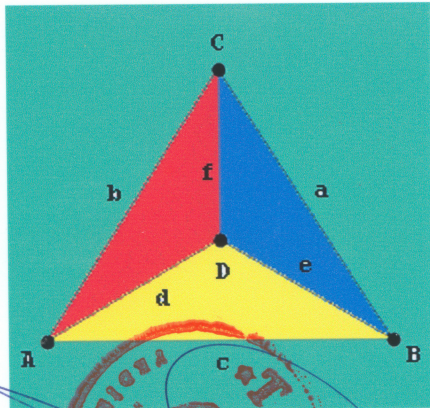


ATA Formülü ve Uygulamaları



$$(1) \begin{aligned} \triangle ABD: p_1 &= \frac{-c^2+e^2+d^2}{4}, q_1 = \frac{c^2-e^2+d^2}{4}, r_1 = \frac{c^2+e^2-d^2}{4} \\ \triangle BCD: p_2 &= \frac{-a^2+f^2+e^2}{4}, q_2 = \frac{a^2-f^2+e^2}{4}, r_2 = \frac{a^2+f^2-e^2}{4} \\ \triangle CAD: p_3 &= \frac{-b^2+d^2+f^2}{4}, q_3 = \frac{b^2-d^2+f^2}{4}, r_3 = \frac{b^2+d^2-f^2}{4} \\ \triangle ABC: p_4 &= \frac{-a^2+b^2+c^2}{4}, q_4 = \frac{a^2-b^2+c^2}{4}, r_4 = \frac{a^2+b^2-c^2}{4} \end{aligned}$$

FOR PUBLIC RELEASE

$$(2) S_{ABD} = \sqrt{\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & 0 & 1 \\ p_1 & 0 & r_1 & 1 \\ 0 & q_1 & r_1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}, S_{BCD} = \sqrt{\begin{vmatrix} 1 & p_2 & q_2 & 0 \\ 1 & p_2 & 0 & r_2 \\ 1 & 0 & q_2 & r_2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}, S_{CAD} = \sqrt{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ p_3 & q_3 & 0 & 1 \\ p_3 & 0 & r_3 & 1 \\ 0 & q_3 & r_3 & 1 \end{vmatrix}}, S_{ABC} = \sqrt{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & p_4 & q_4 & 0 \\ 1 & p_4 & 0 & r_4 \\ 1 & 0 & q_4 & r_4 \end{vmatrix}}$$

$$(3) S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} + S_{CAD} + S_{ABC}$$

$$(4) V_{ABCD} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\begin{vmatrix} p_1+q_1 & p_1 & p_3 \\ p_1 & p_2+q_2 & p_2 \\ p_3 & p_2 & p_3+q_3 \end{vmatrix}}, \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\begin{vmatrix} p_3+r_3 & p_1 & p_3 \\ p_1 & p_1+r_1 & p_2 \\ p_3 & p_2 & p_2+r_2 \end{vmatrix}}$$

NO 07592

Handwritten signature

Not: Kapaktaki bilgiler **A New Version: Problem solving with ATA formula according to Cayley-Menger determinants for tetrahedrons in the mini album: ATA formulas for the area of a simple polygon in a multidimensional space, 2004 & the 2'nd album: ATA Polygons, 2005 by Mathquake, 12.05.2004** çalışmasından alınmıştır.

$$(121) \quad (u-a)^3 + (u-b)^3 + (u-c)^3 = \begin{vmatrix} u & 1 & 0 \\ 2y & u & 1 \\ 3\frac{z}{u} & y & u \end{vmatrix} = -3uy + \frac{3z}{u} + u^3$$

denklemleri elde edilir. Buna göre (119)&(121)'den

$$(122) \quad -3uy + \frac{3z}{u} = -3uy + 3(u-a)(u-b)(u-c)$$

olur ki, bu eşitlikten (51) formülünü, yani Arşimet-Heron formülünü yeniden elde etmiş oluruz.

07592

10) Alanı Rasyonel Bir Sayı Olan Üçgen Çeşitleri:

■ Rasyonel Üçgenler:

Tanım 1: Yukarıdaki linkte verilen bir rasyonel üçgeni şu şekilde tanımlayabiliriz: Bütün kenar uzunlukları rasyonel sayılar olup alanı da bir rasyonel sayı olan üçgene "Rasyonel Üçgen" denir. Bu nedenle her üçgen rasyonel bir üçgen değildir. Örneğin, bir dik kenar uzunluğu rasyonel sayı olan ikizkenar dik üçgen bir rasyonel üçgen değildir. Çünkü bu dik üçgenin hipotenüs uzunluğu daima bir irrasyonel sayı olur. Örnek olarak, bu dik üçgenin bir dik kenar uzunluğunu 1 birim olarak alırsak hipotenüs uzunluğu $\sqrt{2}$ birim olur.

■ 1. Pisagor Üçgeni:

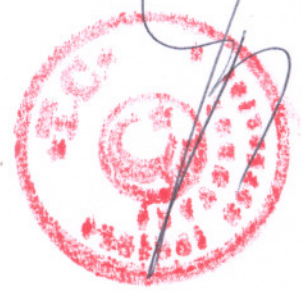
Tanım 2: Kenarlarının uzunlukları bir tam (rasyonel) sayı olan dik üçgene **Pisagor Üçgeni** denir ve bir Pisagor üçgeninin alanı daima bir tam (rasyonel) sayı olur.

