

**Vereinfachte Numerische Integration**

VON

WERNER ROMBERG

(Fremlagt i Fellesmøtet 14de februar 1955 av herr *S. Selberg*)

Zu berechnen sei ein Integral

$$I = \int_a^b F(x)dx$$

angenähert aus Funktionswerten an äquidistanten Teilpunkten. Am häufigsten benutzt man die Trapez Formel und die Simpson Formel. Gauss hat auch Polynome höheren Grades durch die Punkte  $F_k$  gelegt und die zugehörigen Koeffizientenfolgen berechnet. Wir geben hier nur diejenigen für 4 und 8 Intervalle wieder:

Trapez	T:	1	1							
Simpson	S:	1	4	1						
Gauss	$G^1$ :	7	32	12	32	7				
Gauss	$G^{11}$ :	989	5888	-929	10496	-4540	10496	-929	5888	989

Die Gauss'schen Formeln werden, wegen ihrer unbequemerer Gewichte, selten benutzt. Durch eine etwas abgeänderte Berechnungsweise können wir aber ausser S und  $G^1$  auch einen noch besseren Näherungswert für I berechnen, ohne die oben genannten verschiedenen Koeffizienten zu benutzen. Dazu teilen wir das Intervall  $a \leq x \leq b$  in  $8N$  Teile,  $b - a = 8Nh$ , bezeichnen  $F(a + kh)$ , für  $k = 1, 2, \dots, 8N - 1$ , mit  $F_k$ , aber speziell den Mittelwert aus  $f(a)$  und  $f(b)$  mit  $F_0$  und berechnen zunächst die grösste Approximation nach der Trapezformel

$$T_1 = 8h \sum_{n=0}^{N-1} F_{8n} = (b - a) \overline{\sum_{n=0}^{N-1} F_{8n}}$$

(Überstreichen bedeute das arithmetische Mittel, Intervall-Länge  $8h$ ).

Jetzt halbieren wir alle Intervalle, und bilden den Mittelwert der F aller dabei neu auftretenden Teilpunkte, also

$$U_1 = 8h \sum_{n=0}^{N-1} F_{8n+4} = (b - a) \overline{\sum_{n=0}^{N-1} F_{8n+4}}$$

Bei nochmaligem Halbieren:

$$U_2 = (b - a) \overline{\sum_{n=0}^{N-1} (F_{8n+2} + F_{8n+6})},$$

und schliesslich:

$$U_4 = (b - a) \overline{\sum_{n=0}^{N-1} (F_{8n+1} + F_{8n+3} + F_{8n+5} + F_{8n+7})}.$$

Dann sind die Trapeznäherungen feinerer Teilung

$$T_2 = \overline{T_1 + U_1}, T_4 = \overline{T_2 + U_2}, T_8 = \overline{T_4 + U_4}$$

mit den Intervall-Längen  $4h$ ,  $2h$  und  $h$ .

Die U und T sind grobe Approximationen an I, da das Restglied prop.  $h^2$  ist. Bekanntlich [1] kann man dann aus je zwei benachbarten Halbierungen eine genauere Näherung gewinnen, also

$$S_2 = T_2 + \frac{T_2 - T_1}{2^2 - 1}, S_4 = T_4 + \frac{T_4 - T_2}{2^2 - 1}, S_8 = T_8 + \frac{T_8 - T_4}{2^2 - 1}$$

und

$$V_2 = U_2 + \frac{U_2 - U_1}{2^2 - 1}, V_4 = U_4 + \frac{U_4 - U_2}{2^2 - 1}.$$

Man scheint nicht bemerkt zu haben, dass die S genau die Näherung nach der Simpson Formel S darstellen.

Da die S und V ein Restglied prop.  $h^4$  besitzen, gewinnt man aus ihnen dann entsprechend [1]

$$R_4 = S_4 + \frac{S_4 - S_2}{2^4 - 1}, R_8 = S_8 + \frac{S_8 - S_4}{2^4 - 1} \text{ und } W_4 = V_4 + \frac{V_4 - V_2}{2^4 - 1}.$$

$R_4$  und  $R_8$  sind genau die Näherung an I, die sich bei Verwendung der Gewichtungsfaktoren  $G^1$  ergeben hätten. R und W haben ein Restglied prop.  $h^6$ , daher bilden wir weiter

$$Q_8 = R_8 + \frac{R_8 - R_4}{2^6 - 1}$$

mit einem Restglied prop.  $h^8$ , usw.

