DET KONGELIGE NORSKE VIDENSKABERS SELSKABS
FORHANDLINGER Bind 28 1955 Nr 7

517.61
(517.2)

Vereinfachte numerische Integration

VON

WERNER ROMBERG

(Fremlagt i Fellesmøtet 14de februar 1955 av herr S. Selberg)

Zu berechnen sei ein Integral

$$I = \int_a^b F(x)\, dx$$

angenähert aus Funktionswerten an äquidistanten Teilpunkten. Am häufigsten benutzt man die Trapez- und die Simpson-Formel. Gauss hat auch Polynome höheren Grades durch die Punkte F_k gelegt und die zugehörigen Koeffizientenfolgen berechnet. Wir geben hier nur diejenigen für 4 und 8 Intervalle wieder:

Trapez T: 1, 1
Simpsom S: 1, 4, 1
Gauss G^{I}: 7, 32, 12, 32, 7
Gauss G^{II}: 989, 5888, —929, 10496, —4540, 10496, —929, 5888, 989

Die Gauss'schen Formeln werden, wegen ihrer unbequemeren Gewichte, selten benutzt. Durch eine etwas abgeänderte Berechnungsweise können wir aber ausser S und G^{I} auch einen noch besseren Näherungswert für I berechnen, ohne die oben genannten verschiedenen Koeffizienten zu benutzen. Dazu teilen wir das Intervall $a \leqq x \leqq b$ in 8N Teile, $b - a = 8\,N\,h$, bezeichnen $F(a + kh)$, für $k = 1, 2, \ldots, 8N - 1$, mit F_k, aber speziell den Mittelwert aus $F(a)$ und $F(b)$ mit F_0 und berechnen zunächst die gröbste Approximation nach der Trapezformel

$$T_1 = 8h \cdot \sum_{n=0}^{N-1} F_{8n} = (b - a) \cdot \overline{\sum_{n=0}^{N-1}} F_{8n}$$

(Überstreichen bedeute das arithmetische Mittel, Intervall-Länge $8h$).

Jetzt halbieren wir alle Intervalle, und bilden den Mittelwert der F aller dabei neu auftretenden Teilpunkte, also

$$U_1 = 8h \cdot \sum_{n=0}^{N-1} F_{8n+4} = (b-a) \cdot \overline{\Sigma F_{8n+4}} \, .$$

Bei nochmaligem Halbieren:

$$U_2 = (b-a) \cdot \overline{\Sigma F_{8n+2} + F_{8n+6})} \, ,$$

und schliesslich:

$$U_4 = (b-a) \cdot \overline{\Sigma(F_{8n+1} + F_{8n+3} + F_{8n+5} + F_{8n+7})}$$

Dann sind die Trapeznäherungen feinerer Teilung

$$T_2 = \overline{T_1 + U_1} \, , \; T_4 = \overline{T_2 + U_2} \, , \; T_8 = \overline{T_4 + U_4}$$

mit den Intervall-Längen $4h$, $2h$ und h.

Die U und T sind grobe Approximationen an I, da das Restglied prop. h^2 ist. Bekanntlich [1] kan man dann aus je zwei benachbarten Halbierungen eine genauere Näherung gewinnen, also

$$S_2 = T_2 + \frac{T_2 - T_1}{2^2 - 1} \, ; \; S_4 = T_4 + \frac{T_4 - T_2}{2^2 - 1} \, ; \; S_8 = T_8 + \frac{T_4 - T_8}{2^2 - 1}$$

und

$$V_2 = U_2 + \frac{U_2 - U_1}{2^2 - 1} \, ; \; V_4 = U_4 + \frac{U_4 - U_2}{2^2 - 1} \, .$$

Man scheint nicht bemerkt zu haben, dass die S genau die Näherung nach der Simpson-Formel S darstellen.

Da die S und V ein Restglied prop. h^4 besitzen, gewinnt man aus ihnen dann entsprechend [1]

$$R_4 = S_4 + \frac{S_4 - S_2}{2^4 - 1} \, ; \; R_8 = S_8 + \frac{S_8 - S_4}{2^4 - 1} \text{ und } W_4 = V_4 + \frac{V_4 - V_2}{2^4 - 1} \, .$$

R_4 und R_8 sind genau die Näherungen an I, die sich bei Verwendung der Gewichtsfaktoren G^1 ergeben hätten. R und W haben ein Restglied prop. h^6; daher bilden wir weiter

$$Q_8 = R_8 + \frac{R_8 - R_4}{2^6 - 1} \, , \quad \text{mit einem Restgliede prop. } h^8 \, , \text{ usw.}$$

Der Vorteil dieser Methode beruht darauf, dass jedes neue Halbieren nur den Mittelwert der neuen Funktionenswerte erfordert, multipliziert mit $(b-a)$; dieses neue U erlaubt, die Folgen der T, S, R, Q und U, V, W, je um ein Glied zu verlängern. Da die Restglieder prop. h^2, h^4, h^6, h^8 sind, ergeben sich so einfach Näherungen immer höherer Ordnung.