Burada Pisagor Üçlüleri'nin

$(a, b, c) : (3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25), (8, 15, 17), \dots$

olarak verildiğini biliyoruz. Aslında bu üçlülerin bulunmasında kullanılan Pisagor Teoremi Pisagor'dan en az 1000 yıl önce hem Mısır'da hem de Mezopotamya'da biliniyordu: M.Ö. 1900-1600 yıllarından kalan (tarihi kesin değil) ve şimdi Columbia Üniversitesi'nde bulunan Plimpton koleksiyonundan 322 numaralı kil tablette 4 sütun halinde yazılmış sayılar var.

Bu konuyla ilgili Babilonya Tableti Plimpton 322'ye eriştiğinizde şu muhteşem tabloyla karşılaşacaksınız: Tabloda son üç sütundaki sayıların kullandığımız sayı sistemine göre yazılışını göstermektedir. 2. sütundaki herhangi bir sayının karesinden 1. sütunda, aynı sırada yer alan sayının karesini çıkarırsanız gene bir kare sayı elde edersiniz. Yani 2. sütundaki sayılar dik üçgenlerin hipotenüs uzunluklarını, 1. sütundakiler de dik kenarlardan birinin uzunluğunu gösterir. Diğer bir deyişle tablet, 15 değişik Pisagor üçlüsünü göstermektedir. Ama neden özellikle bu üçlüleri?



■ 2. Arşimet-Heron Üçgeni:

Tanım 3: Kenarlarının uzunlukları bir tam (rasyonel) sayı olan üçgenin alanı da bir tam (rasyonel) sayı ise, bu üçgene **Arşimet-Heron Üçgeni** denir (Tabii ki kaynaklarda **bu tür üçgenler Heron Üçgenleri** olarak geçmekte, ancak bu üçgenlerin bulunmasında kullanılan alan formülü, daha önceden de birçok çalışmamda söylediği gibi, **Arşimet-Heron Formülü** olarak bilindiğinden dolayı bu üçgenlere **Arşimet-Heron Üçgeni** denilmesinde ya da bu formül **nereden gelmişse, ki Babilliler'e ait olması ihtimali oldukça yüksektir, o adla kullanılmasında yarar görüyorum**). 

Bu üçgenlerin bulunması, üçgenin alanını rasyonel yapan kenarların uzunluklarına bağlı olduğundan, kısaca bu duruma bir göz atalım (Bu konuda detaylı bilgi almak isteyenler Heronian Triangle linkine bakabilirsiniz).

ABC üçgeninde u çevrenin yarısı olmak üzere alanı (52)'den

$$(123) \quad S^2(a, b, c) = u(u-a)(u-b)(u-c)$$

şeklinde yazılabilir. Şimdilik Heron üçgeni ya da Arşimet-Heron üçgeninin bulunması da, bu Diofant denkleminin çözümüne eşdeğer hale gelir. Bu çözüm için dikkat edilmesi gereken durum şudur: Bu Diofant denklemin çözümünde eşitliğin sağındaki herbir çarpanın bir tam kare olarak ele almakla tüm Arşimet-Heron üçgenlerini elde edemeyiz, yalnızca esas çözüm kümesine göre bir kısmını toplayabiliriz. Esas çözüm kümesine ulaşmak için, eşitliğin sağ tarafını bir tam kare yapan çarpanların **En Küçük Ortak Çarpan** (least common multiple) olarak ele alınmaları gerekir. Aşağıda bunun neden böyle olması gerektiğine ilişkin bir ispat vereceğim.

İspat: Eşitliğin sağ tarafındaki herbir çarpanı bir tam kare olarak ele alalım. Buna göre

$$(124) \quad u-a=x^2, \quad u-b=y^2, \quad u-c=z^2, \quad u=t^2$$

için ABC üçgeninin alanı

$$(125) \quad S(a, b, c) = xyz t$$

olduğundan x, y, z, t arasında

$$x^2 + y^2 + z^2 = u-a+u-b+u-c = 3u - (a+b+c) = 3u - 2u = u = t^2$$

nedeniyle

$$(126) \quad x^2 + y^2 + z^2 = t^2$$

bağıntısı geçerli olur.

Şimdi her Arşimet-Heron üçgeni için böyle bir durumun geçerli olmadığına ilişkin bir örnek vermemiz yeterli olacaktır. Örneğin Heron'un (13,14,15) üçgenini alırsak,

$$u = 21, \quad u-a = 8, \quad u-b = 7, \quad u-c = 6$$





Napoléon Bonaparte Kral Odası'nda/Büyük Piramit.



“Askerler; 40 yüzyıl bu piramitlerin üstünden sizlere bakıyor”, Napoléon Bonaparte (1769-1821)

Napolyon Bonapart, 1769 yılında Korsika'nın Ajaccio şehrinde doğdu. Carlo Buanoparte ile Marie Letizia Ramolino'nun ikinci oğullarıdır. Öğrenimini Brienne'de bir okulda yaptı; sonra Paris'teki Askeri Akademiye yazıldı. 1785'te Valence'daki topçu alayına katıldı. 1794'te İtalya'daki topçu birliklerinin komutanlığına getirildi. Paris'teyken Jakoben çevrelerle ilişki kurmuş olduğu anlaşıldığından, La Vendee'ye gönderilmek istendi; bunu kabul etmeyince, görevinden alındı. Paris'e döndükten sonra, Konvansiyona karşı hareketi bastırmak için, Paul François Barras ile Lazare Carnot'un kuvvetlerine katıldı. Olaylar kısa zamanda gelişerek yeni bir anayasanın ve **Direktuvanlığın** doğmasına yol açtı.

