

4.1. Ole Amble Metodu (01.02.2019, 20:21). Bu metottaki yaklaşıklıklara ilişkin *Parmentier*'in kuralına benzer modifiye bir kural 1900'de *W. F. Sheppard* tarafından verilmişti (Bkz. "*W. F. SHEPPARD: Some quadrature formulas. Proc. London Math. Soc., 32, 1900, pp. 258-277*"). Bu kural daha sonra Norveçli matematikçi *Ole Amble*'in dikkatini çekti ve "*O. AMBLE: A set of formulas for numerical integration, Norske Vid. Selsk. Forh. Trondheim, v. 25, 1952, p. 38-41. MR 14, 907*" tezinde yayımlandı. *Romberg*, 1955'teki tezinde *Ole Amble*'in metodunu kendi metodundaki (Bileşik Trapez Metodu) trapez ve orta nokta formüllerinden daha hızlı yaklaşıklıkların mevcut olduğunu göstermek için kullandı. Ama diğer taraftan bu, *Romberg* için DKNVS'ye giriş bileti oldu. Çünkü *Romberg*, tezini ilkin GAMM'da yayımlamak istemişti ama *E. Stiefel* işi süruncemede bırakınca 14.02.1955'te DKNVS'de yayımladı ve böylece *Ole Amble*'in metodu DKNVS'de 2. kez yayınlanmış oldu!

NUSSE: Norveç'in İlk Elektronik Bilgisayarı

1948'de genç bilim adamı *Henry Viervoll*, ABD'deki araştırma gezisinden sonra modern bilgisayarların geliştirildiğini Oslo Üniversitesi'ne bildirdi. Norveç'in ilk bilgisayarının geliştirilmesine öncülük etmek üzere 1949'da Norveç Kraliyet Bilimsel ve Endüstriyel Araştırma Konseyi'nde (NTNF) bir Matematiksel Makineler Komitesi kuruldu. Yapımından *Thomas Hysing* sorumluydu. İlk önce bir ZUSE makinesi planladılar, ancak profesör *D. R. Hartree* Cambridge'den, bütçe dahilinde, APEX C'yi oluşturan *Andrew D. Booth*'un bileşenlerine dayalı bir elektronik bilgisayar alabileceklerini keşfetti. Giriş/çıkış cihazlarının yapımı, NTNF'nin 1 yıl önce kurduğu (SI) Norveç Merkez Endüstri Enstitüsü'nde gerçekleştirildi. Stratejideki bu kayma ile zaman çizelgesini 1 yıl kadar, 1954'e uzattılar. Bilgisayara "NUSSE" adını verdiler (ki bu bilgisayar, modern anlamda dünyadaki ilk bilgisayar "ZUSE"nin Norveççe versiyonu idi). 1953-54'te *Ole Amble* ve *Tor Evjen*, Trondheim'dan *Werner Romberg* ile birlikte NUSSE'nin matematiksel kodlamasını ve programlamasını gerçekleştirdiler. Diğer kullanıcılar için, 1952'de NTNF, üniversite tesislerinde ve Kjeller'de FFI'de şubeleri olan bir organizasyon olarak saf ve uygulamalı araştırmalar için Norveç Bilgi İşlem Merkezi'ni (Norsk Regnesentral (NR)) kurdu. NR'nin elinde çeşitli delikli kart ekipmanları, UiO'daki diferansiyel analiz cihazı ve daha sonra NUSSE ve DIANA vardı. 1954'ün başlarında, NR'nin Oslo'daki tesislerinde yeni bir tablo oluşturunca, reprodüktör, harmanlayıcı ve sıralayıcı kuruldu. Ticari bir bilgi işlem merkezi haline gelmesi ancak 1959-60'ta oldu.

