4^3 E_{n,1}(T) - E_{n-1,1}(T)}{5} - 2^{2p-1} \cdot \frac{4^3 E_{n+p,1}(A) - E_{n+p-1,1}(A)}{5} + 4 \cdot \frac{4^3 \hat{T}_n - \hat{T}_{n-1}}{5}}{4^3 - 1} \\ &= \frac{\left(\frac{16}{5} E_{n,1}(T) + \frac{4^2 E_{n,1}(T) - E_{n-1,1}(T)}{4^2 - 1} \right) - 2^{2p-1} \left(\frac{16}{5} E_{n+p,1}(A) + \frac{4^2 E_{n+p,1}(A) - E_{n+p-1,1}(A)}{4^2 - 1} \right) + 4 \left(\frac{16}{5} \hat{T}_n + \frac{16\hat{T}_n - \hat{T}_{n-1}}{15} \right)}{21} \\ &= \frac{\left(\frac{16}{5} E_{n,1}(T) + E_{n,2}(T) \right) - 2^{2p-1} \left(\frac{16}{5} E_{n+p,1}(A) + E_{n+p,2}(A) \right) + 4 \left(\frac{16}{5} \hat{T}_n + F_{n,1}(\hat{T}) \right)}{21} \\ &= \frac{E_{n,2}(T) - 2^{2p-1} E_{n+p,2}(A) + \frac{16}{5} (E_{n,1}(T) - 2^{2p-1} E_{n+p,1}(A) + 4\hat{T}_n) + 4F_{n,1}(\hat{T})}{21} \stackrel{(2.76)}{=} \frac{E_{n,2}(T) - 2^{2p-1} E_{n+p,2}(A) + 16F_{n,1}(\hat{T}) + 4F_{n,1}(\hat{T})}{21} \\ &= \frac{E_{n,2}(T) - 2^{2p-1} E_{n+p,2}(A) + 20F_{n,1}(\hat{T})}{21} \end{aligned}$$

bağıntılarını elde ederiz ki bu da, $k = 2$ için (2.73)'ü doğrular:

$$(2.79) \quad \begin{cases} 21F_{n,2}(\hat{K}) - 20F_{n,1}(\hat{K}) = E_{n,2}(K) + 2^{2p} E_{n+p,2}(A), \\ 21F_{n,2}(\hat{T}) - 20F_{n,1}(\hat{T}) = E_{n,2}(T) - 2^{2p-1} E_{n+p,2}(A) \end{cases}$$

O halde bu eşitliklerde yine ikincisinin her 2 tarafının 2 katını alıp ilkiyle taraf tarafa toplarsak (2.74)'ü $k = 2$ için doğrulamış oluruz:

$$(2.80) \quad 21F_{n,2}(\hat{K}) - 20F_{n,1}(\hat{K}) + 2(21F_{n,2}(\hat{T}) - 20F_{n,1}(\hat{T})) = E_{n,2}(K) + 2E_{n,2}(T)$$

Fakat diğer taraftan, (2.79)'daki ikinci eşitliğin her 2 yanının 2 katını alıp ilkiyle taraf tarafa toplamayla,

$$\begin{aligned}
 F_{n,2}(\hat{K}) + 2F_{n,2}(\hat{T}) &\stackrel{(2.79)}{=} \frac{E_{n,2}(K) + 2^{2p}E_{n+p,2}(A) + 20F_{n,1}(\hat{K})}{21} + 2 \cdot \frac{E_{n,2}(T) - 2^{2p-1}E_{n+p,2}(A) + 20F_{n,1}(\hat{T})}{21} = \frac{E_{n,2}(K) + 2E_{n,2}(T)}{21} + 20 \cdot \frac{F_{n,1}(\hat{K}) + 2F_{n,1}(\hat{T})}{21} \\
 &\stackrel{(2.76)}{=} \frac{E_{n,2}(K) + 2E_{n,2}(T)}{21} + 20 \cdot \frac{\frac{E_{n,1}(K) + 2^{2p}E_{n+p,1}(A) + 4F_{n,0}(\hat{K})}{5} + 2 \cdot \frac{E_{n,1}(T) - 2^{2p-1}E_{n+p,1}(A) + 4F_{n,0}(\hat{T})}{5}}{21} = \frac{E_{n,2}(K) + 2E_{n,2}(T)}{21} + 4 \cdot \frac{E_{n,1}(K) + 2E_{n,1}(T)}{21} \\
 &+ 16 \cdot \frac{F_{n,0}(\hat{K}) + 2F_{n,0}(\hat{T})}{21} \stackrel{(2.37)}{=} \frac{E_{n,2}(K) + 2E_{n,2}(T)}{21} + 4 \cdot \frac{E_{n,1}(K) + 2E_{n,1}(T)}{21} + 16 \cdot \frac{K_n + 2^{2p}A_{n+p} + 2(T_n - 2^{2p-1}A_{n+p})}{21} = \frac{E_{n,2}(K) + 2E_{n,2}(T)}{21} + 4 \cdot \frac{E_{n,1}(K) + 2E_{n,1}(T)}{21} \\
 &+ 16 \cdot \frac{K_n + 2T_n}{21} = \frac{E_{n,2}(K) + 2E_{n,2}(T)}{21} + 4 \cdot \frac{E_{n,1}(K) + 2E_{n,1}(T)}{21} + 16 \cdot \frac{E_{n,0}(K) + 2E_{n,0}(T)}{21} = \sum_{i=0}^2 4^i \frac{E_{n,2-i}(K) + 2E_{n,2-i}(T)}{21}
 \end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$(2.81) \quad F_{n,2}(\hat{K}) + 2F_{n,2}(\hat{T}) = \sum_{i=0}^2 4^i \frac{E_{n,2-i}(K) + 2E_{n,2-i}(T)}{21}$$

sonucunu elde ederiz.

Özetle, diğer k değerleri için işleme bu şekilde devam edip diğer sonuçları da benzer şekilde bulabiliriz. Fakat MEM gereğince buna gerek yok, çünkü (2.78) ve (2.81)'den hareketle

$$(2.82) \quad \begin{cases} F_{n,1}(\hat{K}) + 2F_{n,1}(\hat{T}) = \sum_{i=0}^1 4^i \frac{E_{n,1-i}(K) + 2E_{n,1-i}(T)}{5}, \\ F_{n,2}(\hat{K}) + 2F_{n,2}(\hat{T}) = \sum_{i=0}^2 4^i \frac{E_{n,2-i}(K) + 2E_{n,2-i}(T)}{21}, \\ \vdots \\ F_{n,k}(\hat{K}) + 2F_{n,k}(\hat{T}) = \sum_{i=0}^k 4^i \frac{E_{n,k-i}(K) + 2E_{n,k-i}(T)}{\frac{4^{k+1}-1}{3}} \end{cases}$$

eşitliklerinden görüldüğü üzere şu genel sonucu verebiliriz:

$$(2.83) \quad \frac{4^{k+1}-1}{3} (F_{n,k}(\hat{K}) + 2F_{n,k}(\hat{T})) = \sum_{i=0}^k 4^i (E_{n,k-i}(K) + 2E_{n,k-i}(T)).$$

İşte bu eşitliğin sağ tarafındaki toplamdan hareket edersek,

$$\begin{aligned}
 \frac{4^{k+1}-1}{3} (F_{n,k}(\hat{K}) + 2F_{n,k}(\hat{T})) &= \sum_{i=0}^k 4^i (E_{n,k-i}(K) + 2E_{n,k-i}(T)) = E_{n,k}(K) + 2E_{n,k}(T) + \sum_{i=1}^k 4^i (E_{n,k-i}(K) + 2E_{n,k-i}(T)) \\
 &= E_{n,k}(K) + 2E_{n,k}(T) + \sum_{i=0}^{k-1} 4^{i+1} (E_{n,k-(i+1)}(K) + 2E_{n,k-(i+1)}(T)) = E_{n,k}(K) + 2E_{n,k}(T) + 4 \sum_{i=0}^{k-1} 4^i (E_{n,k-1-i}(K) + 2E_{n,k-1-i}(T)) \\
 &\stackrel{(2.83)}{=} E_{n,k}(K) + 2E_{n,k}(T) + 4 \cdot \frac{4^k-1}{3} (F_{n,k-1}(\hat{K}) + 2F_{n,k-1}(\hat{T})) = E_{n,k}(K) + 2E_{n,k}(T) + \frac{4^{k+1}-4}{3} (F_{n,k-1}(\hat{K}) + 2F_{n,k-1}(\hat{T}))
 \end{aligned}$$

eşitliklerine göre teoremdaki (2.74)'ü şu şekilde elde etmiş oluruz:

$$(2.84) \quad \frac{4^{k+1}-1}{3} F_{n,k}(\hat{K}) - \frac{4^{k+1}-4}{3} F_{n,k-1}(\hat{K}) + 2 \left(\frac{4^{k+1}-1}{3} F_{n,k}(\hat{T}) - \frac{4^{k+1}-4}{3} F_{n,k-1}(\hat{T}) \right) = E_{n,k}(K) + 2E_{n,k}(T).$$

Şu halde bu sonuçla (2.76) ve (2.79)'u genel olarak şu şekilde formüle edip teoremdaki (2.73)'ü şu şekilde verebiliriz artık:

$$(2.85) \quad \begin{cases} \frac{4^{k+1}-1}{3} F_{n,k}(\hat{K}) - \frac{4^{k+1}-4}{3} F_{n,k-1}(\hat{K}) = E_{n,k}(K) + 2^{2p} \cdot E_{n+p,k}(A), \\ \frac{4^{k+1}-1}{3} F_{n,k}(\hat{T}) - \frac{4^{k+1}-4}{3} F_{n,k-1}(\hat{T}) = E_{n,k}(T) - 2^{2p-1} E_{n+p,k}(A). \end{cases}$$

Sonuç 2.3. Burada yine Teorem 2.5'teki sonuçları Teorem 2.4 ile birlikte daha da kısaltabilir ve yeni sonuçlara erişebiliriz!