Napolyon, 1795 Ekiminde Fransa'daki ordunun başına getirildi. 1796 Şubatında da İtalya'daki ordunun başkomutanı oldu. Bu arada General de Beauharnais'in dul karısı Josephine ile evlendi. 1796 Nisanında ilk İtalya seferinin yaptı. Bu sefer, Napolyon'un ününü yaydı. Stratejik ustalığın bir şaheseri sayılan İtalya seferi, büyük başarı ile sonuçlandı. İmzalanan Campo Formio Antlaşması ile Venedik Cumhuriyeti İtalya'ya bırakılıyor, karşılığında da Belçika ve İyon adaları alınıyordu. Bu önemli siyasi olayla devrim cumhuriyeti, Avrupa'nın en tutucu devleti olan Avusturya'ya gücünü göstermiş; Napolyon da İtalya'daki Fransız yönetimini kabul ettirmiş oluyordu.

Napolyon, Paris'e döndükten sonra, Direktuvanlık tarafından İngiltere'yi ele geçirmekle görevlendirildi. Direk İngiltere'ye saldıracağına, İngiliz etki alanının en can alıcı noktasına saldırmayı uygun bulan Napolyon, Mısır seferine çıktı. Akdeniz'deki İngiliz donanmasını yenilgiye uğrattı, Malta'yı aldı. 1798 Temmuzunda da İskenderiye'ye girdi. Piramitler Savaşı'nda Memlûkleri yendi. Ancak Horatio Nelson yönetimindeki İngiliz donanması, Fransız donanmasına saldırarak gemilerini batırdı. Nelson'un başarısı üzerine İngiltere, Osmanlı Devleti, Avusturya ve Rusya, Fransa'ya karşı birleştiler. Birleşik ordu, Rus generali Alexander Suvorov'un komutasında, Napolyon'un ele geçirdiği toprakları geri aldı. Napolyon, 1799 yılında Suriye'ye girdi. Akka'nın Cezzar Ahmed Paşa tarafından başarıyla savunulması ve ordusunda belirgin salgın hastalıklar yüzünden Mısır'a çekildi. Ordusunu burada bırakarak gemi ile Fransa'ya döndü.

9 Kasım 1799'daki hükümet darbesi, Fransa tarihinde yeni bir dönemin başlamasına sebep oldu. Birkaç hafta sonra, anayasada değişiklikler yapılarak yönetim üç konsülün eline bırakıldı. Napolyon "birinci konsül" olarak, Fransa'nın mutlak hakimi oldu. Bazı reformlar yapmaya çalıştı. Devletin dağıttığı kredileri belli bir düzene soktu; 1802 yılında Fransa Bankası'nı kurdu; idari alanda bazı reformlar gerçekleştirerek valilerin ve belediye başkanlarının sivilier arasından seçilmelerini ve kendilerini seçen tek merkeze karşı sorumlu olmalarını sağladı; mahkemeleri ve emniyet örgütünü yeniden düzenledi.

Avusturya ve İngiltere orduları hala silahlarını bırakmamışlardı. Napolyon Bonapart, 1800 yılında tekrar İtalya'ya girdi ve Milano'yu aldı. Böylece Avusturya ordusunu ikiye bölmüş oluyordu. Birini kuşatma altında tutarken diğerine saldırdı. Bu saldırıları başarı ile sonuçlandırdı. Jean Victor Moreau'nun Hohenlinden'deki zaferi üzerine, Avusturya İmparatoru, İngiltere ile ittifakını bozmak ve 1801 Şubatında Luneville barış antlaşmasını imzalamak zorunda kaldı.

Napolyon kısa zamanda Fransa halkının sevgisini kazandı. Yabancı ülkelerdeki Fransızların, ülkelerine dönüp devletin modernleştirilmesinde kendisine yardımcı olmalarını sağladı. 1804'te yaptığı Code Napoleon (Napolyon

Kanunları) halk tarafından da desteklendi. Napolyon, aynı yıl, Paris'teki Notre Dame katedralinde Papa Pius VII'nin eliyle taç giyerek İmparator oldu. Napolyon İmparatorluğu boyunca sayısız zaferler kazandı. Ancak Fransa içinde beliren bazı hoşnutsuzluklara, İngiliz donanmasının gücü, İspanya ve İtalya'da tahta geçirdiği akrabalarına halk tarafından duyulan kin ve nefrete, kendine bağladığı devletlerde beliren milliyetçilik akımları da eklenmişti.