Die oben angeführte Näherung G^{11} ist nicht in unseren Näherungen Q usw. enthalten, da wir die F in U_4 mit gleichen Gewichten versehen.

Wir setzen voraus, dass F sich in $a \leqq x \leqq b$ in eine Taylor-Reihe entwickeln lässt; dann kann man die Restglieder aller Näherungen leicht berechnen. Schreibt man diese für ein Teilintervall der Länge $8h$ auf, so zeigt sich, dass das Glied der niedrigsten h-Potenz im Restgliede von T und U entgegensetztes Vorzeichen hat. (Siehe Anhang). Nehmen wir im Folgenden an, dass das Glied niedrigster Ordnung in h gegenüber den höheren h-Potenzen im Restgliede überwiegt, dann wird I zwischen T und U liegen, und zwar etwa in der Mitte zwischen T_1 und U_1, T_2 und U_2, T_4 und U_4. Dasselbe zeigen die Zahlenpaare S_2, V_2; S_4, V_4; R_4, W_4. Da nun $S_4 = \overline{S_2 + V_2}$, $S_8 = \overline{S_4 + V_4}$, $R_8 = \overline{W_4 + R_4}$, sind die durch die Einschliessung zu erwartenden I-Näherungswerte schon in unseren S und R enthalten, und nicht genauer als der zuletzt berechnete Wert unserer Methode.* So ist bei obiger Teilung, in je $2^3 = 8$ Teile, obiges Q_8 die genaueste Näherung an I, die sich aus den U_1, U_2, U_4 berechnen lässt; nochmaliges Halbieren gäbe als bestes ein P_{16} u.s.w.

Das Restglied bei P_{16} ist prop. h^{10}, bei einer Einteilung in 16 Teile; 16 ist teilbar durch 5 verschiedene Zahlen: 1, 2, 4, 8, 16, also $\nu(16) = 5$, und jede Teilung erlaubt das Entfernen einer h^2-Potenz. Würde man anders einteilen, etwa nur in 12 gleiche Teile, $\nu(12) = 6$, so könnte man mit Hilfe der T_1, T_2, T_3, T_4, T_6, T_{12} sogar eine Näherung mit einem Rest prop. h^{12} erreichen. Dann werden die Formeln aber wieder komplizierter.

Auch manche anderen Näherungsmethoden können unser Verfahren entsprechend anpassen, sobald Näherungswerte bei mehrmaliger feinerer Teilung vorliegen. So hat u.A. O. AMBLE [2] gezeigt, wie man durch Hinzufügen je eines Punktes im Abstande h auf beiden Seiten a u s s e r h a l b des Integrationsgebietes $a \leqq x \leqq b$ eine bessere Annäherung an I finden kann. Er bildet (in unseren Symbolen)

$$\hat{T}_8 = T_8 + \frac{h}{24}(F_1 - F_{-1} + F_{8N-1} - F_{8N+1}) = T_8 + A_8 \tag{2}$$

Durch Hinzufügen dieser Rand-Korrektur A_8 zur Trapezformel T_8 erhält er eine Näherung, deren Restglied nur noch prop. h^4 ist. Hier seien die mit Randkorrektur versehen Näherungen durch Beifügen eines ^ gekennzeichnet. Amble berechnet auch höhere Näherungen, unter Hinzufügen weiterer Aussenpunkte; diese Formeln werden entsprechend komplizierter.