Buna göre ilkin (2.73)'ten

$$\begin{aligned}
 E_{n,k}(K) + 2^{2p} \cdot E_{n+p,k}(A) &\stackrel{(2.73)}{=} \frac{4^{k+1}-1}{3} F_{n,k}(\hat{K}) - \frac{4^{k+1}-4}{3} F_{n,k-1}(\hat{K}) \stackrel{(2.11)}{=} \frac{4^{k+1}-1}{3} \cdot \frac{4^{k+1}F_{n,k-1}(\hat{K}) - F_{n-1,k-1}(\hat{K})}{4^{k+1}-1} - \frac{4^{k+1}-4}{3} F_{n,k-1}(\hat{K}) \\
 &= \frac{4^{k+1}F_{n,k-1}(\hat{K}) - F_{n-1,k-1}(\hat{K}) - (4^{k+1}-4)F_{n,k-1}(\hat{K})}{3} = \frac{4F_{n,k-1}(\hat{K}) - F_{n-1,k-1}(\hat{K})}{3}, \\
 E_{n,k}(T) - 2^{2p-1} E_{n+p,k}(A) &\stackrel{(2.73)}{=} \frac{4^{k+1}-1}{3} F_{n,k}(\hat{T}) - \frac{4^{k+1}-4}{3} F_{n,k-1}(\hat{T}) \stackrel{(2.11)}{=} \frac{4^{k+1}-1}{3} \cdot \frac{4^{k+1}F_{n,k-1}(\hat{T}) - F_{n-1,k-1}(\hat{T})}{4^{k+1}-1} - \frac{4^{k+1}-4}{3} F_{n,k-1}(\hat{T}) \\
 &= \frac{4^{k+1}F_{n,k-1}(\hat{T}) - F_{n-1,k-1}(\hat{T}) - (4^{k+1}-4)F_{n,k-1}(\hat{T})}{3} = \frac{4F_{n,k-1}(\hat{T}) - F_{n-1,k-1}(\hat{T})}{3}
 \end{aligned}$$

eşitliklerine göre şu bağıntılar geçerli olur:

$$(2.86) \quad \begin{cases} \frac{4F_{n,k-1}(\hat{K}) - F_{n-1,k-1}(\hat{K})}{3} = E_{n,k}(K) + 2^{2p} \cdot E_{n+p,k}(A), \\ \frac{4F_{n,k-1}(\hat{T}) - F_{n-1,k-1}(\hat{T})}{3} = E_{n,k}(T) - 2^{2p-1} E_{n+p,k}(A). \end{cases}$$

Bu durumda bu son eşitlik çiftinin ikincisinin her iki tarafının 2 katını alıp ilkiyle taraf tarafa toplarsak (2.74) eşitliği şu hale dönüşür:

$$(2.87) \quad \frac{4F_{n,k-1}(\hat{K}) - F_{n-1,k-1}(\hat{K})}{3} + 2 \cdot \frac{4F_{n,k-1}(\hat{T}) - F_{n-1,k-1}(\hat{T})}{3} = E_{n,k}(K) + 2E_{n,k}(T).$$

Peki bu doğru mu? Kesinlikle öyledir çünkü,

$$\begin{aligned} E_{n,k}(K) + 2E_{n,k}(T) &\stackrel{(2.87)}{=} \frac{4F_{n,k-1}(\hat{K}) - F_{n-1,k-1}(\hat{K})}{3} + 2 \cdot \frac{4F_{n,k-1}(\hat{T}) - F_{n-1,k-1}(\hat{T})}{3} = 4 \cdot \frac{F_{n,k-1}(\hat{K}) + 2F_{n,k-1}(\hat{T})}{3} - \frac{F_{n-1,k-1}(\hat{K}) + 2F_{n-1,k-1}(\hat{T})}{3} \\ &\stackrel{(2.68)}{=} 4E_{n+1,k}(K) - E_{n,k}(K) \Rightarrow 4E_{n+1,k}(K) = E_{n,k}(K) + 2E_{n,k}(T) \Rightarrow E_{n+1,k}(K) = \frac{E_{n,k}(K) + E_{n,k}(T)}{2} \end{aligned}$$

işleminin sonucu (2.7)'yi verir!

Eğer benzer şekilde (2.73)'ü ispatlamak istersek,

$$\begin{aligned} &\frac{4^{k+1} - 1}{3} F_{n,k}(\hat{K}) - \frac{4^{k+1} - 4}{3} F_{n,k-1}(\hat{K}) + 2 \left(\frac{4^{k+1} - 1}{3} F_{n,k}(\hat{T}) - \frac{4^{k+1} - 4}{3} F_{n,k-1}(\hat{T}) \right) = E_{n,k}(K) + 2E_{n,k}(T) \\ &(4^{k+1} - 1) \cdot \frac{F_{n,k}(\hat{K}) + 2F_{n,k}(\hat{T})}{3} - (4^{k+1} - 4) \cdot \frac{F_{n,k-1}(\hat{K}) + 2F_{n,k-1}(\hat{T})}{3} = E_{n,k}(K) + 2E_{n,k}(T) \\ &\stackrel{(2.68)}{(4^{k+1} - 1)E_{n+1,k+1}(K) - (4^{k+1} - 4)E_{n+1,k}(K)} \stackrel{(2.68)}{=} E_{n,k}(K) + 2E_{n,k}(T) \\ &(4^{k+1} - 1)E_{n+1,k+1}(K) - (4^{k+1} - 4)E_{n+1,k}(K) = E_{n,k}(K) + E_{n,k}(T) + E_{n,k}(T) = 2E_{n+1,k}(K) + E_{n,k}(T) \\ &\stackrel{(2.11)}{(4^{k+1} - 1) \cdot \frac{4^{k+1}E_{n+1,k}(K) - E_{n,k}(K)}{4^{k+1} - 1} - (4^{k+1} - 4)E_{n+1,k}(K)} \stackrel{(2.11)}{=} 2E_{n+1,k}(K) + E_{n,k}(T) \\ &4E_{n+1,k}(K) - E_{n,k}(K) = 2E_{n+1,k}(K) + E_{n,k}(T) \\ &E_{n+1,k}(K) = \frac{E_{n,k}(K) + E_{n,k}(T)}{2} \end{aligned}$$

işleminin sonucunun yine (2.7)'yi verdiğini görürüz!

Burada son olarak (2.73) ya da (2.86)'daki $E_{n+p,k}(A)$ 'yı hesaplayabilmek için $E_{n+1,k+1}(K)$ için (2.7)'yi kullanırsak,

$$\begin{aligned} \frac{E_{n,k+1}(K) + E_{n,k+1}(T)}{2} &= E_{n+1,k+1}(K) \stackrel{(2.68)}{=} \frac{F_{n,k}(\hat{K}) + 2F_{n,k}(\hat{T})}{3} \\ 3 \cdot \frac{F_{n-1,k}(\hat{K}) + 2F_{n-1,k}(\hat{T})}{3} + 3E_{n,k+1}(T) &\stackrel{(2.68)}{=} 3E_{n,k+1}(K) + 3E_{n,k+1}(T) = 2F_{n,k}(\hat{K}) + 4F_{n,k}(\hat{T}) \\ 3E_{n,k+1}(T) &= 2F_{n,k}(\hat{K}) + 4F_{n,k}(\hat{T}) - F_{n-1,k}(\hat{K}) - 2F_{n-1,k}(\hat{T}) \\ E_{n,k+1}(T) &= \frac{2F_{n,k}(\hat{K}) - F_{n-1,k}(\hat{K}) + 4F_{n,k}(\hat{T}) - 2F_{n-1,k}(\hat{T})}{3} \end{aligned}$$

eşitliklerine göre

$$(2.88) \quad E_{n+1,k+1}(T) = \frac{2F_{n+1,k}(\hat{K}) - F_{n,k}(\hat{K}) + 4F_{n+1,k}(\hat{T}) - 2F_{n,k}(\hat{T})}{3}$$

bağıntısının geçerli olduğuna dikkat etmemiz gerekiyor.

Şu halde (2.86)'daki her iki eşitlikten de,

$$\begin{aligned} 2^{2p} \cdot E_{n+p,k}(A) &\stackrel{(2.86)}{=} \frac{4F_{n,k-1}(\hat{K}) - F_{n-1,k-1}(\hat{K})}{3} - E_{n,k}(K) \stackrel{(2.68)}{=} \frac{4F_{n,k-1}(\hat{K}) - F_{n-1,k-1}(\hat{K})}{3} - \frac{F_{n-1,k-1}(\hat{K}) + 2F_{n-1,k-1}(\hat{T})}{3} = 2 \cdot \frac{2F_{n,k-1}(\hat{K}) - F_{n-1,k-1}(\hat{K}) - F_{n-1,k-1}(\hat{T})}{3}, \\ 2^{2p-1} \cdot E_{n+p,k}(A) &\stackrel{(2.86)}{=} E_{n,k}(T) - \frac{4F_{n,k-1}(\hat{T}) - F_{n-1,k-1}(\hat{T})}{3} \stackrel{(2.88)}{=} \frac{2F_{n,k-1}(\hat{K}) - F_{n-1,k-1}(\hat{K}) + 4F_{n,k-1}(\hat{T}) - 2F_{n-1,k-1}(\hat{T})}{3} - \frac{4F_{n,k-1}(\hat{T}) - F_{n-1,k-1}(\hat{T})}{3} \\ &= \frac{2F_{n,k-1}(\hat{K}) - F_{n-1,k-1}(\hat{K}) - F_{n-1,k-1}(\hat{T})}{3} \end{aligned}$$

işlemlerinin sonuçlarından görüldüğü üzere $E_{n+p,k}(A)$ için şu bağıntı geçerli olur:

$$(2.89) \quad E_{n+p,k}(A) = \frac{2F_{n,k-1}(\hat{K}) - F_{n-1,k-1}(\hat{K}) - F_{n-1,k-1}(\hat{T})}{3 \cdot 2^{2p-1}}.$$

Burada dikkat edilirse pay inanılmaz hızla sıfıra gider, dolayısıyla (2.75)'in doğru olduğunu görürüz!