Napolyon 1812 yılında Rusya'ya girdi. Ancak yiyecek sıkıntısı, asker kaçakları ve Rusya'nın dondurucu soğuğu gibi sebepler yüzünden, ordunun yönetimi Joachim Murat'ya bırakarak Paris'e döndü. Kendisine karşı düzenlenen hükümet darbesini bastırdıktan sonra yeni bir ordu kurdu. 1813 Ekiminde Leipzig'de yenik düştü. Düşman kuvvetleri 1814'te Paris kapılarına dayanınca görevinden ayrılmak zorunda kaldı. Elbe adasına sürgüne gönderildi.

Napolyon'dan sonra Fransa tahtına XVIII. Louis geçirildi. Viyana Kongresi'ne katılan bakanlar ve delegeler, 7 Mart 1815'te Napolyon'un kaçıp Paris'e dönmüş olduğunu, halk tarafından büyük sevgi ile karşılandığını öğrendiler. Hemen bir ordu toplayan Napolyon, Belçika'ya saldırdı. Kazandığı önemsiz birkaç zaferden sonra Wellington'un komutasındaki İngiliz ve Gebhard von Blücher komutasındaki Prusya kuvvetleri tarafından 18 Haziran 1815'te Waterloo'da büyük bir yenilgiye uğratıldı.

Napolyon, Paris'e dönünce ikinci kez tahttan indirildi. Amerika'ya kaçmak istedi, ancak bunu başaramayınca İngilizlere teslim oldu. İngilizler, onu Atlantik'teki St. Helena adasına götürdüler. Napolyon, son yıllarını bu küçük adada geçirdi ve anılarını yazdırdı. Napolyon 5 Mayıs 1821'de öldü, ancak cenazesi 1840 yılında Paris'e getirilebildi ve Invalides'e gömüldü. Napolyon'un uşağı tarafından zehirlendiğini ileri sürenler vardır.



İstanbul'un fethi sırasında Fatih Sultan Mehmet.

Adı dünya tarihindeki büyük kumandanlar arasında anılan Napolyon Bonapart'a, Saint Helena adasında hapis bulunduğu sırada **"kimler büyük adamdır?"** diye sormaları üzerine Bonapart Fatih Sultan Mehmed'den bahsederek şöyle demiştir:

"Büyüklikte ben onun çırağı bile olamam. 'Niçin?' derseniz, bana pek acı gelen bir gerçeği açıklamam icap eder ki, o da şudur: Ben kılıçla fethettiğim yerleri, hayatta iken geri vermiş bir bedbahtım. O ise, fethettiği yerleri nesilden nesile intikal ettirmenin sırrına ermiş bir bahtiyardır."

Askeri dehaya sahip bir komutan olan Napolyon, siyasi bakımdan da önemliydi. Burjuva ihtilalini kendi istediği doğrultuya yöneltmiş; ne eski rejime dönülmesine, ne de bir halk hükümetinin kurulmasına yol açmıştır. Waterloo yenilgisinden sonra, Paris halkını silahlandırmaya bu yüzden cesaret edememiştir. Halk, Napolyon için silaha sarılabiliyordu ama Napolyon, bu hareketten bir halk hükümetinin doğabileceğini düşünmüştü. Orta sınıfın hakim olduğu merkezi bir hükümet biçiminin yaratıcısıydı. Napolyon'un anlayışına uygun olan bu hükümet biçimini daha sonraki yıllarda başka Avrupa devletleri de benimseyerek uyguladılar. Napolyon, milliyetçilik duygularına pek önem vermezdi; ama İtalya, Polonya, Almanya ve Balkanlarda farkında olmayarak milliyetçilik tohumlarının atılmasına sebep olmuştu.

NAPOLYON'un Son Sözleri

İhtilalde parladı. General oldu. Sonra İtalya ve Mısır seferleri onun askerlik şöhretini göklere çıkardı. İktidarı tek başına ele aldı. İhtilalden ve Cumhuriyetten sonra İmparator olabilen nadir ihtilalcilerden birisi oldu. Bu, Paradoks bastırıldığı Napalyon'un altınları üzerindeki “Cumhuriyet kanunlarına göre imparator Napalyon.” Yazısında ayan beyandır. Fransa'ya şerefler, ailesine tahtlar dağıttı.

Jozefin ile aşk maceraları ve seferde iken Jozefin tarafından resmen aldatıldığı meşhurdur. O da aşağı yukarı resmen Jozefin'i affetmek büyüklüğünü gösterdi...

Kısa boylu, düşük tansiyonlu bir müstebitti. Fakat aynı zamanda deha.

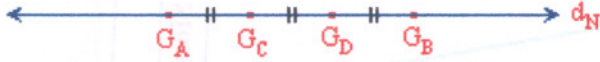
Fransız Medeni Kanununun hazırlanmasına iştirak etti... Bir hukuk merhaledisidir. Napolyon'dan kalan sözler, Napolyon'dan kalan şeref hatıralarından daha az parlak değildir.

Hem Politikayı, hem askerliği birleştirmiş nadir bir insandı. Onun bu dev tarafı, Avrupa'yı ürküttü. Teker teker yendiği kuvvetler nihayet İngiltere'nin liderliğinde ona karşı birleşmekten başka çare bulamadı.