Bu arada *Knut Hamsun*'un kitaplarını okumayı unutmayalım [beyler](#)! Örneğin, 1920'de Nobel ödülü aldığı "[Açlık](#)"ta Son Osmanlı Dönemi'nden esintiler vardır. Bunları "[İstanbul'da İki İskandinav Seyyah](#)"dan çıkartabilirsiniz. Bu kitapta, 1899'da *Hans Christian Andersen* ile birlikte İstanbul'a gelen *Hamsun*, Avrupa'nın dolduruşuyla harabe, vahşi ve sefil bir şehir beklerken şu gözlemleriyle bu olumsuz düşüncelerin hepsini ortadan kaldırmıştır: "Gördüklerimiz, düşündüklerimizden çok farklı. Yoksa biz Türkiye'de değil miydik? Ben 30 senedir beceriksiz sultanlar (*Abdülaziz, V. Murat, II. Abdülhamit*) tarafından iflasın eşiğine getirilmiş bir memlekete dair yazılmış yazıları okuyordum. Halbuki vapur, bağlık bahçelik küçük şehirlerin ve güllerin kıpkızıl parıltısıyla gözümüzü alan bir masal diyarında yol alıyordu.

Bütün Avrupa basını Sultan *Abdülhamit*'in Ermeniler'e ve diğer Hristiyanlar'a yaptığı zulmü anlatıyor ama sesini duyurması lazım gelen taraf tamamen dilsiz. Yalnızca bir taraf konuşuyor, hem de fasılasız ve bütün dünyada."

Bilindiği gibi *Hamsun* daha çok 2. Dünya Savaşı sırasında Nazileri desteklemesiyle hafızalara kazınmıştır. Ama *Hitler* ile toplantı öncesi çekilen şu fotoğrafla, adeta "Karaman'ın koyunu, sonra çıkar oyunu" sözünü ispatlarcasına bu görüşü de yıktı:



Resim 4.1. *Knut Hamsun*, 26 Haziran 1943 Cumartesi günü *Adolf Hitler* ile görüşmek üzere Berghof konutuna girerken. Soldan sağa doğru Ulusal Basın Başkanı *Otto Dietrich*, emir subayı *Rudolf Schmudt*, *Hamsun*'un tercümanı *Egil Holmboe* ve Bakan temsilcisi *Ernst Züchner*, 84 yaşındaki büyük şaire eşlik ediyorlar. Bu, *Knut Hamsun*'un bilinen tek renkli fotoğrafıdır. Fotoğraf: [WALTER FRENTZ/ ULLSTEIN BILD](#). Propaganda toplantısı olarak planlanan ve skandalla sonuçlanan bu başarısız ziyaretin ardından tüm kayıtlar imha edilmiş ve geriye tek bu fotoğrafın kaldığı zannediliyordu ama amatör tarihçi *Odd V.*, 2018'de ikinci fotoğrafa ulaştı (Bkz. "[Hamsun'un sansasyonel savaş fotoğrafı bulundu](#)").

Uygulamalar

Şimdi **Romberg**'in metodu vesilesiyle **Ole Amble**'nin metodunun 3. kez yayını **Romberg**'de olduğu gibi benim için mükemmel bir fırsat oldu (bkz. "[1.2.1. Romberg Metodu Hakkındaki İlk Gözlemim](#)", "[1.6.1. Romberg'in Metodu'nun Deşifasyonu](#)") ve ben de bu metodu her yönüyle inceleyerek bulgularımı aşağıda vereceğim.

Öncelikle **Romberg**'in tezindeki **Ole Amble**'nin metodunda $k = 1, 2, 4, 8$ için

$$(4.1) \quad \begin{cases} F_{-k} = F_k, \\ F_{8+k} = -F_{8-k} \end{cases}$$

bağıntılarına göre (ki seriyi bozmamak için $F_0 := F(a)$ olarak alıyorum) $N = 1$ için