Not 2.4. *Ole Amble*'in en genel haldeki algoritmasına ilişkin yukarıdaki Teorem 2.4&2.5 ve Sonuç 2.3'teki bağıntıların Mathematica'da nasıl çalıştıklarını “[14. Teorem 2.4&2.5 ve Sonuç 2.3'teki Bağıntıların Mathematica'daki Uygulamaları](#)”nda görebilirsiniz. Bu uygulamalarda örnek olarak yine **Romberg**'in örneğini seçtim. İşte bu örnek üzerinde Teorem 2.4&2.5 ve Sonuç 2.3'teki 9 bağıntıyı tablolar halinde çalıştırdım ve siz bu bağıntılardaki sol ve sağ taraflarındaki ifadelerle ait tablolardaki aynı elemanları karşılaştırarak elde edilen sonuçların aynı, dolayısıyla bu 9 bağıntının da doğru olduklarını görebilirsiniz.

2.3. Uygulamalar. Aşağıda **Romberg** tarafından 14.02.1955'te ele alınan [\(1.55\)](#)'teki örneği **Ole Amble**'in (2.4)'teki algoritmasına ve onun yakınsaklık problemini düzelttiği (2.37)'den $p = 1$ için elde ettiğim algoritmaya göre 2 farklı uygulamasını tüm yönleriyle inceleyecek ve aradaki farkları göstereceğim!

Uygulama 1 (Romberg'in Örneği, 14.02.1955). **Romberg**, "[Vereinfachte numerische Integration, Norske Vid. Selsk. Forh. Trondheim, v. 28, 1955, p. 30-36, MR 61, 517](#)" adlı tezinde [\(1.55\)](#)'teki örneğine ilkin kendi metodunu (bileşik trapez kuralı) uygular, sonra tezinin sonunda [2] ile işaret ettiği **Ole Amble**'in "[A set of formulas for numerical integration, Norske Vid. Selsk. Forh. Trondheim, v. 25, 1952, p. 38-41. MR 14, 907](#)"⁽⁸⁾ adlı tezindeki yeni metodu. Bu yeni metottan "**Ole Amble'in Metodu**" olarak söz ederken girişte şöyle der: "Diğer bazı yaklaşım yöntemleri de, yaklaşık değerler elde edilir edilmez metodumuza uyarlanabilir. Örneğin O. AMBLE [2], $a \leq x \leq b$ integral aralığının dışında her 2 tarafa h uzaklığında birer nokta ekleyerek I 'ya daha iyi bir yaklaşımın nasıl bulunabileceğini gösterdi (Auch manche anderen Näherungsmethoden können unser Verfahren entsprechend anpassen, sobald Näherungswerte bei mehrmaliger feinerer Teilung vorliegen. So hat u.a. O. AMBLE [2] gezeigt, wie man durch Hinzufügen je eines Punktes im Abstände h auf beiden Seiten ausserhalb des Integrationsgebietes $a \leq x \leq b$ eine bessere Annäherung an I finden kann)". Fakat her 2 metoda ilişkin **Romberg**'in hesapları artık günümüzde terkedilmiştir. Çünkü **Romberg**'in trapez ve orta nokta formüllerini kullanması günümüzdeki gibi değil, ilkel bir şekildeydi (Bkz. "[1.6. Romberg'in Orijinal Metodu](#)", S. 7-10 ve "[1.2.1. Romberg Metodu Hakkındaki İlk Gözlemim](#)", S. 23-24). Öyle ki **Sheppard** bile, 14.6.1900'de trapez ve orta nokta formüllerini günümüzdeki gibi kullanıyordu! Tezinin sonunda da kendi metodundan elde edilen mavi tabloyu ve **Ole Amble**'in metodundan elde edilen turuncu tabloyu verir (ki bu tabloları böyle söylememin nedeni, **Romberg**'in tezini 23.12.2018, 18:30'da aldıktan sonra 23.12.2018, 19:30-24.12.2018, 11:00 tarihleri arasında MS-Office 2016 ile soluksuz bir şekilde kopya ederken bu tabloları ayırt edici şekilde düzenlememden kaynaklanır. Bkz. "[1.6.4.1. Romberg'in Orijinal Makalesi ve Sonuçları](#)", S. 12).

Şimdi (2.4)'teki **Ole Amble**'in yaklaşıklıklarını **Romberg**'in [\(1.55\)](#)'teki örneğine uygularsak, K_n [\(1.61\)](#)'den ve T_n [\(1.67\)](#)'den olmak üzere

$$(2.90) \quad \begin{cases} K_n = \frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)} = \frac{\pi}{2^{n+2}} \cot\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right), \\ T_n = \frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)} = \frac{\pi}{2^{n+2}} \csc\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \end{cases}$$

ve (2.2)'deki **Ole Amble**'in yaklaşıklığından,

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{h_n}{24} (f(a+h_n) - f(a-h_n) + f(b-h_n) - f(b+h_n)) = \frac{1-0}{24} \left(f\left(0 + \frac{1-0}{2^n}\right) - f\left(0 - \frac{1-0}{2^n}\right) + f\left(1 - \frac{1-0}{2^n}\right) - f\left(1 + \frac{1-0}{2^n}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2^{n+3} \cdot 3} \left(f\left(\frac{1}{2^n}\right) - f\left(-\frac{1}{2^n}\right) + f\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) - f\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \right) = \frac{1}{2^{n+3} \cdot 3} \left(\frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2^n}\right) - \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2^n}\right)\right) + \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\right) - \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)\right) \right) \\ &= \frac{1}{2^{n+3} \cdot 3} \left(\frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) - \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) + \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2^{n+1}}\right) - \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \right) = \frac{1}{2^{n+3} \cdot 3} \left(\frac{\pi}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) + \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \right) = \frac{\pi}{2^{n+3} \cdot 3} \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \end{aligned}$$

eşitliklerine göre

$$(2.91) \quad A_n = \frac{\pi}{2^{n+3} \cdot 3} \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$$

sonuçları geçerli olur.

Şu halde (2.90)&(2.91)'i (2.4)'te yerlerine koyarsak $\hat{K}_n$ 'yi

$$\begin{aligned} \hat{K}_n &= K_n + A_n = \frac{\pi}{2^{n+2}} \cot\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) + \frac{\pi}{2^{n+3} \cdot 3} \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \frac{\pi}{2^{n+3} \cdot 3} \left(6 \cot\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \right) = \frac{\pi}{2^{n+2} \cdot 3} \cot\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \left(4 - \cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \right) = T_{2^n} \left(4 - \left(\frac{T_{2^n}}{U_{2^n}} \right)^2 \right) \\ &= T_{2^n} \frac{4U_{2^n}^2 - T_{2^n}^2}{3U_{2^n}^2} \end{aligned}$$

ve $\hat{T}_n$ 'yi

$$\begin{aligned} \hat{T}_n &= T_n - 2A_{n+1} = \frac{\pi}{2^{n+2}} \csc\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) - 2 \cdot \frac{\pi}{2^{n+4} \cdot 3} \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) = \frac{\pi}{2^{n+2}} \csc\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) - \frac{\pi}{2^{n+3} \cdot 3} \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) = \frac{\pi}{2^{n+3} \cdot 3} \left(6 \csc\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \right) \\ &= \frac{\pi}{2^{n+3} \cdot 3} \csc\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \left(5 + \cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \right) = U_{2^n} \left(5 + \left(\frac{T_{2^n}}{U_{2^n}} \right)^2 \right) = \frac{5U_{2^n}^2 + T_{2^n}^2}{6U_{2^n}} \end{aligned}$$

eşitliklerine göre

$$(2.92) \quad \begin{cases} \hat{K}_n = K_n \frac{4T_n^2 - K_n^2}{3T_n^2} = \frac{\pi}{2^{n+2} \cdot 3} \cot\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \left(4 - \cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \right), \\ \hat{T}_n = \frac{5T_n^2 + K_n^2}{6T_n} = \frac{\pi}{2^{n+3} \cdot 3} \csc\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \left(5 + \cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \right) \end{cases}$$

şeklinde en sade şekilde yazmış oluruz (20.05.2021, 20:29:33-20:36:17. Bkz. "[K_n ve T_n için İndirgeme Bağlantıları](#)", S. 17). Bu formüller hem **Ole Amble**'in algoritmasından elde edilen yaklaşıklıkların en sade halidir, hem de **Ole Amble** ile **Romberg**'in yaklaşıklıkları arasındaki bağlantıları gösterir.

Güzel, demek ki bu formülleri "[4.1. Ole Amble Algoritması](#)" adlı makalemde vermedim, ancak doğru bir şekilde genelleştirmişim. Çünkü bu konudaki hocam **Romberg** idi (Y.N. Bu makaleye ek olarak "[Mathematica'da Lineer E-ATA M Algoritması Üzerindeki Ole Amble Algoritmasının Romberg Örneğine Uygulanmasıyla Elde Edilen Yaklaşıklıklara Sembolik Bir Yaklaşım](#)" dosyasına bakabilirsiniz. Daha fazla bilgi almak için "[K_n ve T_n için İndirgeme Bağlantıları](#)" adlı web sayfa bakınız). Ayrıca halen **Ole Amble**'in "[A set of formulas for numerical integration, Norske Vid. Selsk. Forh. Trondheim, v. 25, 1952, p. 38-41. MR 14, 907](#)" adlı tezinin elimde olmadığını

⁽⁸⁾ Bu tezi de Trondheim Üniversitesi Matematik Bölümü'nden **Prof. Brynjulf Owren**'den bir e-posta göndererek (30.05.2021, 07:54) istemiştim ama bana gelen yanıtta (30.05.2021, 09:16) "Ne yazık ki elimde mevcut değil!" yanıtını aldım. Ayrıca "[K_n ve T_n için İndirgeme Bağlantıları](#)" adlı makalem 26. sayfasında Norveç Kralı'na, himayesindeki DKNVS'den bu tezin akıbeti için bir çağrıda bulunmuştum!

Uygulamalar

özellikle belirtsem bile, Resim 2.1’deki artist, aslında kendi kendisine yardım etti. Ben, sadece **Romberg**’in metodundan elde ettiğim deneyimlerimi döktürdüm, o kadar. Keşke bu şekildeki düşünüş 2019’da aklıma gelseydi, ama o sırada da **Ole Amble**’ın tezinin **Brynjulf Owren**’in elinde olduğunu zannediyor ve buna güveniyordum!