Napolyon önce Elbe adasına sürüldü. Fransa'ya tekrar Monarşi geldi. Fakat Napalyon adadan kaçıp tek başına Fransa'nın üzerine yürüdü. Paris gazeteleri “Canavar kaçtı” diye manşet çektiler. Karşılayıp tevkif etmeye gelen birliği “imparatoruna kim silah atacaksa işte göğsüm” diyerek tek başına teslim alışı ve “Yaşasın Napalyon” diye bağırışı meşhurdu... “Canavar Paris'e doğru yürüyor” diye manşet atan gazeteler birkaç gün sonra “İmparator Napalyon Paris'te” diye manşet çekmek zorunda kaldılar. Yüz günlük bir saltanatı daha oldu. Fakat Avrupa bir defa ona karşı birleşmişti. Derhal harekete geçtiler. Waterloo'da Napalyon yenildi. Bu sefer Saint Helene adasına sürüldü. Hatıraları ve sadık adamı Rüstem ile çok ızdıraplı günlerden sonra öldü. Paris'te “Invalid”de gömülüdür. Son sözü gibi anlaşılmaz kelimedir. Yahut çok manalı bir sayıklama.

Kaynak: DEVLET BAŞKANLARI-Son Sözler, **Tarih:** 15.09.2003 Saat: 23:03, **Konu:** Son Sözler (<http://www.islamisite.com/modules.php?name=News&file=print&sid=663>).

Napoleon Doğrusu ve Napoleon Teoremi'nin Düzgün 6-gene Genişletilmiş (Mathquake, 27.12.2004 03:20): n-boyutlu V vektör uzayında herhangi bir $A_1 A_2 A_3$ üçgeninin kenarları üzerinde verilen $A_2 A_3 B_1, A_3 A_1 B_2, A_1 A_2 B_3$ eşkenar üçgenlerinin ağırlık merkezleri sırasıyla C_1, C_2, C_3 noktaları ve $B_2 B_3 A_1, B_3 B_1 A_2, B_1 B_2 A_3$ üçgenlerinin ağırlık merkezleri de sırasıyla D_1, D_2, D_3 noktaları olsun. O halde $A_1 A_2 A_3, B_1 B_2 B_3, C_1 C_2 C_3$ ve $D_1 D_2 D_3$ üçgenlerin de ağırlık merkezleri sırasıyla G_A, G_B, G_C, G_D ise,



$$(1) \overrightarrow{G_A G_C} = \overrightarrow{G_C G_D} = \overrightarrow{G_D G_B}$$

lineer bağımlı vektörler nedeniyle $G_A, G_B, G_C, G_D \in d_N$ noktaları doğrudastırlar.

Eğer

$$(2) G_A = G_B = G_C = G_D$$

noktaları çakışırlarsa, $A_2 A_3 B_1, A_3 A_1 B_2, A_1 A_2 B_3$ eşkenar üçgenleri $A_1 A_2 A_3$ üçgeninin bulunduğu düzlemde olmak üzere hepsi birden ya içeri doğru katlanmışlardır ya da dışarı doğru katlanmışlardır. Her iki durumda da $C_1 \hat{C}_2 C_3 \cong D_1 \hat{D}_2 D_3$ üçgenleri birbirine eş olan eşkenar üçgenlerdir ve bu eşkenar üçgenlerin köşelerinin ardışık olarak birleşmesiyle oluşan $C_1 D_3 C_2 D_1 C_3 D_2$ kapalı şekli bir düzgün 6-gen olur.

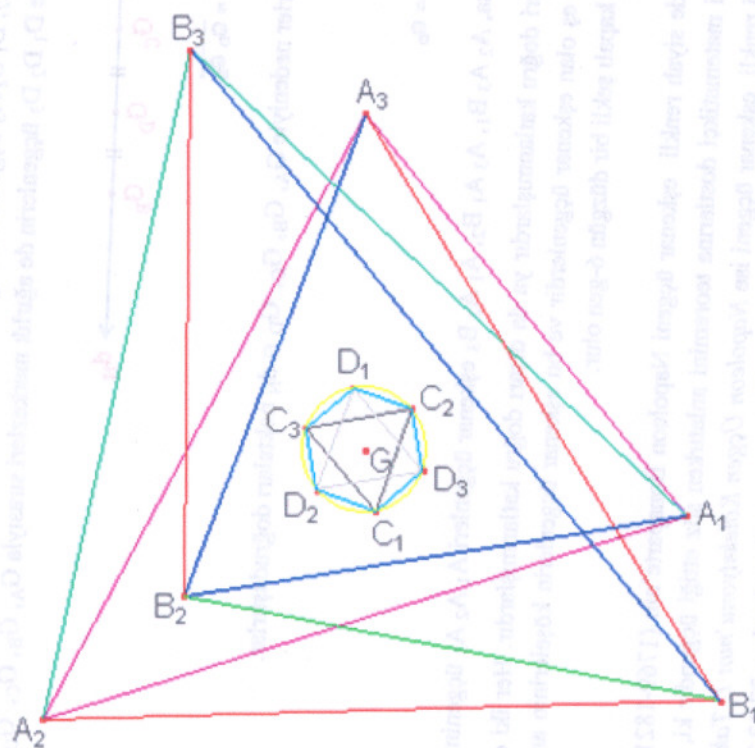
Aşağıdaki şekillerde siyah renkli eşkenar üçgeni Napoleon Bonaparte'nin (1769-1821) Temmuz 1798'de Mısır Seferi'nde yanındaki matematikçi dostlarına teoremini anlatırken söz ettiği üçgendir ki, bu üçgene **Napoleon Üçgeni** de denmektedir ve gri renkli eşkenar üçgeni ise *Napoleon Üçgen Koleksiyonu'nun 1. Takım Üçgenleri*'nde ağırlık merkezleri üzerinde bilgisayarda Cabri Geometry II Plus 2001-2004 programıyla çalışırken 27.12.2004 03:20'de ortaya çıkan üçgendir. Bu 2 üçgeni gördüğümde aklıma ilk olarak Sion Yıldızı gelmişti ki, Sion Yıldızı'nın özelliklerine göre köşeler sırasıyla birleştirildiğinde bir düzgün 6-gen elde edilir. Buna göre **Şekil 1'dekine İç (Sion Yıldızı) Düzgün 6-gen** ve **Şekil 2'dekine ise Dış (Sion Yıldızı) Düzgün 6-gen** denir.