$$(4.2) \quad \begin{cases} \hat{T}_1 = T_1 + A_1 = T_1 + \frac{8h}{24}(F_8 - F_{-8} + F_{8N-8} - F_{8N+8}) = T_1 + \frac{8h}{24} \left(\underbrace{F_8 - F_{-8}}_{=0} + F_0 - F_{16} \right) = T_1 + \frac{8h}{24}(F(a) - F_{16}), \\ \hat{T}_2 = T_2 + A_2 = T_2 + \frac{4h}{24}(F_4 - F_{-4} + F_{8N-4} - F_{8N+4}) = T_2 + \frac{4h}{24} \left(\underbrace{F_4 - F_{-4}}_{=0} + F_4 - F_{12} \right) = T_2 + \frac{4h}{24}(F_4 - F_{12}), \\ \hat{T}_4 = T_4 + A_4 = T_4 + \frac{2h}{24}(F_2 - F_{-2} + F_{8N-2} - F_{8N+2}) = T_4 + \frac{2h}{24} \left(\underbrace{F_2 - F_{-2}}_{=0} + F_6 - F_{10} \right) = T_4 + \frac{2h}{24}(F_6 - F_{10}), \\ \hat{T}_8 = T_8 + A_8 = T_8 + \frac{h}{24}(F_1 - F_{-1} + F_{8N-1} - F_{8N+1}) = T_8 + \frac{h}{24} \left(\underbrace{F_1 - F_{-1}}_{=0} + F_7 - F_9 \right) = T_8 + \frac{h}{24}(F_7 - F_9) \end{cases}$$

eşitliklerindeki A_1, A_2, A_4, A_8 yaklaşıklıklarını ⁽¹⁾ şu şekilde elde etmiş oluruz:

$$(4.3) \quad \begin{cases} A_1 = \frac{8h}{24}(F(a) - F_{16}) = 0,130899694, \\ A_2 = \frac{4h}{24}(F_4 - F_{12}) = 0,046280031, \\ A_4 = \frac{2h}{24}(F_6 - F_{10}) = 0,012523286, \\ A_8 = \frac{h}{24}(F_7 - F_9) = 0,003192158. \end{cases}$$

Buraya kadar verilen bilgiler **Romberg**'in tezinde de aynen geçer (bkz. [EK 1](#)) ve eğer bıraktığı yerden araştırmamıza devam edersek, (4.1)'deki 2. bağıntıya göre

$$(4.4) \quad \begin{cases} F_{16} = F_{8+8} = -F_{8-8} = -F_0 = -F(a), \\ F_{12} = F_{8+4} = -F_{8-4} = -F_4, \\ F_{10} = F_{8+2} = -F_{8-2} = -F_6, \\ F_9 = F_{8+1} = -F_{8-1} = -F_7 \end{cases}$$

eşitliklerinden

$$(4.5) \quad \begin{cases} A_1 = \frac{8h}{24}(F(a) - F_{16}) = \frac{8h}{24}(F(a) + F(a)) = \frac{8h}{12}F(a), \\ A_2 = \frac{4h}{24}(F_4 - F_{12}) = \frac{4h}{24}(F_4 + F_4) = \frac{4h}{12}F_4, \\ A_4 = \frac{2h}{24}(F_6 - F_{10}) = \frac{2h}{24}(F_6 + F_6) = \frac{2h}{12}F_6, \\ A_8 = \frac{h}{24}(F_7 - F_9) = \frac{h}{24}(F_7 + F_7) = \frac{h}{12}F_7 \end{cases}$$

sonuçlarını elde etmiş oluruz. Burada $F_0 = 4F(a)$ 'dır.

İşte bu son eşitliklerden $n = 0, 1, 2, 3$ için $h_n = \frac{b-a}{2^n}$ farkına göre

$$(4.6) \quad A_{2^n} = \frac{h_n}{3}(F_{2^3-2^{3-n}} + F_{2^{3-n}-2^3}) = \frac{2h_n}{3}F_{2^3-2^{3-n}}$$

iterasyonu geçerli olur ki bu, (4.3)'ü verir!