Romberg ile Ole Amble’in Tablolarındaki Elemanlar Arasındaki İlişkiler. Bu konuda ilk bulgularımı “[K_n ve T_n İçin İndirgeme Bağlantıları](#)” adlı makalemden vermiştim (Bkz. [EK 1](#)’deki “[Tablolardaki Elemanlar Arasındaki İlişkiler](#)”, S. 17-19). Bunlar Teorem 2.1’de geçen ve ispatında ilgili yerlerde belirttiğim birkaç bulgu idi. Kaldı ki aynı makalemden (1.78), dolayısıyla (1.82) bağıntısını ilk kez “[4.1. Ole Amble Algoritması](#)” adlı makalemden görmüştüm ama Teorem 2.1&2.2’deki kadar genel bağıntıların olduğunu takdir edememiştim. Fakat burada ilkinde pas geçtiğim ve ikincisinde biraz bahsettiğim bu bağıntıların neler olduklarını Teorem 2.1&2.2’de tamamen açığa çıkardım. Bunların ispatlarını vermeme rağmen Sonuç 2.1’de tekrar ispatladım. Bunlar daha çok Teorem 2.1&2.2’deki bağıntıların doğrulanmasına ilişkin son derece şık geçişlere sahip dolaylı ispatlardır.

Bakınız neler oluyor: **Romberg**, 14.02.1955’te “[Vereinfachte numerische Integration, Norske Vid. Selsk. Forh. Trondheim, v. 28, 1955, p. 30-36, MR 61, 517](#)” adlı tezinde

Artan Mertebelere Göre Yaklaşık Değerler Tablosu				
Aralık Uzunluğu	Kalan Değerler			
	h^2	h^4	h^6	h^8
8h	$K_0 = 0,785398163$			
	$T_0 = 1,110720735$			
4h	$K_1 = 0,948059449$	$E_{1,1}(K) = 1,002279878$		
	$T_1 = 1,026172153$	$E_{1,1}(T) = 0,997989293$		
2h	$K_2 = 0,987115801$	$E_{2,1}(K) = 1,000134584$	$E_{2,2}(K) = 0,999991566$	
	$T_2 = 1,006454543$	$E_{2,1}(T) = 0,999882006$	$E_{2,2}(T) = 1,000008187$	
h	$K_3 = 0,996785172$	$E_{3,1}(K) = 1,000008296$	$E_{3,2}(K) = 0,999999876$	$E_{3,3}(K) = 1,000000008$

Tablo 2.1. **Romberg**’in kendi metoduna göre hazırladığı tablo.

ve

Artan Mertebelere Göre Yaklaşık Değerler Tablosu				
Aralık Uzunluğu	Kalan Değerler			
	h^4	h^6	h^8	h^{10}
8h	$\hat{K}_0 = 0,916297857$			
	$\hat{T}_0 = 1,018160673$			
4h	$\hat{K}_1 = 0,994339480$	$F_{1,1}(\hat{K}) = 0,999542255$		
	$\hat{T}_1 = 1,001125581$	$F_{1,1}(\hat{T}) = 0,999989908$		
2h	$\hat{K}_2 = 0,999639087$	$F_{2,1}(\hat{K}) = 0,999992394$	$F_{2,2}(\hat{K}) = 0,999999539$	
	$\hat{T}_2 = 1,000070227$	$F_{2,1}(\hat{T}) = 0,999999870$	$F_{2,2}(\hat{T}) = 1,000000028$	
h	$\hat{K}_3 = 0,999977330$	$F_{3,1}(\hat{K}) = 0,999999879$	$F_{3,2}(\hat{K}) = 0,999999998$	$F_{3,3}(\hat{K}) = 1,0$

Tablo 2.2. **Romberg**’in **Ole Amble**’nin metoduna göre hazırladığı tablo.

tablolarını vermiş ama bu tablolardaki elemanlar arasındaki bağıntıları vermemişti!

Çok ilginçtir, ilkin Teorem 2.2’ye göre bu tablolardaki elemanlar arasında 2. Snell bağıntısının geçerli olduğunu görüyoruz. Bu durumda (2.28)’den K’ye ait ekstrapolasyonik yaklaşıklıklar

$$(2.93) \left\{ \begin{array}{l} E_{1,1}(K) = \frac{2F_{1,0}(\hat{K}) + F_{0,0}(\hat{T})}{3} = \frac{2\hat{K}_1 + \hat{T}_0}{3} = \frac{2 \times 0,994339480 + 1,018160673}{3} = \frac{3,006839633}{3} = 1,002279877\bar{6} \cong 1,002279878, \\ E_{2,1}(K) = \frac{2F_{2,0}(\hat{K}) + F_{1,0}(\hat{T})}{3} = \frac{2\hat{K}_2 + \hat{T}_1}{3} = \frac{2 \times 0,999639087 + 1,001125581}{3} = \frac{3,000403755}{3} = 1,000134585 \cong 1,000134584, \\ E_{3,1}(K) = \frac{2F_{3,0}(\hat{K}) + F_{2,0}(\hat{T})}{3} = \frac{2\hat{K}_3 + \hat{T}_2}{3} = \frac{2 \times 0,999977330 + 1,000070227}{3} = \frac{3,000024887}{3} = 1,000008295\bar{6} \cong 1,000008296. \\ E_{2,2}(K) = \frac{2F_{2,1}(\hat{K}) + F_{1,1}(\hat{T})}{3} = \frac{2 \times 0,999992394 + 0,999989908}{3} = \frac{2,999974696}{3} = 0,999991565\bar{3} \cong 0,999991566, \\ E_{3,2}(K) = \frac{2F_{3,1}(\hat{K}) + F_{2,1}(\hat{T})}{3} = \frac{2 \times 0,999999879 + 0,999999870}{3} = \frac{2,999999628}{3} = 0,999999876. \\ E_{3,3}(K) = \frac{2F_{3,2}(\hat{K}) + F_{2,2}(\hat{T})}{3} = \frac{2 \times 0,999999998 + 1,000000028}{3} = \frac{3,000000024}{3} = 1,000000008. \end{array} \right.$$

şeklinde hesaplanırken T’ye ait ekstrapolasyonik yaklaşıklıklar (2.35)’teki özdeşlikten bulunur.

Şimdi az önce yukarıda değindiğim gibi 17-19. sayfalardaki “[Tablolardaki Elemanlar Arasındaki İlişkiler](#)”deki (1.84)’ten (ki burada (2.19)’dur) elde edilen (1.86) ve (1.88)’den (ki burada (2.22)’dir) elde edilen (1.89)’daki özdeşliklerinin uygulamasını şöyle verebilirim:

$$(2.94) \left\{ \begin{array}{l} 2(5F_{2,1}(\hat{K}) - 4\hat{K}_2) + 5F_{1,1}(\hat{T}) - 4\hat{T}_1 = 2(5F_{2,1}(\hat{K}) - 4F_{2,0}(\hat{K})) + 5F_{1,1}(\hat{T}) - 4F_{1,0}(\hat{T}) = 2E_{2,1}(K) + E_{1,1}(T) \\ 2(5 \times 0,999992394 - 4 \times 0,999639087) + 5 \times 0,999989908 - 4 \times 1,001125581 = 2 \times 1,000134584 + 0,997989293 \\ 2 \times 1,001405622 + 0,995447216 = 2,998258461 \\ 2,99825846 = 2,998258461, \\ 2(5F_{3,1}(\hat{K}) - 4\hat{K}_3) + 5F_{2,1}(\hat{T}) - 4\hat{T}_2 = 2(5F_{3,1}(\hat{K}) - 4F_{3,0}(\hat{K})) + 5F_{2,1}(\hat{T}) - 4F_{2,0}(\hat{T}) = 2E_{3,1}(K) + E_{2,1}(T) \\ 2(5 \times 0,999999879 - 4 \times 0,999977330) + 5 \times 0,999999870 - 4 \times 1,000070227 = 2 \times 1,000008296 + 0,999882006 \\ 2 \times 1,000090075 + 0,999718442 = 2,999898598 \\ 2,999898592 = 2,999898598. \\ 2(21F_{3,2}(\hat{K}) - 20F_{3,1}(\hat{K})) + 21F_{2,2}(\hat{T}) - 20F_{2,1}(\hat{T}) = 2E_{3,2}(K) + E_{2,2}(T) \\ 2(21 \times 0,999999998 - 20 \times 0,999999879) + 21 \times 1,000000028 - 20 \times 0,999999870 = 2 \times 0,999999876 + 1,000008187 \\ 2 \times 1,000002378 + 1,000003188 = 3,000007939 \\ 3,000007944 = 3,000007939. \end{array} \right.$$

Uygulamalar

Bir diğer özdeşlik (2.34)'tür. Fakat bu özdeşliği çıkarmadan önce (1.85)'in genelleştirilmiş olan (1.83), dolayısıyla (1.87)'yi hatalı çıkarmıştım. Çünkü o sırada $E_{n+1,k}(A)$ 'ları hesaba katmamış ve buradaki gibi E ve F ekstrapolasyonlarının ayırımına gitmemiştim. Yani sizin anlayacağınız şey, dalgınlıktan F'yi E ile karıştırıp (ki buna kanıt olarak (1.82)'de eşitliğin her iki yanının E'sini alarak (1.83)'ü ve bir diğer dalgınlık yaptığım yerdeki (1.85)'i verebilirim), dolayısıyla E gibi düşünmüşüm ve bu yüzden hem (1.85)'i hem de (1.87)'yi hatalı bir şekilde vermişim. Ancak (1.83)'te yaptığım hatayı burada (2.33)'e göre (2.34) özdeşliğiyle düzelttim. Demek ki 2 ayağımızı (ekstrapolasyonu) 1 pabuca (ekstrapolasyona) sokmaya çalışırsak olacağı bu imiş. Bu hatanın dışında orda başka bir hata yoktur. Çünkü (1.83)'ü orada başka bir bağıntıyla ilişkilendirmemiş ve yeni bir bağıntı için bir karalamada bulunmuştum!