Scup



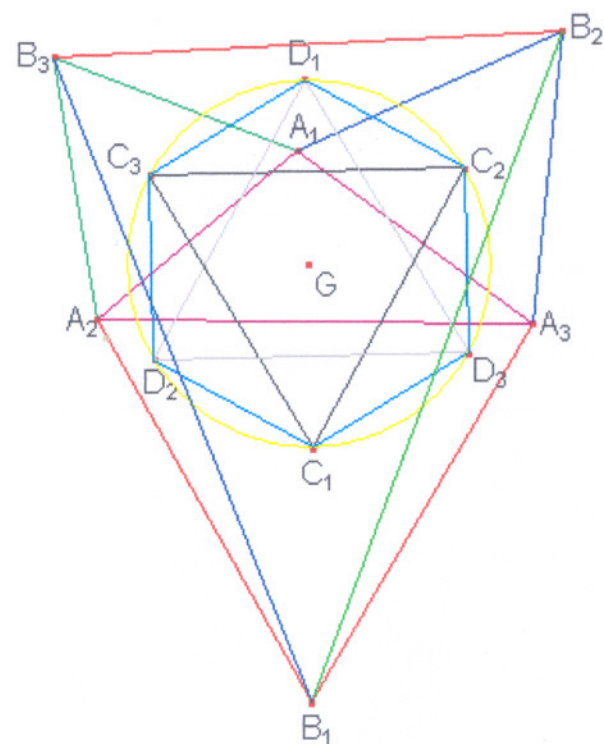
Genelleştirilmiş Napoléon Teoremi'ndeki Sion Yıldızları ve Düzgün 6-genler

İç Sion Yıldızı ve İç Düzgün 6-gen



Şekil 1

Dış Sion Yıldızı ve Dış Düzgün 6-gen



Şekil 2

1 sayfa

İspat: n-boyutlu V vektör uzayında keyfi bir O noktası seçildiğinde, $A_2 A_3 B_1$, $A_3 A_1 B_2$, $A_1 A_2 B_3$ eşkenar üçgenlerinin ağırlık merkezleri sırasıyla C_1 , C_2 , C_3 noktaları olmak üzere,

$$(3) \quad \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OB_1} = 3 \overrightarrow{OC_1}, \quad \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_2} = 3 \overrightarrow{OC_2}, \quad \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OB_3} = 3 \overrightarrow{OC_3}$$

eşitlikleri geçerlidir ve bu eşitliklerde taraf tarafa toplama yapılırsa,

$$6 \overrightarrow{OG_A} + 3 \overrightarrow{OG_B} = 2 (\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}) + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OB_3} = 3 (\overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OC_2} + \overrightarrow{OC_3}) = 9 \overrightarrow{OG_C}$$

eşitliklerinden

$$(4) \quad 2 \overrightarrow{OG_A} + \overrightarrow{OG_B} = 3 \overrightarrow{OG_C}$$

elde edilir.

Benzer şekilde $B_2 B_3 A_1$, $B_3 B_1 A_2$, $B_1 B_2 A_3$ üçgenlerinin ağırlık merkezleri de sırasıyla D_1 , D_2 , D_3 noktaları olmak üzere,

$$(5) \quad \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OB_3} + \overrightarrow{OA_1} = 3 \overrightarrow{OD_1}, \quad \overrightarrow{OB_3} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OA_2} = 3 \overrightarrow{OD_2}, \quad \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OA_3} = 3 \overrightarrow{OD_3}$$

eşitlikleri geçerlidir ve bu eşitliklerde de taraf tarafa toplama yapılırsa,

$$6 \overrightarrow{OG_B} + 3 \overrightarrow{OG_A} = 2 (\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OB_3}) + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} = 3 (\overrightarrow{OD_1} + \overrightarrow{OD_2} + \overrightarrow{OD_3}) = 9 \overrightarrow{OG_D}$$

eşitliklerinden

$$(6) \quad 2 \overrightarrow{OG_B} + \overrightarrow{OG_A} = 3 \overrightarrow{OG_D}$$

elde edilir.