Şimdi bu iterasyonda sadeleştirme yaparsak, $2^3h = 2^3 \cdot 1 \cdot h = 2^3Nh = 1$ için

$$\begin{aligned} A_{2^n} &= \frac{2h_n}{3}F_{2^3-2^{3-n}} = \frac{2h_n}{3}F(a + (2^3 - 2^{3-n})h) = \frac{2 \cdot 2^3h}{2^3 \cdot 2^n \cdot 3}F(a + (1 - 2^{-n}) \cdot 2^3h) = \frac{1}{2^{n+2} \cdot 3}F(a + 1 - 2^{-n}) \\ &= \frac{1}{2^2 \cdot 3}F\left(a + (2^n - 1)\frac{1}{2^n}\right) = \frac{h_n}{12}F(a + (2^n - 1)h_n) = \frac{h_n}{12}F(a + 2^n h_n - h_n) = \frac{h_n}{12}F(a + b - a - h_n) = \frac{h_n}{12}F(b - h_n) \end{aligned}$$

eşitliklerine göre şu formülü elde etmiş oluruz:

$$(4.7) \quad A_{2^n} = \frac{h_n}{12}F(b - h_n) = \frac{1}{2^{n+2} \cdot 3}F(a + 1 - 2^{-n}).$$

⁽¹⁾ **W. F. Sheppard**, trapez ve orta nokta formüllerinden eliminasyonla elde edilen ve Parmentier kuralının modifiye kurallarına uygulanabilinir olan $P(h) = U(h) + \frac{h}{12}(F_0 - F_{\frac{1}{2}} - F_{N-\frac{1}{2}} + F_N) + O(h^4)$ yaklaşıklıklığını not etti (Bkz. "[Survey of Extrapolation Processes In Numerical Analysis/9. Analysis of Romberg's method](#)", S. 441).

Fakat **Romberg**'e göre I için asıl yaklaşıklıklar şöyledir:

$$(4.8) \quad \begin{cases} \hat{T}_{2^n} = T_{2^n} + A_{2^n}, \\ \hat{U}_{2^n} = U_{2^n} - 2A_{2^{n+1}}. \end{cases}$$

İşte **Romberg**, tezinin 2. kısmının sonunda I'nın alt ve üst sınırları olan bu yaklaşıklıklara göre şu tabloyu verdi (Bkz. [EK 1](#)):

Tabelle der Näherungswerte wachsender Ordnung				
Intervall-Länge	Rest Prop.			
	h ⁴	h ⁶	h ⁸	h ¹⁰
8h	$\hat{T}_1 = 0,916297857$			
	$\hat{U}_1 = 1,018160673$			
4h	$\hat{T}_2 = 0,994339480$	$\hat{S}_2 = 0,999542255$		
	$\hat{U}_2 = 1,001125581$	$\hat{V}_2 = 0,999989908$		
2h	$\hat{T}_4 = 0,999639087$	$\hat{S}_4 = 0,999992394$	$\hat{R}_4 = 0,999999539$	
	$\hat{U}_4 = 1,000070227$	$\hat{V}_4 = 0,999999870$	$\hat{W}_4 = 1,000000028$	
h	$\hat{T}_8 = 0,999977330$	$\hat{S}_8 = 0,999999879$	$\hat{R}_8 = 0,999999998$	$\hat{Q}_8 = 1,0$

Tablo 4.1. **Romberg**'in *Ole Amble*'nin metoduna göre hazırladığı tablo.

Bu tabloda tek hata $\hat{S}_2$ 'nin kırmızıyla işaret ettiğim yerde, son basamağında olmuştur. Çünkü **Romberg** bu hesapları 10 basamaklı [MADAS ATG-20](#) ile yapıyordu ve $\hat{S}_2$ için Mathematica'daki 20 basamaklı

$$(4.9) \quad \hat{S}_2 = \frac{16\hat{T}_2 - \hat{T}_1}{15} = \frac{16 \times 0,9943394795743362507 \dots - 0,9162978572970230278 \dots}{15} = 0,9995422543928237989 \dots$$

işlemin sonucunu 10 basamakta doğru olarak okuyamıyordu!