Şu halde (1.83)'ün doğrusu (2.33)'e göre (2.34) olduğuna göre, hesaplarımıza başlayabiliriz:

$$(2.95) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2. \frac{4\hat{K}_2 - \hat{K}_1}{3} + \frac{4\hat{T}_1 - \hat{T}_0}{3} = 2. \frac{4F_{2,0}(\hat{K}) - F_{1,0}(\hat{K})}{3} + \frac{4F_{1,0}(\hat{T}) - F_{0,0}(\hat{T})}{3} = 2E_{2,1}(K) + E_{1,1}(T) \\ 2. \frac{4 \times 0,999639087 - 0,994339480}{3} + \frac{4 \times 1,001125581 - 1,018160673}{3} = 2 \times 1,000134584 + 0,997989293 \\ 2 \times 1,001405622\bar{6} + 0,995447217 = 2,998258461 \\ 2,998258462\bar{3} = 2,998258461, \\ 2. \frac{4\hat{K}_3 - \hat{K}_2}{3} + \frac{4\hat{T}_2 - \hat{T}_1}{3} = 2. \frac{4F_{3,0}(\hat{K}) - F_{2,0}(\hat{K})}{3} + \frac{4F_{2,0}(\hat{T}) - F_{1,0}(\hat{T})}{3} = 2E_{3,1}(K) + E_{2,1}(T) \\ 2. \frac{4 \times 0,999977330 - 0,999639087}{3} + \frac{4 \times 1,000070227 - 1,001125581}{3} = 2 \times 1,000008296 + 0,999882006 \\ 2 \times 1,000090077\bar{6} + 0,999718442\bar{3} = 2,999898598 \\ 2,999898597\bar{6} = 2,999898598. \\ 2. \frac{4F_{3,1}(\hat{K}) - F_{2,1}(\hat{K})}{3} + \frac{4F_{2,1}(\hat{T}) - F_{1,1}(\hat{T})}{3} = 2E_{3,2}(K) + E_{2,2}(T) \\ 2. \frac{4 \times 0,999999879 - 0,999992394}{3} + \frac{4 \times 0,999999870 - 0,999989908}{3} = 2 \times 0,999999876 + 1,000008187 \\ 2 \times 1,000002374 + 1,000003190\bar{6} = 3,000007939 \\ 3,000007938\bar{6} = 3,000007939. \end{array} \right.$$

Burada son olarak Tablo 2.2'den bazı $E_{n+1,k}(A)$ değerlerinin (2.36)'ya göre hesaplanabildiğini bildirmem gerekiyor!

Uygulama 2 (Ole Amble'in Yaklaşıklıklarındaki Yakınsaklık Probleminin Düzeltilmesine İlişkin Bir Örnek). Öncelikle Tablo 2.2'de görüldüğü üzere **Ole Amble**'in $\hat{K}_n$ ile $\hat{T}_n$, dolayısıyla bunların F ekstrapolasyonları altındaki görüntüleri olan $F_{n,k}(\hat{K})$ ile $F_{n,k}(\hat{T})$ çiftlerinin 1'e yakınsamalarında ilkinde 1 ondalık kadar gecikme vardır. Bunun nedeni **Ole Amble**'in, (2.4)'teki yaklaşıklıkları eş yakınsaklıkta tanımlayamamış olmasında yatar. Eğer bu problemi ortadan kaldırmak için (2.37)'de $p = 1$ alırsak **Ole Amble**'in (2.4)'teki algoritmasının bir varyantını (çeşidini) yazmış oluruz (ki **Ole Amble** da, [NİM](#) oyununun dijital bir varyantını geliştirmiş ve NUSSE'de çalıştırılan ilk program bu olmuştu. Bkz. [“ \$K_n\$ ve \$T_n\$ İçin İndirgeme Bağıntıları](#)”, Önsöz, Resim 1&2, S. III-IV):

$$(2.96) \quad \begin{cases} \hat{K}_n = K_n + 4A_{n+1} + O(h_n^4), \\ \hat{T}_n = T_n - 2A_{n+1} + O(h_n^4). \end{cases}$$

Bu formüllerde dikkat ederseniz $\hat{K}_n$ ve $\hat{T}_n$ yaklaşıklıkları I'ya hemen hemen eş yaklaşımlardadırlar. Bu nedenle **Ole Amble**'in yaklaşıklıklarının I'ya yakınsamalarındaki yakınsaklık bozukluğunu gidererek homojenize (eş yakınsaklık) etmiş oldum!

Burada **Romberg**'in (1.55)'teki örneği için K_n ve T_n (1.61)&(1.67)'ye ya da (1.74)'e göre

$$(2.97) \quad \begin{cases} K_n = \frac{\pi}{2^{n+2}} \cot\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right), \\ T_n = \frac{\pi}{2^{n+2}} \csc\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \end{cases}$$

olmak üzere A_{n+1} (2.38)'e göre şöyledir:

$$(2.98) \quad A_{n+1} = \frac{h_{n+1}}{24} [(f(a + h_{n+1}) - f(a - h_{n+1})) - (f(b + h_{n+1}) - f(b - h_{n+1}))].$$

Eğer A_{n+1} 'i (2.97)'ye göre hesaplarsak,

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= \frac{h_{n+1}}{24} (f(a + h_{n+1}) - f(a - h_{n+1}) + f(b - h_{n+1}) - f(b + h_{n+1})) = \frac{1-0}{24} \left(f\left(0 + \frac{1-0}{2^{n+1}}\right) - f\left(0 - \frac{1-0}{2^{n+1}}\right) + f\left(1 - \frac{1-0}{2^{n+1}}\right) - f\left(1 + \frac{1-0}{2^{n+1}}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2^{n+4} \cdot 3} \left(f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) - f\left(-\frac{1}{2^{n+1}}\right) + f\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) - f\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \right) = \frac{1}{2^{n+4} \cdot 3} \left(\frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2^{n+1}}\right) - \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right) + \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)\right) - \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)\right) \right) \\ &= \frac{1}{2^{n+4} \cdot 3} \left(\frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) - \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) + \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2^{n+2}}\right) - \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \right) = \frac{1}{2^{n+4} \cdot 3} \left(\frac{\pi}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) + \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \right) = \frac{\pi}{2^{n+4} \cdot 3} \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \end{aligned}$$

eşitliklerine göre

$$(2.99) \quad A_{n+1} = \frac{\pi}{2^{n+4} \cdot 3} \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$$

sonucu geçerli olur.

Şu halde (2.97)&(2.99)'u (2.96)'da yerlerine koyarsak $\hat{K}_n$ 'yi,

$$\hat{K}_n = K_n + 4A_{n+1} = K_n + 4 \cdot \frac{\pi}{2^{n+4} \cdot 3} \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) = K_n + \frac{\pi}{2^{n+2} \cdot 3} \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) = K_n + \frac{T_n^2 - K_n^2}{3T_n} = \frac{T_n^2 + 3T_n K_n - K_n^2}{3T_n}$$

ve $\hat{T}_n$ ’yi,

$$\begin{aligned}\hat{T}_n &= T_n - 2A_{n+1} = \frac{\pi}{2^{n+2}} \text{Csc}\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) - 2 \cdot \frac{\pi}{2^{n+4} \cdot 3} \text{Sin}\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) = \frac{\pi}{2^{n+2}} \text{Csc}\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) - \frac{\pi}{2^{n+3} \cdot 3} \text{Sin}\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) = \frac{\pi}{2^{n+3} \cdot 3} \left(6 \text{Csc}\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) - \text{Sin}\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)\right) \\ &= \frac{\pi}{2^{n+3} \cdot 3} \text{Csc}\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \left(5 + \text{Cos}^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)\right) = T_n \left(5 + \left(\frac{K_n}{T_n}\right)^2\right) = \frac{5T_n^2 + K_n^2}{6T_n}\end{aligned}$$

eşitliklerine göre

$$(2.100) \quad \begin{cases} \hat{K}_n = \frac{T_n^2 + 3T_n K_n - K_n^2}{3T_n} = \frac{\pi}{2^{n+2} \cdot 3} \text{Sin}\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \left(3 \text{Cot}\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) + \text{Sin}\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)\right), \\ \hat{T}_n = \frac{5T_n^2 + K_n^2}{6T_n} = \frac{\pi}{2^{n+3} \cdot 3} \text{Csc}\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \left(5 + \text{Cos}^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)\right) \end{cases}$$

şeklinde en sade şekilde yazmış oluruz. Burada dikkat ederseniz **Ole Amble**’in ikinci yaklaşıklıkılığı olan $\hat{T}_n$ hiç değişmedi; (1.76)’daki gibi kaldı!

Romberg’in Algoritması ile Ole Amble’in Yakınsaklık Problemi Düzeltilmiş Bir Algoritması’na Ait Tablolardaki Elemanlar Arasındaki İlişkiler. Öncelikle **Ole Amble**’in yakınsaklık problemi düzeltilmiş (2.96)’daki algoritmaya göre tablomuz şöyledir:

Artan Mertebelere Göre Yaklaşık Değerler Tablosu				
Aralık Uzunluğu	Kalan Değerler			
	h^4	h^6	h^8	h^{10}
8h	$\hat{K}_0 = 0,970518286$			
	$\hat{T}_0 = 1,018160673$			
4h	$\hat{K}_1 = 0,998152593$	$F_{1,1}(\hat{K}) = 0,999994880$		
	$\hat{T}_1 = 1,001125581$	$F_{1,1}(\hat{T}) = 0,999989908$		
2h	$\hat{K}_2 = 0,999884433$	$F_{2,1}(\hat{K}) = 0,999999889$	$F_{2,2}(\hat{K}) = 0,999999968$	
	$\hat{T}_2 = 1,000070227$	$F_{2,1}(\hat{T}) = 0,999999870$	$F_{2,2}(\hat{T}) = 1,000000028$	
h	$\hat{K}_3 = 0,999992775$	$F_{3,1}(\hat{K}) = 0,999999998$	$F_{3,2}(\hat{K}) = 0,999999999$	$F_{3,3}(\hat{K}) = 1.0000000000\mathbf{0057371307 \dots}$

Tablo 2.3. (2.96)’ya göre hazırlanmış Romberg tablosu.