Der Vorteil dieser Methode beruht darauf, dass jedes neue Halbieren nur den Mittelwert der neuen Funktionswerte erfordert, multipliziert mit  $b - a$ , dieses neue U erlaubt, die Folgen der T, S, R, Q und U, V, W je um ein Glied zu verlängern. Da die Restglieder prop.  $h^2, h^4, h^6, h^8$  sind, ergeben sich so einfach Näherungen immer höherer Ordnung.

Die oben angeführte Näherung  $G^{11}$  ist nicht in unseren Näherung Q usw. Enthalten, da wir die F in  $U_4$  mit gleichen Gewichten versehen.

Wir setzen voraus, dass F sich in  $a \leq x \leq b$  in eine Taylor-Reihe entwickeln lässt; dann kann die Restglieder aller Näherungen leicht berechnen. Schreibt man diese für ein Teilintervall der Länge  $8h$  auf, so zeigt sich, dass das Glied der niedrigsten  $h$ -Potenz im Restgliede von T und U entgegengesetztes Vorzeichen hat (Siehe [Anhang](#)). Nehmen wir im Folgenden an, dass das Glied niedrigster Ordnung in  $h$  gegenüber den höheren  $h$ -Potenzen im Restgliede überwiegt, dann wird I zwischen T und U liegen, und zwar etwa in der Mitte zwischen  $T_1$  und  $U_1$ ,  $T_2$  und  $U_2$ ,  $T_4$  und  $U_4$ . Dasselbe zeigen die Zahlenpaare  $S_2, V_2; S_4, V_4; R_4, W_4$ . Da nun  $S_4 = \overline{S_2 + V_2}$ ,  $S_8 = \overline{S_4 + V_4}$ ,  $R_8 = \overline{R_4 + W_4}$  sind die durch die Einschliessung zu erwartenden I-Näherungswerte schon in unseren S und R enthalten, und nicht genauer als der zuletzt berechnete Wert unserer Methode (<sup>1</sup>). So ist bei obiger Teilung, in je  $2^3 = 8$  Teile, obiges  $Q_8$  die genaueste Näherung an I, die sich aus den  $U_1, U_2, U_4$  berechnen lässt; nochmaliges Halbieren gäbe als bestes ein  $P_{16}$  u.s.w.

Das Restglied bei  $P_{16}$  ist prop.  $h^{10}$ , bei einer Einteilung in 16 Teile; 16 ist teilbar durch 5 verschiedene Zahlen: 1,2,4,8,16 also  $v(16) = 5$ , und jede Teilung erlaubt das Entfernen einer  $h^2$ -Potenz. Würde man anders einteilen, etwa nur in 12 gleiche Teile  $v(12) = 6$ , so könnte man mit Hilfe der  $T_1, T_2, T_3, T_4, T_6, T_{12}$  sogar eine Näherung mit einem Rest prop.  $h^{12}$  erreichen. Dann werden die Formeln aber wieder komplizierter.

Auch manche anderen Näherungsmethoden können unser Verfahren entsprechend anpassen, sobald Näherungswerte bei mehrmaliger feinerer Teilung vorliegen. So hat u.a. [O. AMBLE](#) [2] gezeigt, wie man durch Hinzufügen je eines Punktes im Abstände  $h$  auf beiden Seiten ausserhalb des Integrationsgebietes  $a \leq x \leq b$  eine bessere Annäherung an I finden kann. Er bildet (in unseren Symbolen)

$$(*) \hat{T}_8 = T_8 + \frac{h}{24}(F_1 - F_{-1} + F_{8N-1} - F_{8N+1}) = T_8 + A_8.$$

Durch Hinzufügen dieser Rand-Korrektur  $A_8$  zur Trapezformel  $T_8$  erhält er eine Näherung, deren Restglied nur noch prop.  $h^4$  ist. Hier seinen die mit Rand-korrektur versehenen Näherung durch Beifügen eines "^\wedge" gekennzeichnet. Amble berechnet auch höhere Näherungen, unter Hinzufügen weiterer Aussenpunkte; diese Formeln werden entsprechend komplizierter.