Bir diğer dikkat çekici hesap $\hat{Q}_8$ 'de olmuştur. Şöyle ki, eğer $\hat{Q}_8$ 'i gerçek değerlere göre hesaplarsak şu sonuç elde edilir:

$$(4.10) \quad \hat{Q}_8 = \frac{256\hat{R}_8 - \hat{R}_4}{255} = \frac{256 \times 0,9999999981478186179 \dots - 0,9999995392504460658 \dots}{255} = 0,9999999999474161574 \dots$$

Peki **Romberg**, bu işlemin sonucunu MADAS ATG-20'de nasıl görüyordu?

Şöyle:

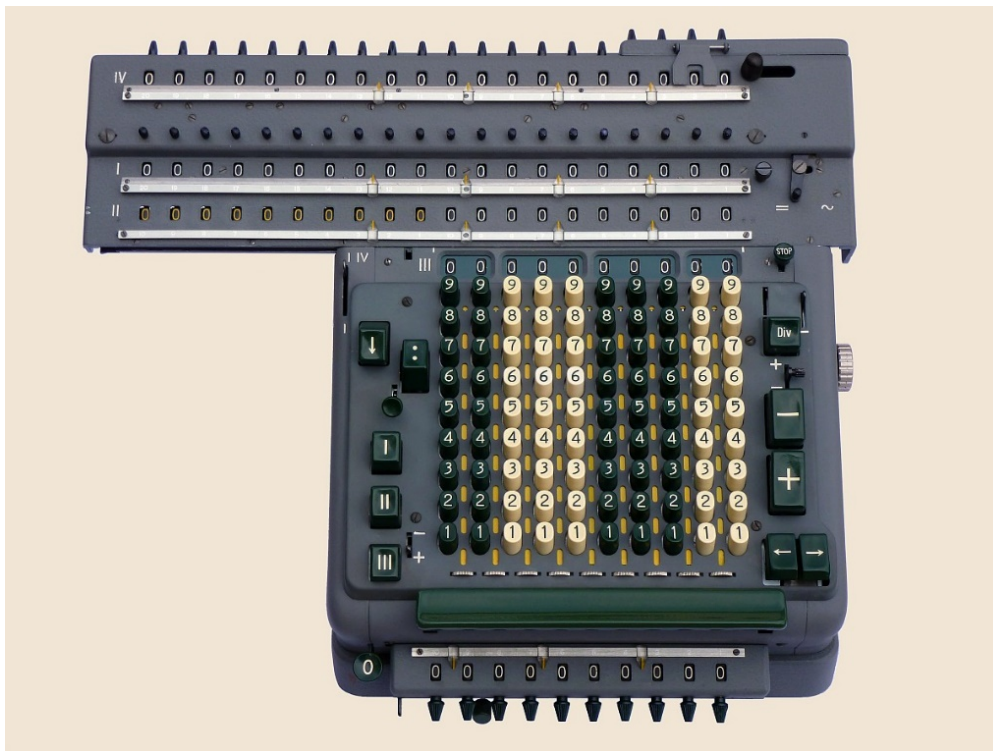
$$(4.11) \quad \hat{Q}_8 = \frac{256\hat{R}_8 - \hat{R}_4}{255} = \frac{256 \times 0,999999998 - 0,999999539}{255} = 0,9999999998 \cong 1,0.$$

İşte **Romberg** bunu tabloya $\hat{Q}_8 = 1,0$ olarak yazdı!

Özetle, bu sonuçlardan görüldüğü üzere **Romberg**, Tablo 4.1'deki kalan değerleri hesaplariken özellikle ilk sütundaki girişleri MADAS ATG-20'de hesaplamaktan çok, elle düzelmek zorunda kaldı. Çünkü ilk sütundaki 3, 4, 6 ve 7. satırlardaki değerlerin son basamaklarındaki yuvarlatmalar bunu gösterir. Fakat bu giriş değerlerinden sonra diğer sütunlardaki tüm değerleri MADAS ATG-20'den aldı ve onları tablodaki yerlerine yazdı. Buna kanıt olarak $\hat{S}_2$ 'nin son basamağında yapılan hatayı verebiliriz:

$$(4.12) \quad \hat{S}_2 = \frac{16\hat{T}_2 - \hat{T}_1}{15} = \frac{16 \times 0,994339480 - 0,916297857}{15} = 0,999542255.$$

Fakat kırmızıyla işaret ettiğim hata NUSSE'de ⁽²⁾ değil MADAS ATG-20'de yapılmıştı!