Dikkat ederseniz Tablo 2.1’de $K_0 < K_1 < K_2 < K_3 < \dots < I = 1 < \dots < T_3 < T_2 < T_1 < T_0$ ya da $K_n < 1 < T_n$ eşitsizliklerindeki K_n ve T_n yaklaşıklıkları ve bunların E altındaki ekstrapolasyon değerleri 1’e hemen hemen eş yakınsarlarken bu durum Tablo 2.2’de bozulmuştur. İşte bu son tabloda bunu düzelttim. Yani $\hat{K}_0 < \hat{K}_1 < \hat{K}_2 < \hat{K}_3 < \dots < I = 1 < \dots < \hat{T}_3 < \hat{T}_2 < \hat{T}_1 < \hat{T}_0$ ya da $\hat{K}_n < 1 < \hat{T}_n$ eşitsizliklerindeki $\hat{K}_n$ ve $\hat{T}_n$ yaklaşıklıklarını ve bunların F altındaki ekstrapolasyon değerlerini de 1’e hemen hemen eş yakınsattım!

Peki böyle olunca ne oluyor?

Romberg, kendi tablosunun (Tablo 2.1) son sütununda $Q_8 = 1,000000008$ ’de göremediği sonucu **Ole Amble**’in tablosundaki (Tablo 2.2) $\hat{Q}_8 = 1,0$ ’da ancak görebiliyordu! Fakat onun güç-bela gördüğü bu sonucu, $\hat{K}_n$ ve $\hat{T}_n$ yaklaşıklıklarını 1’e hemen hemen eş yakınsattığımız için, 2 basamak fazlasıyla garantilemiş olduk!

Bu sonuç hakkında “[4.1. Ole Amble Algoritması](#)” adlı makalemde yaptığım araştırmaya göre, **Romberg**, [MADAS ATG-20](#) adlı 10-basamaklı bir hesap makinesi kullanıyordu ve bununla Tablo 2.2’deki son elemanı hesapladığı zaman,

$$(2.101) \quad F_{3,3}(\hat{K}) = \frac{256F_{3,2}(\hat{K}) - F_{2,2}(\hat{K})}{255} = \frac{256 \times 0,999999998 - 0,9999999539}{255} = 0,9999999998 \cong 1,0$$

sonucunu görüyordu (Bkz. (4.11)).

Romberg, bu son sonuç hakkında “[Vereinfachte numerische Integration, Norske Vid. Selsk. Forh. Trondheim, v. 28, 1955, p. 30-36, MR 61, 517](#)” adlı tezinin sonunda şöyle der: “ Q_8 ’in I ile 8 ondalıkta, hatta $\hat{Q}_8$ ’in 10 ondalıkta çakıştığını görüyoruz. Hangi yöntemin kullanılacağı tamamen F_k ’nin nasıl hesaplanabileceğine bağlıdır. Eğer bulması kolaysa, onları daha kesin olarak sınıflandırmak daha iyidir. Sayısal hesaplamamız çok fazla çalışma gerektiriyorsa, burada verildiği gibi yüksek bir yaklaşıklık yöntemini öneririz (Wir sehen, dass Q_8 mit I in 8, $\hat{Q}_8$ sogar in 10 Dezimalen übereinstimmt. Welche Methode man verwendet, hängt ganz davon ab, wie sich die F_k berechnen lassen. Sind sie leicht zu finden, teilt man besser feiner ein. Erfordert ihre numerische Berechnung viel Arbeit, dann empfiehlt sich eine Methode hoher Näherung, wie wir sie hier angegeben haben.)”

Peki **Romberg**, Tablo 2.3’teki son elemanı MADAS ATG-20’de hesaplamış olsaydı, nasıl bir sonuç görecekti?

Şu sonucu görecekti:

$$(2.102) \quad F_{3,3}(\hat{K}) = \frac{256 \times 0,999999999 - 0,999999968}{255} = 0,999999999 = 1,0.$$

Şimdi buraya kadar elde ettiğim deneyimime göre sonuç olarak şunları söyleyebilirim: Teorik ve uygulamalardan elde ettiğim sonuca göre **Ole Amble**’in (2.4)’teki algoritmasındaki $\hat{K}_n$, I ’ya yakınsarken $\hat{T}_n$ ’den 1 adım (basamak) geride kalıyor ve bu da Tablo 2.2’deki diğer elemanlara yansiyordu. Fakat **Ole Amble**’in algoritmasındaki bu problemi düzelttiğiniz zaman, yani (2.96)’daki yaklaşıklıkları kullandığınız zaman Tablo 2.3’ten gördüğünüz gibi dengeli sonuçlar ortaya çıkıyor ve **Romberg** kadar yorulmanıza gerek kalmıyordu. Çünkü **Romberg** integral sonucunu [MADAS ATG-20](#)’de Tablo 2.2’deki son elemanda $F_{3,3}(\hat{K}) = 1,0$ olarak okurken, bu sonuç Tablo 2.3’te daha $F_{3,2}(\hat{K}) = 1,0$ elemanında görülüyordu. Bu arkeolojik kalıntı ise [onlar için kötü şans ama bizim için iyi bir şans](#) oldu. Çünkü bu durum nedeniyle yaptığım araştırmaya göre **Romberg**’in **Ole Amble**’in (2.4)’teki algoritmasını değil, yakınsaklığı düzeltilmiş (2.96)’daki algoritmayı kullanması gerektiğini görebildim. Bununla birlikte **Romberg**’in, “Sayısal hesaplamamız çok fazla çalışma gerektiriyorsa, burada verildiği gibi yüksek bir yaklaşıklık yöntemi öneririz. (Erfordert ihre numerische Berechnung viel Arbeit, dann empfiehlt sich eine Methode hoher Näherung, wie wir sie hier angegeben haben.)” açıklamasıyla neyi kastettiği belli değildir. Yani **Ole Amble**’in (2.4)’teki algoritmasını mı kastediyor, yoksa bu konuda başka gelişmeler var mıydı, belli değil. Çünkü 1955’te yöntemi genel bir şekilde ortaya koyan ilk kimseydi (ki **Sheppard**, 1900’de bu yöntemi tekrarlı (iteratif) olarak ortaya koymadığı için genel olarak verememişti) ve o sırada **Ole Amble**’in 1952’de verdiği algoritma en iyisiydi (Bkz. “[1.1. En Genel Haldeki Ole Amble Algoritması’ndaki Yaklaşıklıklar/Parmentier, Sheppard ve Ole Amble’in yaklaşıklıklarının yaklaşım mertebesi nedir?](#)”).

Şimdi Tablo 2.1&2.3’teki elemanlar arasındaki ilişkilere gelince, ilkin Teorem 2.4’e göre 1. Snell bağıntısının geçerli olduğunu görürüz. Buna göre (2.68)’den K ’ye ait ekstrapolasyonik yaklaşıklıklar

Uygulamalar

$$(2.103) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_{1,1}(K) = \frac{F_{0,0}(\hat{K}) + 2F_{0,0}(\hat{T})}{3} = \frac{\hat{K}_0 + 2\hat{T}_0}{3} = \frac{0,970518286 + 2 \times 1,018160673}{3} = \frac{3,006839632}{3} = 1,002279877\bar{3} \cong 1,002279877, \\ E_{2,1}(K) = \frac{F_{1,0}(\hat{K}) + 2F_{1,0}(\hat{T})}{3} = \frac{\hat{K}_1 + 2\hat{T}_1}{3} = \frac{0,998152593 + 2 \times 1,001125581}{3} = \frac{3,000403755}{3} = 1,000134585 \cong 1,000134584, \\ E_{3,1}(K) = \frac{F_{2,0}(\hat{K}) + 2F_{2,0}(\hat{T})}{3} = \frac{\hat{K}_2 + 2\hat{T}_2}{3} = \frac{0,999884433 + 2 \times 1,000070227}{3} = \frac{3,000024887}{3} = 1,000008295\bar{6} \cong 1,000008296, \\ E_{2,2}(K) = \frac{F_{1,1}(\hat{K}) + 2F_{1,1}(\hat{T})}{3} = \frac{0,999994880 + 2 \times 0,999989908}{3} = \frac{2,999974696}{3} = 0,999991565\bar{3} \cong 0,999991566, \\ E_{3,2}(K) = \frac{F_{2,1}(\hat{K}) + 2F_{2,1}(\hat{T})}{3} = \frac{0,999999889 + 2 \times 0,999999870}{3} = \frac{2,999999629}{3} = 0,999999876\bar{3} \cong 0,999999876, \\ E_{3,3}(K) = \frac{F_{2,2}(\hat{K}) + 2F_{2,2}(\hat{T})}{3} = \frac{0,999999968 + 2 \times 1,000000028}{3} = \frac{3,000000024}{3} = 1,000000008. \end{array} \right.$$

şeklinde hesaplanırken T'ye ait ekstrapolasyonik yaklaşıklıklar (2.88)'den bulunur.

Diğer taraftan özdeşliklere gelirsek, ilkin (2.74)'teki özdeşlikten (ki burada yalnızca (2.77)&(2.80)'i kullanacağız) şu sonuçları verebilirim:

$$(2.104) \quad \left\{ \begin{array}{l} 5F_{1,1}(\hat{K}) - 4\hat{K}_1 + 2(5F_{1,1}(\hat{T}) - 4\hat{T}_1) = 5F_{1,1}(\hat{K}) - 4F_{1,0}(\hat{K}) + 2(5F_{1,1}(\hat{T}) - 4F_{1,0}(\hat{T})) = E_{1,1}(K) + 2E_{1,1}(T) \\ 5 \times 0,999994880 - 4 \times 0,998152593 + 2(5 \times 0,999989908 - 4 \times 1,001125581) = 1,002279878 + 2 \times 0,997989293 \\ 1,007364028 + 2 \times 0,995447216 = 2,998258464 \\ 2,99825846 = 2,998258464, \\ 5F_{2,1}(\hat{K}) - 4\hat{K}_2 + 2(5F_{2,1}(\hat{T}) - 4\hat{T}_2) = 5F_{2,1}(\hat{K}) - 4F_{2,0}(\hat{K}) + 2(5F_{2,1}(\hat{T}) - 4F_{2,0}(\hat{T})) = E_{2,1}(K) + 2E_{2,1}(T) \\ 5 \times 0,999999889 - 4 \times 0,999884433 + 2(5 \times 0,999999870 - 4 \times 1,000070227) = 1,000134584 + 2 \times 0,999882006 \\ 1,000461713 + 2 \times 0,999718442 = 2,999898596 \\ 2,999898597 = 2,999898596. \\ 21F_{2,2}(\hat{K}) - 20F_{2,1}(\hat{K}) + 2(21F_{2,2}(\hat{T}) - 20F_{2,1}(\hat{T})) = E_{2,2}(K) + 2E_{2,2}(T) \\ 21 \times 0,999999968 - 20 \times 0,999999889 + 2(21 \times 1,000000028 - 20 \times 0,999999870) = 0,999991566 + 2 \times 1,000008187 \\ 1,000001548 + 2 \times 1,000003188 = 3,00000794 \\ 3,000007924 = 3,00000794. \end{array} \right.$$