Şu halde (4) ve (6)'da taraf tarafa çıkarma yapılırsa,

$$3 \overrightarrow{G_C G_D} = 3 (\overrightarrow{OG_D} - \overrightarrow{OG_C}) = 3 \overrightarrow{OG_D} - 3 \overrightarrow{OG_C} = 2 \overrightarrow{OG_B} + \overrightarrow{OG_A} - 2 \overrightarrow{OG_A} - \overrightarrow{OG_B} = \overrightarrow{OG_B} - \overrightarrow{OG_A} = \overrightarrow{G_A G_B}$$

nedeniyle

$$(7) \quad \overrightarrow{G_A G_B} = 3 \overrightarrow{G_C G_D}$$

elde edilir.

Öte yandan (4)'den

$$\overrightarrow{G_A G_B} = \overrightarrow{OG_B} - \overrightarrow{OG_A} = 3 \overrightarrow{OG_C} - 2 \overrightarrow{OG_A} - \overrightarrow{OG_A} = 3 (\overrightarrow{OG_C} - \overrightarrow{OG_A}) = 3 \overrightarrow{G_A G_C}$$

nedeniyle

$$(8) \quad \overrightarrow{G_A G_B} = 3 \overrightarrow{G_A G_C}$$

elde edilir.

Benzer şekilde (6)'dan

07592



$$\overrightarrow{G_A G_B} = \overrightarrow{OG_B} - \overrightarrow{OG_A} = \overrightarrow{OG_B} - 3 \overrightarrow{OG_D} + 2 \overrightarrow{OG_B} = 3 (\overrightarrow{OG_B} - \overrightarrow{OG_D}) = 3 \overrightarrow{G_D G_B}$$

nedeniyle

$$(9) \quad \overrightarrow{G_A G_B} = 3 \overrightarrow{G_D G_B}$$

elde edilir.

Şu halde (7), (8) ve (9)'dan (1) özdeşliği bulunur. Buna göre,

$$(10) \quad \overrightarrow{G_A G_C} = \overrightarrow{G_C G_D} = \overrightarrow{G_D G_B}$$

lineer (doğrusal) bağımlı vektörler nedeniyle $G_A, G_B, G_C, G_D \in d_N$ noktaları doğrudan olurlar. Bu doğruya **Napoleon Doğrusu** denir ve bu doğru " d_N " ile gösterilir.

Şimdi (2)'deki koşuldan G_A, G_B, G_C, G_D noktalarının çakışması nedeniyle $A_2 A_3 B_1, A_3 A_1 B_2, A_1 A_2 B_3$ eşkenar üçgenlerinin $A_1 A_2 A_3$ üçgeninin bulunduğu düzlemde olmak üzere hepsinin birden ya içeri doğru ya da dışarı doğru katlanmasıyla oluşan $C_1 \hat{C}_2 C_3$ ve $D_1 \hat{D}_2 D_3$ üçgenlerinin birbirine eş olan eşkenar üçgenler olduklarını gösterebiliriz.

Bunun için (3)'den pozitif (negatif) yönlü $C_1 \hat{C}_2 C_3$ üçgeninin kenarları üzerindeki $\overrightarrow{C_1 C_2}, \overrightarrow{C_2 C_3}$ ve $\overrightarrow{C_3 C_1}$ vektörleri için

$$(11) \quad \overrightarrow{C_1 C_2} = \frac{\overrightarrow{A_2 A_1} + \overrightarrow{B_1 B_2}}{3}, \quad \overrightarrow{C_2 C_3} = \frac{\overrightarrow{A_3 A_2} + \overrightarrow{B_2 B_3}}{3}, \quad \overrightarrow{C_3 C_1} = \frac{\overrightarrow{A_1 A_3} + \overrightarrow{B_3 B_1}}{3}$$

ve (5) ve (11)'den de negatif (pozitif) yönlü $D_1 \hat{D}_2 D_3$ üçgeninin kenarları üzerindeki $\overrightarrow{D_1 D_3}, \overrightarrow{D_3 D_2}$ ve $\overrightarrow{D_2 D_1}$ vektörleri için

$$(12) \quad \overrightarrow{D_2 D_1} = \overrightarrow{C_1 C_2}, \quad \overrightarrow{D_3 D_2} = \overrightarrow{C_2 C_3}, \quad \overrightarrow{D_1 D_3} = \overrightarrow{C_3 C_1}$$

eşitlikleri geçerli olur.

Diğer yandan da (2)'deki koşul nedeniyle

$$(13) \quad \overrightarrow{OG_A} = \overrightarrow{OG_B} = \overrightarrow{OG_C} = \overrightarrow{OG_D}$$

geçerli olduğundan,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG_A} = \overrightarrow{OG_B} &\Rightarrow \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OB_3} \Rightarrow (\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA_2}) + 2 \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} = (\overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OB_2}) + 2 \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OB_3} \\ &\Rightarrow \overrightarrow{A_2 A_1} + 2 \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{B_2 B_1} + 2 \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OB_3} \Rightarrow \overrightarrow{A_2 A_1} + \overrightarrow{B_1 B_2} = 2 (\overrightarrow{OB_2} - \overrightarrow{OA_2}) + \overrightarrow{OB_3} - \overrightarrow{OA_3} = 2 \overrightarrow{A_2 B_2} + \overrightarrow{A_3 B_3} \end{aligned}$$

eşitlikleri geçerli olur ve benzer şekilde aynı işlemler yapılırsa,

$$(14) \quad \overrightarrow{A_2 A_1} + \overrightarrow{B_1 B_2} = 2 \overrightarrow{A_2 B_2} + \overrightarrow{A_3 B_3}, \quad \overrightarrow{A_3 A_2} + \overrightarrow{B_2 B_3} = 2 \overrightarrow{A_3 B_3} + \overrightarrow{A_1 B_1}, \quad \overrightarrow{A_1 A_3} + \overrightarrow{B_3 B_1} = 2 \overrightarrow{A_1 B_1} + \overrightarrow{A_2 B_2}$$

eşitlikleri ortaya çıkar.