Wir können jetzt unsere Methode ganz entsprechend anwenden, indem wir bilden

$$\begin{aligned} \hat{T}_1 &= T_1 + A_1 = T_1 + \frac{8h}{24}(F_8 - F_{-8} + F_{8N-8} - F_{8N+8}), \\ \hat{T}_2 &= T_2 + A_2 = T_2 + \frac{4h}{24}(F_4 - F_{-4} + F_{8N-4} - F_{8N+4}), \\ \hat{T}_4 &= T_4 + A_4 = T_4 + \frac{2h}{24}(F_2 - F_{-2} + F_{8N-2} - F_{8N+2}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \hat{U}_1 &= U_1 - 2A_2, \\ \hat{U}_2 &= U_2 - 2A_4, \\ \hat{U}_4 &= U_4 - 2A_8. \end{aligned}$$

(<sup>1</sup>) Siehe aber die Schlussbemerkung im Anhang.

Da Ambles Ansatz symmetrisch ist um  $F_4$ , enthält die Restgliedreihe wieder nur gerade  $h$ -Potenzen. Da die  $\hat{T}$ -Reste schon prop.  $h^4$  sind, ebenso die der  $\hat{U}$ , werden die höheren Näherungen:

$$\hat{S}_4 = \hat{T}_4 + \frac{\hat{T}_4 - \hat{T}_2}{2^4 - 1}, \hat{S}_8 = \hat{T}_8 + \frac{\hat{T}_8 - \hat{T}_4}{2^4 - 1}, \hat{V}_4 = \hat{U}_4 + \frac{\hat{U}_4 - \hat{U}_2}{2^4 - 1} \text{ usw.}$$

alle mit einem Restglied prop.  $h^6$ , dann

$$\hat{R}_8 = \hat{S}_8 + \frac{\hat{S}_8 - \hat{S}_4}{2^6 - 1} \text{ usw.}$$

mit einem Restgliede prop.  $h^8$  usw.

Als Beispiel berechnen wir

$$I = \int_0^1 \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}z\right) dz = 1 \text{ angenähert,}$$

indem wir das Intervall in 8 gleiche Teile teilen,  $N = 1, 8h = 1$ .

$$F(a) = 1,570796327, F(b) = 0.$$

$$F_1 = 1,540613916$$

$$F_2 = 1,451226576$$

$$F_3 = 1,306069413$$

$$F_4 = 1,110720735$$

$$F_5 = 0,872687681$$

$$F_6 = 0,601117730$$

$$F_7 = 0,306447161$$

$$F_0 = 0,785398163$$

$$\text{Hieraus } U_1 = F_4, T_1 = F_0,$$

$$U_2 = \frac{F_2 + F_6}{2} = 1,026172153$$

$$U_4 = \frac{F_1 + F_3 + F_5 + F_7}{4} = 1,006454543$$

Für Ambles Methode brauchen wir ferner, wegen  $F_{-k} = F_k$ ,

$$F_{8+k} = -F_{8-k}, F_{16} = -F(a),$$

$$A_1 = \frac{8h}{24} (F(a) - F_{16}) = 0,130899694$$

$$A_2 = \frac{4h}{24} (F_4 - F_{12}) = 0,046280031$$

$$A_4 = \frac{2h}{24} (F_6 - F_{10}) = 0,012523286$$

$$A_8 = \frac{h}{24} (F_7 - F_9) = 0,003192158$$

Die Näherungswerte sind in der folgenden Tabelle aufgeführt:

Tabelle der Näherungswerte wachsender Ordnung				
Intervall-Länge	Rest Prop.			
	$h^2$	$h^4$	$h^6$	$h^8$
8h	$T_1 = 0,785398163$			
	$U_1 = 1,110720735$			
4h	$T_2 = 0,948059449$	$S_2 = 1,002279878$		
	$U_2 = 1,026172153$	$V_2 = 0,997989293$		
2h	$T_4 = 0,987115801$	$S_4 = 1,000134584$	$R_4 = 0,999991566$	
	$U_4 = 1,006454543$	$V_4 = 0,999882006$	$W_4 = 1,000008187$	
h	$T_8 = 0,996785172$	$S_8 = 1,000008296$	$R_8 = 0,999999876$	$Q_8 = 1,000000008$

Näherungswerte, mit Aussenpunkten:

Tabelle der Näherungswerte wachsender Ordnung				
Intervall-Länge	Rest Prop.			
	$h^4$	$h^6$	$h^8$	$h^{10}$
8h	$\hat{T}_1 = 0,916297857$			
	$\hat{U}_1 = 1,018160673$			
4h	$\hat{T}_2 = 0,994339480$	$\hat{S}_2 = 0,999542255$		
	$\hat{U}_2 = 1,001125581$	$\hat{V}_2 = 0,999989908$		
2h	$\hat{T}_4 = 0,999639087$	$\hat{S}_4 = 0,999992394$	$\hat{R}_4 = 0,999999539$	
	$\hat{U}_4 = 1,000070227$	$\hat{V}_4 = 0,999999870$	$\hat{W}_4 = 1,000000028$	
h	$\hat{T}_8 = 0,999977330$	$\hat{S}_8 = 0,999999879$	$\hat{R}_8 = 0,999999998$	$\hat{Q}_8 = 1,0$

Wir sehen, dass  $Q_8$  mit  $I$  in 8,  $\hat{Q}_8$  sogar in 10 Dezimalen übereinstimmt. Welche Methode man verwendet, hängt ganz davon ab, wie sich die  $F_k$  berechnen lassen. Sind sie leicht zu finden, teilt man besser feiner ein. Erfordert ihre numerische Berechnung viel Arbeit, dann empfiehlt sich eine Methode hoher Näherung, wie wir sie hier angegeben haben.

## ANHANG

### Zur Berechnung der Restglied-Reihen.

Wir greifen aus den  $N$  Intervallen der Länge  $8h$  eines heraus, und transformieren den Koordinaten-0 Punkt durch  $x = 8hn - 4hz$  in die Mitte des Intervalles. Die Näherungswerte an das Integral  $I$  über dieses Teilintervall der Länge  $8h$  bezeichnen wir mit kleinen Buchstaben, und  $F(x) = f(z)$ . Es ist, wegen

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} f^{(m)}(0) \cdot \frac{z^m}{m!},$$

$$i = \int_{-4h}^{4h} f(z) dz = 8h \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(2m)}(0)}{(2m+1)!} (4h)^{2m},$$

$$t_1 = \frac{8h}{2} (f_{4k} + f_{-4k}) = 8h \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(2m)}(0)}{(2m)!} (4h)^{2m}$$

also  $i = t_1 + r(t_1)$  mit

$$r(t_1) = -8h \sum_{m=1}^{\infty} f^{(2m)}(0) \frac{(4h)^{2m}}{(2m+1)!} (2m).$$

Da  $u_1 = 8hf_0$ , wird  $i = u_1 + r(u_1)$  mit

$$r(u_1) = +8h \sum_{m=1}^{\infty} f^{(2m)}(0) \frac{(4h)^{2m}}{(2m+1)!}.$$

So erhält man als Restglieder Reihen der Form

$$r = 8h \left( f''(0) \frac{h^2}{3!} a + f^{(4)}(0) \frac{h^4}{5!} b + f^{(6)}(0) \frac{h^6}{7!} c + f^{(8)}(0) \frac{h^8}{9!} d + \dots \right)$$

mit den folgenden Koeffizienten:

	a	b	c	d
$u_1$	16	256	4096	65536
$u_2$	4	176	3649	63232
$u_4$	1	51	1541	36007
$t_1$	32	1024	24576	524288
$t_2$	8	384	10240	229376
$t_4$	2	104	3296	83072
$t_8$	0,5	26,5	877,5	23532,5
$v_2$	—	$249, \bar{3}$	$3498, \bar{6}$	62464
$v_4$	—	$9, \bar{3}$	$838, \bar{6}$	26932
$s_2$	—	$170, \bar{6}$	$5461, \bar{3}$	131072
$s_4$	—	$10, \bar{6}$	$981, \bar{3}$	34304
$s_8$	—	$0, \bar{6}$	$71, \bar{3}$	3686
$w_4$	—	—	$661, \bar{3}$	24563,2
$r_4$	—	—	$682, \bar{6}$	27852,8
$r_8$	—	—	$10, \bar{6}$	1644,8
$q_8$	—	—	—	1228,8

Man erkennt auch das abwechselnde Vorzeichen der an u und an t sich anschließenden Näherungen.

Unsere Methode liefert auf einfache Weise die Näherungen höherer Ordnung. Trotzdem kann gelegentlich eine Näherung niedriger Ordnung im einen Intervallteil das des anderen Intervallteiles kompensiert. Unsere Sätze gelten dann für jeden der einzelnen Intervallteile.

[1] z.B. [L. COLLATZ: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, S. 6, Gl. \(1.7\) Springer-Verlag 1951.](#)

[2] [O. AMBLE: Kgl. N. Vid. Selsk. Forh. XXV, 1952, 38-41.](#)