İkinci olarak bu sonuçları (2.87)'deki özdeşlik ile şöyle doğrulayabilirim:

$$(2.105) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{4\hat{K}_1 - \hat{K}_0}{3} + 2 \cdot \frac{4\hat{T}_1 - \hat{T}_0}{3} = \frac{4F_{1,0}(\hat{K}) - F_{0,0}(\hat{K})}{3} + 2 \cdot \frac{4F_{1,0}(\hat{T}) - F_{0,0}(\hat{T})}{3} = E_{1,1}(K) + 2E_{1,1}(T) \\ \frac{4 \times 0,998152593 - 0,970518286}{3} + 2 \cdot \frac{4 \times 1,001125581 - 1,018160673}{3} = 1,002279878 + 2 \times 0,997989293 \\ 1,007364028\bar{6} + 2 \times 0,995447217 = 2,998258464 \\ 2,998258462\bar{6} = 2,998258464, \\ \frac{4\hat{K}_2 - \hat{K}_1}{3} + 2 \cdot \frac{4\hat{T}_2 - \hat{T}_1}{3} = \frac{4F_{2,0}(\hat{K}) - F_{1,0}(\hat{K})}{3} + 2 \cdot \frac{4F_{2,0}(\hat{T}) - F_{1,0}(\hat{T})}{3} = E_{2,1}(K) + 2E_{2,1}(T) \\ \frac{4 \times 0,999884433 - 0,998152593}{3} + 2 \cdot \frac{4 \times 1,000070227 - 1,001125581}{3} = 1,000134584 + 2 \times 0,999882006 \\ 1,000461713 + 2 \times 0,999718442\bar{3} = 2,999898596 \\ 2,999898597\bar{6} = 2,999898596. \\ \frac{4F_{2,1}(\hat{K}) - F_{1,1}(\hat{K})}{3} + 2 \cdot \frac{4F_{2,1}(\hat{T}) - F_{1,1}(\hat{T})}{3} = E_{2,2}(K) + 2E_{2,2}(T) \\ \frac{4 \times 0,999999889 - 0,999994880}{3} + 2 \cdot \frac{4 \times 0,999999870 - 0,999989908}{3} = 0,999991566 + 2 \times 1,000008187 \\ 1,000001558\bar{6} + 2 \times 1,000003190\bar{6} = 3,00000794 \\ 3,00000794 = 3,00000794. \end{array} \right.$$

Burada son olarak yine Tablo 2.3'ten bazı $E_{n+1,k}(A)$ değerleri (2.89)'dan hesaplanmaktadır!

D. PAMUKTULUTM

EK 1 (Romberg'in Oğlu Hakkında). Bugün (14.08.2021) sabahleyin araştırma tezimi **Reinhard Siegmund-Schultze**'nin "[Mathematicians Fleeing from Nazi Germany: Individual Fates and Global Impact \(Nazi Almanyası'ndan Kaçan Matematikçiler: Kaderleri ve Küresel Etkileri\)](#)" kitabında verilenlere göre **Romberg**'in kişisel verilerine göre zenginleştirmeye niyetlenmiş ve orada **Owren**'in de, "[Werner Romberg: Vereinfachte numerische Integration](#)" makalesinde 3. referans olarak gösterdiği **Per Christian Hemmer**'in (Trondheim) "*Hemmer, P. Ch. (2005): Werner Romberg (1909–2003), Årbok Norges Tekniske Vitenskapsakademi, S. 125–26*" makalesine takılmıştım (Bkz. **Owren**'in makalesinin ilk geçtiği yer: "[Romberg İntegrali Hakkında](#)"). Adından da anlaşılacağı üzere **Romberg**'in hayatına bir bakış atılmış ve orada benim için özel bir şeyler olabilir düşüncesinden hareketle derhal bu makaleyi aramaya başladım. Bu derginin bir sürü sayısını buldum ancak 2005 sayısını bulamadım (Bkz. [Årbok 2013](#), [Årbok 2015](#), [Årbok 2016](#)). Fakat **Reinhard Siegmund-Schultze**'nin anılan kitabında **Romberg** için tam bir taramaya geçtiğimde şok geçirdim. Çünkü nasıl olmuşsa bu saate kadar **Romberg**'i kimsesiz zannediyor ve bu motivasyonla çalışmalarımı yapıyordum, yani ekstra bir performansla çalışıyordum. Evet, **Romberg**'in bir oğlu varmış ve adı da **Hans Romberg** imiş. **Reinhard Siegmund-Schultze**, kitabındaki görseller için kendisine katkı yapanları "[Photographs Index and Credits](#)" bölümünde tek tek sıralarken 126. sayfadaki **Romberg**'in aşağıdaki fotoğrafını oğlundan aldığını şöyle söyler (ki internetteki sitelerde bu ve benzeri fotoğraflar **Romberg**'in oğlundan geliyormuş demek ki. Bkz. [MacTutor'daki fotoğraflara](#)): "P. 126. Private possession and courtesy of Romberg's son, Hans Romberg, Heidelberg (Germany) (S. 126. Romberg'in oğlu, Hans Romberg'in kişisel sahiplik ve nezaketi, Heidelberg (Almanya))".



Şekil 26. Werner Romberg (1909-2003). **Romberg**, 1933'te Münih'te **Arnold Sommerfeld** ile birlikte bir fizik tezi yazdı (bkz. "[Zur Polarisierung des Kanalstrahllichtes \(On the Polarization of Canal Jet Rays\)](#)" (Kanal Işın Demetlerinin Polarizasyonu Hakkında) ve 1934'te solcu politik eğilimleri yüzünden SSCB'ye kaçtı. 1937'de **Stalin**'in göçmen politikası nedeniyle Dnipro'dan (şimdi Ukrayna'da) ayrıldı ve 1938'te, savaştan sonra Nümerik Analiz'de metoduyla ünlü olduğu yere, Norveç'e (Trondheim) gitti. 1944'te iltica ettiği Uppsala'dan (İsveç) geri döndü.

[Anderen \(Başkalarının Hayatı\)](#)". Çünkü eğer öyle olsaydı, şimdiye kadar dalgınlıktan göremediğim bu noktayı daha baştan görür ve ilk makalemde itibaren duyururdum. İşte benim alabileceğim en büyük madalya budur!

Romberg'in neden böyle davrandığına gelince, Danimarkalı yönetmen **Lars von Trier**'i tek geçerim (Bkz. "[K_n ve T_n İçin İndirgeme Bağlantıları](#)", S. VI, Dipnot 2). Eski Krallık'tan tutun Avrupa üçlemesine kadar tüm filmlerini izledim. **Von Trier**, üçlemenin son çekimi olan Avrupa'da phoshopta çalışır gibi çalışmış ve farklı zamanlarda çekilmiş sahneleri birleştirerek bir ilke imza atmıştır. Bunun yanında bazı sahnelerde de dikkat çekmek istediği nesneleri ya da karakterleri görüntü katmanlarını üst üste koyarak renklendirmiştir. Bu deneysel çalışma aynı zamanda **Von Trier**'in çekim keşiflerinin devam ettiğinin bir göstergesiydi (Bkz. "[EUROPA'nın Yapımı](#)"). Ama **Von Trier**'in kimsenin şimdiye kadar farkına varamadığı, dolayısıyla seyirciyi aldattığı nokta şu idi: O, karakterlerin yaşadıklarına seyirciyi de ortak etmeye çalışırken aslında bazı sahneleri kendi geçmişinden alıyordu. Örneğin, üçlemenin 2. filmi olan "[Epidemic \(Salgın\)](#)"ın 36:19'undaki "[Tredie Dag-Tyskland \(3. Gün-Almanya\)](#)" parçası böyledir (ki bu filmi izleyebilmeniz için bir VPN gerekir). Bana göre bu parçadaki anı aynı zamanda **Romberg**'in biyografilerinde neden ailesi ve hayatı hakkında hiçbir bilginin verilmediğini de açıklar. Yani anlaşılana o ki, **Romberg, Von Trier**'in o parçasındaki korkudan dolayı (ki orada 46:53'te **Rudolf**'un annesi, II. Dünya Savaşı sırasında onu doğurduğu hastanede ve sonrasında yaşadığı korkunç olayları ancak ölüm döşegindeyken söyleyebilmiş: "Ya yine gelirlerse!" diye) kişisel bilgilerin gizli kalmasını istemiş görünür!