Wir können jetzt unsere Methode ganz entsprechend anwenden, indem wir bilden

$$\hat{T}_1 = T_1 + A_1 = T_1 + \frac{8h}{24}(F_8 - F_{-8} + F_{8N-8} - F_{8N+8})$$

* Siehe aber die Schlussbemerkung im Anhang.

$$\hat{T}_2 = T_2 + A_2 = T_2 + \frac{4h}{24}(F_4 - F_{-4} + F_{8N-4} - F_{8N+4})$$

$$\hat{T}_4 = T_4 + A_4 = T_4 + \frac{2h}{24}(F_2 - F_{-2} + F_{8N-2} - F_{8N+2})$$

und

$$\hat{U}_1 = U_1 - 2A_2$$
$$\hat{U}_2 = U_2 - 2A_4$$
$$\hat{U}_4 = U_4 - 2A_8$$

Da Ambles Ansatz symmetrisch ist um F_4, enthält die Restgliedreihe wieder nur gerade h-Potenzen. Da die $\hat{T}$-Reste schon prop. h^4 sind, ebenso die der $\hat{U}$, werden die höheren Näherungen:

$$\hat{S}_4 = \hat{T}_4 + \frac{\hat{T}_4 - \hat{T}_2}{15}, \quad \hat{S}_8 = \hat{T}_8 + \frac{T_8 - T_4}{15}$$

$$\hat{V}_4 = \frac{\hat{U}_4 - \hat{U}_2}{15} \text{ usw.}$$

alle mit einem Restglied prop. h^6, dann

$$\hat{R}_8 = \hat{S}_8 + \frac{\hat{S}_8 - \hat{S}_4}{63} \text{ usw.}$$

mit einem Restgliede prop. h^8 usw.

Als Beispiel berechnen wir

$$I = \int_0^1 \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} z \, dz = 1 \text{ angenähert,}$$

indem wir das Intervall in 8 gleiche Teile teilen, $N = 1$, $8h = 1$.

$F(a) = 1{,}57079\ 6327$, $F(b) = 0$.

$F_1 = 1{,}54061\ 3916$
$F_2 = 1{,}45122\ 6576$
$F_3 = 1{,}30606\ 9413$
$F_4 = 1{,}11072\ 0735$
$F_5 = 0{,}87268\ 7681$
$F_6 = 0{,}60111\ 7730$
$F_7 = 0{,}30644\ 7161$
$F_0 = 0{,}78539\ 8163$

Hieraus $U_1 = F_4$, $T_1 = F_0$,

$$U_2 = \overline{F_2 + F_6} = 1{,}02617\ 2153$$

$$U_4 = \overline{F_1 + F_3 + F_5 + F_7} = 1{,}00645\ 4543$$

Für Ambles Methode brauchen wir ferner, wegen $F_{-k} = F_k$,

$$F_{8+k} = -F_{8+k}, \ F_{16} = -F(a),$$

$$A_1 = \frac{8h}{24}(F(a) - F_{16}) = 0{,}13089\ 9694$$

$$A_2 = \frac{4h}{24}(F_4 - F_{12}) = 0{,}04628\ 0031$$

$$A_4 = \frac{2h}{24}(F_6 - F_{10}) = 0{,}01252\ 3286$$

$$A_8 = \frac{h}{24}(F_7 - F_9) = 0{,}00319\ 2158$$

Die Näherungswerte sind in der folgenden Tabelle aufgeführt:

Tabelle der Näherungswerte wachsender Ordnung

Intervall-länge	Rest prop: h^2	h^4	h^6	h^8
$8h$	$T_1 = 0{,}78539\ 8163$			
	$U_1 = 1{,}11072\ 0735$			
$4h$	$T_2 = 0{,}94805\ 9449$	$S_2 = 1{,}00227\ 9878$		
	$U_2 = 1{,}02617\ 2153$	$V_2 = 0{,}99798\ 9293$		
$2h$	$T_4 = 0{,}98711\ 5801$	$S_4 = 1{,}00013\ 4584$	$R_4 = 0{,}99999\ 1566$	
	$U_4 = 1{,}00645\ 4543$	$V_4 = 0{,}99988\ 2006$	$W_4 = 1{,}00000\ 8187$	
h	$T_8 = 0{,}99678\ 5172$	$S_8 = 1{,}00000\ 8296$	$R_8 = 0{,}99999\ 9876$	$Q_8 = 1{,}00000\ 0008$

Näherungswerte, mit Aussenpunkten:

Intervall-länge	Rest-prop. h^4	h^6	h^8	h^{10}
$8h$	$\hat{T}_1 = 0{,}91629\ 7857$			
	$\hat{U}_1 = 1{,}01816\ 0673$			
$4h$	$\hat{T}_2 = 0{,}99433\ 9480$	$\hat{S}_2 = 0{,}99954\ 2255$		
	$\hat{U}_2 = 1{,}00112\ 5581$	$\hat{V}_2 = 0{,}99998\ 9908$		
$2h$	$\hat{T}_4 = 0{,}99963\ 9087$	$\hat{S}_4 = 0{,}99999\ 2394$	$\hat{R}_4 = 0{,}99999\ 9539$	
	$\hat{U}_4 = 1{,}00007\ 0227$	$\hat{V}_4 = 0{,}99999\ 9870$	$\hat{W}_4 = 1{,}00000\ 0028$	
h	$\hat{T}_8 = 0{,}99997\ 7330$	$\hat{S}_8 = 0{,}99999\ 9879$	$\hat{R}_8 = 0{,}99999\ 9998$	$\hat{Q}_8 = 1{,}0$