Bu konuda **Romberg** ile 14.10.1996'da Heidelberg'de röportaj yapan **Seiji Fujino**, şu kritik bilgileri verir:

Fujino Romberg'e metodu nasıl bulduğunu sorduğunda, şu yanıtı aldı: “Sonrasında profesöre **Romberg İntegrali**'ni nasıl bulduğunu sordum. O dönem profesörün kullandığı bilgisayar İsviçre malı “**MADAS**” adında ([MADAS ATG-20](#)) bir hesap makinesiymiş ve hafızası yalnızca 30 kelimeyi barındırabiliyormuş. Bir seferinde nümerik integrali Simpson integral metoduyla denediğinde, kesin sonuca bir türlü ulaşamamış. Bu sebeple Gauss integral yöntemiyle denemiş, fakat bu sefer de katsayıları depolarken hafıza doluvermiş. İşte bu şartlar altında Romberg integrali fikri aklına gelmiş. Hem kodlaması kolay, hem fazla hafıza gerektirmiyor, hem de yakınsaklığı bulmak kolay.”, “**Romberg integralinin mucidi Werner Romberg ile bir röportaj gerçekleştirdim**”, **Seiji Fujino**, 14.10.1996.

Bu hatıratattan da anlaşıldığı üzere **Romberg** Tablo 4.1'deki hesapları MADAS ATG-20'de yaparken ilk ve son sütunlardaki değerlerin 10 basamaklı sonuçlar halinde tabloya yazılmasında elle müdahalelerde bulunmuş ve diğer sütunlardaki tüm değerleri MADAS ATG-20'den alarak tabloya yazmıştır.

⁽²⁾ Bu sadece bir örnek: **Thomas Hysing** ve yardımcısı **Kjell Kveim** geceleyin eve gittiklerinde, **Hysing** makinesinde çalışmasını başlattı. **Hysing**, “Zeta fonksiyonunun sıfırları”nı araştırıyordu ve 55 basamaklı doğru sonuçları elde edebilmek için NUSSE'yi kullandı (Bkz. “[The Pioneer Era In Norwegian Scientific Computing, 1948-1962](#)”, S. 26, 4. Paragraf).

Şimdi **Romberg**'in verdiği Tablo 4.1'i şöyle düzeltebiliriz:

Artan Mertebelere Göre Yaklaşık Değerler Tablosu				
Aralık Uzunluğu	Kalan Değerler			
	h ⁴	h ⁶	h ⁸	h ¹⁰
8h	$\hat{T}_1 = 0,9162978572970230278 \dots$			
	$\hat{U}_1 = 1,0181606733279589316 \dots$			
4h	$\hat{T}_2 = 0,9943394795743362507 \dots$	$\hat{S}_2 = 0,9995422543928237989 \dots$		
	$\hat{U}_2 = 1,0011255808985164609 \dots$	$\hat{V}_2 = 0,9999899080698869628 \dots$		
2h	$\hat{T}_4 = 0,9996390870120326262 \dots$	$\hat{S}_4 = 0,9999923941745457179 \dots$	$\hat{R}_4 = 0,9999995392504460658 \dots$	
	$\hat{U}_4 = 1,0000702269408937688 \dots$	$\hat{V}_4 = 0,9999998700103855893 \dots$	$\hat{W}_4 = 1,0000000281364252501 \dots$	
h	$\hat{T}_8 = 0,9999773298155047537 \dots$	$\hat{S}_8 = 0,9999998793357362289 \dots$	$\hat{R}_8 = 0,9999999981478186179 \dots$	$\hat{Q}_8 = 0,9999999999474161574 \dots$

Tablo 4.2. Gerçek değerlerle Tablo 4.1'in 20 basamaklı düzeltilmiş şekli.