Dalgınlığıma veriniz diyeceğim ama bu, öyle böyle geçirilebilecek bir konu değil. Çünkü bu kitaptan **Romberg**'in kaçısıyla ilgili RİK 3'te 5. sayfadaki "[1.6. Romberg'in Orijinal Metodu](#)" ve RİK 4'te 21-22. sayfalarda geçen "[1.2. Romberg'in Orijinal Metodu](#)"nda görüldüğü üzere 2 paragraf almıştım. Ama diğer taraftan, **Romberg**'in hiçbir biyografisinde babası dışında ailesi hakkında bir bilgi verilmediğine de dikkat etmek gerekiyor. Bu konuda RİK 4'ün 5. sayfasının sonunda verdiğim "[Romberg'in Ketumluğu](#)" her şeyi açıklar durumdadır. Çünkü **Romberg** için bakmadığım kaynak kalmamıştı, ama anlaşılana o ki, kitabı için 01.10.1998'de **Reinhard Siegmund-Schultze**'ye bir mektup yazan **Romberg**, özel hayatı hakkında çok ilginç açıklamalarda bulunmuş. Özellikle Nazi dönemine ilişkin verdiği bilgiler beni mest etmiş ve RİK 3'te **Sabahattin Ali**'yi örnek vererek politik benzerliğe dikkat çekmiştim. Çünkü her ikisinin öğrencilik anılarını karşılaştırdığımda **Sabahattin Ali, Romberg**'in politik ikizi gibi duruyordu (Bkz. RİK 3, Önsöz, "[Romberg'in Politik İkizi: Sabahattin Ali](#)", S. 9 ve "[K_n ve T_n İçin İndirgeme Bağlantıları](#)", S. III, Dipnot 1). Fakat tüm bu uğraşlara rağmen **Per Christian Hemmer**'in makalesi nedeniyle NTNU'dan 14.08.2021, 12:35:26'da bilgisayarıma indirdiğim "[Tek-0062-Werner Romberg \(1\)](#)" kaydından sonra kitaba döndüğümde tam anlamıyla şok geçirdim. Çünkü kitapta "**Romberg**" adı 30 yerde geçiyordu ve 26.'sını tıkladığım zaman **Romberg**'in oğlu olduğunu ilk kez orada gördüm (ki kitapta **Romberg**'in oğluna ilişkin bundan başka bir kayıt yoktur). İşin ilginç yanı şu ki, bu bilgi **Romberg**'in hiçbir biyografisinde geçmez. Yalnızca, [MacTutor](#)'da **Romberg**'in babasının adının **Julius Romberg** ve onun bir jeolog olduğu geçer. İşte bunun dışında hemen her biyografide yer alan ve genelde sağ üst köşede görülen "babası, annesi, çocukları vs." ve "**Life (Hayatı)**" bölümleri **Romberg**'in hiçbir biyografisinde bulunmaz! Örneğin, **Romberg**'in Trondheim'daki en yakın çalışma arkadaşı **Ole Amble**, "**Amble**" ailesinin soyağacındaki en alttaki sol baştaki [Ole Amble Ommundsen](#)'in oğlu olarak görülürken (ki soyağacı 1736'ya kadar geri gider. Ayrıca **Ole Amble**'in çekirdek aile fotoğrafını [100. sayfamızda](#) görebilirsiniz) kendisi için [surada](#) bırakın soyağacını görmeyi, sadece biyografilerdeki genel geçer bilgilerden oluşan [bir kayıt](#) vardır.

Şimdi **Romberg**'in oğlunun olduğunu öğrendiğime göre, bir şeyi kesin olarak kendime kanıtlamış oluyorum: Ben, günümüzde kazanmak için her yolu mübah sayanlar gibi, **Romberg**'de gördüğünüz üzere, insani konuları bir zayıflık olarak algılamıyor, dolayısıyla kimsenin yatak odasına dalmıyorum (Bkz. "[Das Leben Der](#)

Yukarıdaki bilgiler ve düşünceler, özellikle son paragraftaki düşüncelerim, birçok kaynaktan elde ettiğim bir derleme idi. Fakat içim içimi kemirdiğinden anılan kitabın yazarı **Reinhard Siegmund-Schultze**'ye 16.08.2021, 04:08'de şu e-postayı gönderdim:

"Sayın **Reinhard Siegmund-Schultze**, "[Mathematicians Fleeing from Nazi Germany: Individual Fates and Global Impact \(Nazi Almanyası'ndan Kaçan Matematikçiler: Kaderleri ve Küresel Etkileri\)](#)" kitabınızı okudum ve **Romberg** hakkında birkaç sorum olacak.

Her şeyden önce **Richard von Mises**'in Nazi zulmünden kaçarak geldiği ülkeden (Türkiye) size yazıyorum (Bkz. "[The First Mathematics Department of Turkey](#)", S. 5. Bu açılışı **Reinhard Siegmund-Schultze**'nin, [üniversitedeki profilinde](#) en çok **Richard von Mises** ilgili yayımlarda bulunduğu için yapmıştım ve linkini verdiğim kaynağı üniversitedeki bölümümden alarak ona sunmuştum. Yani "çarpan etkisi" yapar diye düşünmüştüm ve öyle de oldu). 2016'dan beri yürüttüğüm "**Romberg Projesi**"ni [romberg-integrali.org](#) adlı web sitemde yayımlıyorum. Kitabınızı okurken 446. sayfada **Werner Romberg**'in oğlundan fotoğraf aldığınıza dair hiçbir kaynakta göremediğim bir bilgiyle karşılaştım. Ama **Romberg**'in oğlu **Hans Romberg**'e hiçbir şekilde erişemiyorum. Mümkünse bana **Hans Romberg** hakkında (örneğin tam adı, doğum tarihi, doğum yeri, annesinin adı vs.) tüm bildiklerinizi anlatmanızı istiyorum. Eğer **Hans Romberg** yaşıyorsa, onunla bağlantı kurmak isterim. Aynı şekilde, **Werner Romberg** hakkında da bilgilendiriniz beni.

Saygılarıma, D. PAMUKTULUM."

Sağ olsun o da bana 10:50'de şu yanıt e-postasını gönderdi:

"Dear colleague,

Thanks for your information about the interesting website on Romberg and the Romberg method. It would be very good if over time you would develop an English version of it as well.

My last contacts with Hans Romberg was in 2005. I used several email addresses at the time which are below. He must be in his early 60s now.

romberg@drromberg.de, hans.romberg@web.de, romberg.medizintechnik@web.de

I do not know whether you are aware that NTNU the Technical University in Trondheim (Norway) has rather extensive personal papers of Werner Romberg. There is also a file on Romberg in Oxford within the refugee files of the Society for the Protection of Science and Learning.

Good luck for your project.

Reinhard Siegmund-Schultze

PS: As to the other website on "The first mathematics department of Turkey" I would recommend (also in the interest of your female students" to include Hilda Geiringer who was also teaching in Istanbul in the 1930s as an assistant professor. But she is an accomplished applied mathematician as well and has published much on plasticity and statistics-genetics. I attach three articles which mention Geiringer."

Derken 11:22'de **Rolf Thomas Nossun** topa girdi ve bana **Hans Romberg**'in sitesini açmaya çalıştığı zaman bir Almanya telefon numarasıyla karşılaştığımı bildirdi (ki **Rolf Thomas Nossun**, e-postasını okurken **Reinhard Siegmund-Schultze**'nin yanında mıydı, yoksa e-postam üniversiteye mi gitti, çıkaramıyorum. Ama web sitemdeki son makalemde çok yoğun bir şekilde Norveçlilerden bahsetmiş olmam ve onların da bunu görmüş olmaları daha büyük bir ihtimal olarak gözükür. Bana göre ilgileri bu yüzden idi. Aslında **Brynjulf Owren**'e bu makaleden sonra web sitemin linkini vererek bire sürpriz yapmak istiyordum. Ama kismet işte, bir kaza neticesinde onlara sürpriz oldu). Ben de aynı siteyi kontrol ettiğim de aynı numarayı gördüm.

Şimdi **Reinhard Siegmund-Schultze**'nin yukarıdaki e-postasından anladığım kadarıyla, **Reinhard Siegmund-Schultze**, **Werner Romberg**'in oğlu **Hans Romberg** ile en son 2005'te bağlantı kurmuş ve şimdi 60'ların başında (ki bu, benden 10 yaş büyük demektir) olduğunu söylüyor. Demek ki **Werner Romberg**, Trondheim'da çalışırken güvendiği bir zamanı kollamış ve 1950'lerin sonunda oğlu **Hans Romberg** dünyaya gelmiş. [NTNU'daki tarihçe](#)ye göre **Werner Romberg**'in 1960'ta Uygulamalı Matematik'te yeni bir kürsüye atandığı ve Heidelberg'teki profesörlüğü kabul edilene kadar 10 yıl burada görev yaptığı geçer. İşte burası daha ilginç: **Werner Romberg** Heidelberg Üniversitesi'ne 1968'de (doğduğum yıl) geri döndü. Yani [Werner Romberg](#) savaştan sonra 1949-1968 yıllarında Trondheim'da idi ve oğlu 1950'lerin sonunda burada doğdu. Araştırmama göre **Hans Romberg** Almanya'da halen aktif bir doktordur. Ama çok yakında ona da ulaşacağım, merak etmeyin!

Çok ilginçtir, **Gabriele Dörflinger**'in hazırladığı ve 2018'de çıkan Heidelberg Üniversitesi'nin tarihçesine ilişkin "[Heidelberger Mathematiker-Rundgang](#)" adlı derginin 192. sayfasındaki **Werner Romberg**'in fotosunun Mac Tutor'dan alındığı geçer. Şaka gibi, çünkü bu fotoğraf yukarıdaki Şekil 26'da geçen fotoğraf olup **Hans Romberg**'den geliyordu ve internette her yere dağılmış. Peki kim söylüyor bunu? **Reinhard Siegmund-Schultze**, "[Mathematicians Fleeing from Nazi Germany: Individual Fates and Global Impact \(Nazi Almanyası'ndan Kaçan Matematikçiler: Kaderleri ve Küresel Etkileri\)](#)" kitabının 446. sayfasında bu fotoğrafı 2005'te **Werner Romberg**'in oğlu **Hans Romberg**'den aldığı söyler. Anlaşılan o ki, **Werner Romberg**'in görev yaptığı Heidelberg Üniversitesi, kendisine epey uzakta kalmış oluyor. Buyursunlar, oğlunun gönderdiği **Werner Romberg**'in [siyah-beyaz fotoğrafını](#) (ki bu, geliştirilmiş halidir. Orijinali [şurada](#)dır) ve [renkli](#)sinin web sitemden veriyorum.

Hans Romberg ile temas kurmadan önce son bir söz: Bence çocuklar, eğer yapabiliyorlarsa anne ve baba mesleklerini seçmelidirler. Ama anne ya da baba, başarı çitasını yüksekte bıraktığı zaman bu çoğu zaman mümkün olmuyor. Örneğin Ejiptolojinin babası sayılan **Sör W. M. Flinders Petrie** böyle biridir. **Ann Petrie (1907-1972)** ve **John Flinders Petrie (1909-1989)** adlarında 2 çocuğu oldu ve oğul **Petrie** matematikte yetenekli olduğundan matematikçi oldu (Bkz. "[Petrie Polygon](#)"). Fakat dışarıdan onlara biri katıldı ve **Petrie**'nin aradığı tüm özellikler onda toplanmıştı: [Xia Nai](#). Kendisi [Çin'deki Ejiptolojinin Babası](#) sayılır!

D. PAMUKTULUM, 16.08.2021, 15:16.

D. PAMUKTULUM