Wir sehen, dass Q_8 mit I in 8, $\hat{Q}_8$ sogar in 10 Dezimalen übereinstimmt. Welche Methode man verwendet, hängt ganz davon ab, wie sich die F_k berechnen lassen. Sind sie leicht zu finden, teilt man besser feiner ein. Erfordert ihre numerische Berechnung viel Arbeit, dann empfiehlt sich eine Methode hoher Näherung, wie wir sie hier angegeben haben.

ANHANG

Zur Berechnung der Restglied-Reihen.

Wir greifen aus den N Intervallen der Länge $8h$ eines heraus, und transformieren den Koordinaten-0-Punkt durch $x = 8hn - 4hz$ in die Mitte des Intervalles. Die Näherungswerte an das Integral i über dieses Teilintervall der Länge $8h$ bezeichnen wir mit kleinen Buchstaben, und $F(x) = f(z)$. Es ist, wegen

$$f(z) = \sum_{l=0}^{\infty} f^{(l)}(0) \cdot \frac{z^l}{l!}$$

$$i = \int_{-4h}^{4h} f(z)\, dz = 8h \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{f^{(2l)}(0)}{(2l+1)!} (4h)^{2l}$$

$$t_1 = \frac{8h}{2} \cdot (f_{4h} + f_{-4h}) = 8h \sum_{l=0}^{\infty} \frac{f^{(2l)}(0)}{(2l)!} (4h)^{2l}$$

also $i = t_1 + r(t_1)$ mit

$$r(t_1) = -\,8h \sum_{l=1}^{\infty} f^{(2l)}(0) \cdot \frac{(4h)^{2l}}{(2l+1)!} \cdot (2l)\,.$$

Da $u_1 = 8hf_0$, wird $i = u_1 + r(u_1)$ mit

$$r(u_1) = +\,8h \sum_{l=1}^{\infty} f^{(2l)}(0) \frac{(4h)^{2l}}{(2l+1)!}\,.$$

So erhält man als Restglieder Reihen der Form

$$r = 8h \cdot \left[f''(0) \cdot \frac{h^2}{3!} \cdot a + f^{(4)}(0) \cdot \frac{h^4}{5!} \cdot b + f^{(6)}(0) \cdot \frac{h^6}{7!} \cdot c + f^{(8)}(0) \cdot \frac{h^8}{9!} \cdot d + \ldots\right]$$

mit den folgenden Koeffizienten:

	$a =$	$b =$	$c =$	$d =$
u_1	16	256	4096	65536
u_2	4	176	3649	63232
u_4	1	51	1541	36007
t_1	— 32	— 1024	— 24576	— 524288
t_2	— 8	— 384	— 10240	— 229376
t_4	— 2	— 104	— 3296	— 83072
t_8	— 0,5	— 26,5	— 877,5	— 23532,5
v_2	—	249,333	3498,666	62464
v_4	—	9,333	838,666	26932
s_2	—	— 170,666	— 5461,333	— 131072
s_4	—	— 10,666	— 981,333	— 34304
s_8	—	— 0,666	— 71,333	— 3686
w_4	—	—	661,333	24563,2
r_4	—	—	— 682,666	— 27852,8
r_8	—	—	— 10,666	— 1644,8
q_8	—	—	—	— 1228,8

Man erkennt auch das abwechselnde Vorzeichen der an u und an t sich anschliessenden Näherungen.

Unsere Methode liefert auf einfache Weise die Näherungen höherer Ordnung. Trotzdem kann gelegentlich eine Näherung niedriger Ordnung genauere Werte ergeben, falls nämlich das Restglied niedriger Ordnung im einen Intervallteil das des anderen Intervallteiles kompensiert. Unsere Sätze gelten dann für jeden der einzelnen Intervallteile.

---

[1] z.B. L. Collatz: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, S. 6, Gl. (1.7) Springer-Verlag 1951.

[2] O. Amble: Kgl. N. Vid. Selsk. Forh. XXV, 1952, 38—41.

Trykt 28de april 1955
I kommisjon hos F. Bruns Bokhandel
Aktietrykkeriet i Trondhjem