Bu tablodaki değerlerin basamak sayısı **Romberg**'in 64 yıl önce verdiği Tablo 4.1'dekilerinin 2 katı kadardır. Bunlardan siyah rakamlarla gösterilen ilk yarısı **Romberg**'in Tablo 4.1'deki değerlerine karşılık gelir ve ikinci yarısı da bunlara geçişteki diğer yarısını gösterir. Buradan **Romberg**'in Tablo 4.1'de bu geçişleri, her değerde 10. ondalıktan 9. ondalığa geçişler görülebildiğinden, nasıl yaptığını açık bir şekilde görebilirsiniz!

Şimdi bu geçişlerin nasıl yapılmış olduğunu sütun sütun inceleyelim.

1. Sütun: Bu sütundaki değerleri 10 basamaklı olarak yazdığımız zaman, **Romberg**'in sadece şu değerlerde yuvarlatma işlemi yaptığını ve diğerlerinin doğru olduklarını görürüz:

$$(4.13) \quad \begin{cases} \hat{T}_2 = 0,9943394795743362507 \dots \lesssim 0,994339480, \\ \hat{U}_2 = 1,0011255808985164609 \dots \lesssim 1,001125581, \\ \hat{U}_4 = 1,0000702269408937688 \dots \lesssim 1,000070227, \\ \hat{T}_8 = 0,9999773298155047537 \dots \lesssim 0,999977330. \end{cases}$$

2. Sütun: Yine bu sütundaki değerleri de 10 basamaklı olarak yazarsak Tablo 4.1'dekilere göre sadece şunda hata çıkar:

$$(4.14) \quad \hat{S}_2 = 0,9995422543928237989 \dots \gtrsim 0,999542254.$$

Ancak buradaki bir diğer hata yuvarlatmayla son değerde şöyle mevcuttur:

$$(4.15) \quad \hat{S}_8 = \frac{16\hat{T}_8 - \hat{T}_4}{15} = \frac{16 \times 0,999977330 - 0,999639087}{15} = 0,9999998795333333333 \dots \lesssim 0,999999880.$$

Fakat **Romberg**, sanki gerçek giriş verileriyle çalışıyormuşçasına bu yuvarlatmayı göz önüne almadan bu nasıl hatadan kurtuldu?

3. Sütun: Bu sütundaki değerleri de 10 basamaklı olarak yazdığımız zaman Tablo 4.1'dekilerin tamamının doğru olduğunu görürüz. Fakat **Romberg**, burada şu yuvarlatmayı yapmıştır:

$$(4.16) \quad \hat{R}_8 = \frac{64\hat{S}_8 - \hat{S}_4}{63} = \frac{64 \times 0,999999879 - 0,999992394}{63} = 0,9999999978095238095 \dots \lesssim 0,999999998.$$

4. Sütun: Burada eğer $\hat{Q}_8$ 'i tablodan bulmak ve 10 basamaklı olarak yazmak istersek şu sonuç çıkar:

$$(4.17) \quad \hat{Q}_8 = \frac{256\hat{R}_8 - \hat{R}_4}{255} = \frac{256 \times 0,9999999981478186179 \dots - 0,9999995392504460658 \dots}{255} = 0,9999999999474161574 \dots \lesssim 1,0.$$

Özetle, Mathematica bize bu konuda diyor ki **Romberg**'in Tablo 4.1'i şöyle olacaktır:

```
In[ ]:= NumberForm[TableForm[Table[N[romb[p i, j]], {i, 0, n}, {j, 0, i}]], {10, 9}]

Out[ ]//NumberForm=
0.916297857
1.018160673
0.994339480      0.999542254
1.001125581      0.999989908
0.999639087      0.999992394      0.999999539
1.000070227      0.999999870      1.000000028
0.999977330      0.999999879      0.999999998      1.000000000
1.000004387      0.999999998      1.000000000      1.000000000
```

Bu tablodakiler gerçek sonuçlar olduğundan **Romberg**'in turuncu tablosundakilere göre farklı olabilir. Lütfen makinenin ayarlarıyla oynamayınız!

Tablo 4.3. Mathematica'ya göre Tablo 4.1'in düzeltilmiş şekli.

Şimdi bu tabloda her şey net olarak gayet iyi gözüküyor. Buna göre **Romberg**'in $\hat{Q}_8 = 1,0$ olarak nasıl verdiğini açık bir şekilde görüyoruz. Çünkü **Romberg** bunun “1” olduğunu orta nokta formülünden elde edilen bir sonraki satırdaki sonuca bakarak karar vermiş görünür. Şöyle düşünmüş olmalı: “3. ve 4. sütunların sonundaki değerler 1, o zaman 4. sütunun ilk satırındaki değer de 1 olduğundan son satırı yazmama gerek yok!”

Fakat **Romberg**, eğer MADAS ATG-20 yerine 20 basamaklı sonuçlar veren bir makine, örneğin NUSSE, kullanmış olsaydı şu tabloyu verecekti:

In[32]:= NumberForm[TableForm[Table[N[romb[p i, j], 25], {i, 0, 5}, {j, 0, i}]], {20, 19}]

Out[32]//NumberForm=

0.9162978572970230279					
1.0181606733279589316					
0.9943394795743362508	0.9995422543928237989				
1.0011255808985164609	0.9999899080698869629				
0.9996390870120326263	0.9999923941745457180	0.9999995392504460659			
1.0000702269408937688	0.999998700103855894	1.0000000281364252501			
0.9999773298155047538	0.999998793357362289	0.999999981478186180	0.999999999474161574		
1.0000043873757185216	0.999999980713735051	1.0000000001040875990	0.999999999941568631		
0.9999985813392004897	0.999999981074468721	0.99999999927121204	0.99999999999469969	0.99999999999983467	
1.0000002741831013557	0.999999999702602114	1.0000000000004012702	0.99999999999946571	1.0000000000000003637	
0.9999999113059507645	0.999999999704007828	0.999999999999714798	0.99999999999999478	0.99999999999999996	1.0000000000000000000
1.0000000171360096351	0.9999999999995368537	1.00000000000000015623	0.99999999999999949	1.0000000000000000001	1.0000000000000000000

Tablo 4.4. Mathematica ile Tablo 4.3'ün 2 kat geliştirilmiş şekli.

Bu tabloda görüldüğü üzere **Romberg**'in Tablo 4.1'de yaptığı gibi son satırı (kırmızı bantla) sildim. Çünkü hedeflenen sonuç “1” için son satıra gerek yok! Bu tablo, aynı zamanda (4.7)'ye göre (4.8) ile **Ole Amble**'in algoritmasını genelleştirdiğimi gösterir. Çünkü bu tabloda 32h, 16h, 8h, 4h, 2h ve h aralık uzunlukları kullanılmıştır!

[Bu sonucu, aşağıdaki fotoğraftaki soldan sağa doğru üçüncü, ayakta duran çocuğa armağan ediyorum!](#)



Amble Ailesi. Soldan sağa doğru anne **Anne Amble** (1884, [Asker](#)), çocuklardan; ayakta duran **Marie Amble** (1911), **Ole Amble** (1913) ve oturanlar **Anne Elisabeth Wiberg** (1919), **Eilif (Alf) Amble** (1921), baba mühendis kaptan **Ole Amble Ommundsen** (04.10.1877, [Reine/Moskenes-1958, Trøndheim](#). Not. Danca'da [Trøndelag](#)'dan geldiği için “**Trøndheim**” olarak yazılır ve “**Tröndheim**” olarak okunur).

Derya PAMUK TULUM