Şu halde (11) ve (14)'den $\overrightarrow{C_1 C_2}, \overrightarrow{C_2 C_3}$ ve $\overrightarrow{C_3 C_1}$ vektörleri

$$(15) \quad \overrightarrow{C_1 C_2} = \frac{2 \overrightarrow{A_2 B_2} + \overrightarrow{A_3 B_3}}{3}, \quad \overrightarrow{C_2 C_3} = \frac{2 \overrightarrow{A_3 B_3} + \overrightarrow{A_1 B_1}}{3}, \quad \overrightarrow{C_3 C_1} = \frac{2 \overrightarrow{A_1 B_1} + \overrightarrow{A_2 B_2}}{3}$$

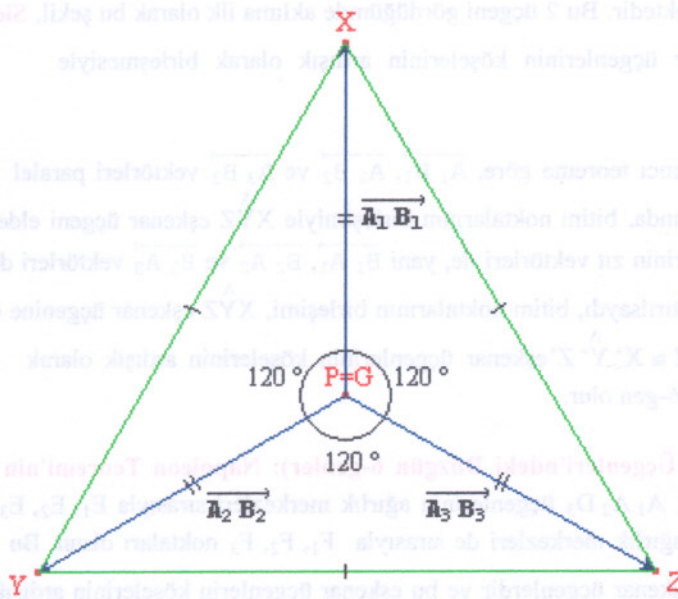
şeklinde yazılabilirler ve bu durumda aşağıdaki teorem geçerli olur:

Yardımcı Teorem: $A_1 B_1, A_2 B_2, A_3 B_3 \in P$ doğruları noktadaştırılar. Buna göre $\overrightarrow{A_1 B_1}, \overrightarrow{A_2 B_2}$ ve $\overrightarrow{A_3 B_3}$ vektörlerinin normları birbirine eşittir:

$$(16) \quad N(\overrightarrow{A_1 B_1}) = N(\overrightarrow{A_2 B_2}) = N(\overrightarrow{A_3 B_3}) \quad (= N(\overrightarrow{PA_1}) + N(\overrightarrow{PA_2}) + N(\overrightarrow{PA_3}))$$

ve $\overrightarrow{A_1 B_1}, \overrightarrow{A_2 B_2}$ ve $\overrightarrow{A_3 B_3}$ vektörleri paralel kaydırılarak başlangıç noktaları P noktasında çakıştırılırsa, aralarındaki açılarının ölçüleri 120° olduğundan, bitim noktalarının birleşimiyle oluşan üçgen bir eşkenar üçgendir (Eğer P noktası $A_1 A_2 A_3$ üçgeninin iç bölgesindeyse, **Fermat-Toricelli Noktası** olarak anılmaktadır).

Şu halde bu teoreme göre, $\overrightarrow{A_1 B_1}, \overrightarrow{A_2 B_2}$ ve $\overrightarrow{A_3 B_3}$ vektörleri paralel kaydırılarak başlangıç noktaları P noktasında çakıştırılırsa,



şeklinde bir $\hat{XYZ}$ eşkenar üçgeni elde edilir. Bu durumda P noktası $\hat{XYZ}$ eşkenar üçgeninin G ağırlık merkezi olup, $\overrightarrow{A_1 B_1}, \overrightarrow{A_2 B_2}$ ve $\overrightarrow{A_3 B_3}$ vektörleri için

$$(17) \quad \overrightarrow{A_1 B_1} + \overrightarrow{A_2 B_2} + \overrightarrow{A_3 B_3} = \vec{0}$$

eşitliği ortaya çıkar.

Sonuçta, (15) ve (17)'den $\hat{C_1 C_2 C_3}$ üçgeninin kenarları üzerindeki $\overrightarrow{C_1 C_2}, \overrightarrow{C_2 C_3}$ ve $\overrightarrow{C_3 C_1}$ vektörleri $\hat{XYZ}$ eşkenar üçgeninin kenarları üzerindeki vektörler cinsinden

$$\begin{aligned} 3 \overrightarrow{C_1 C_2} &= 2 \overrightarrow{A_2 B_2} + \overrightarrow{A_3 B_3} = 2 \overrightarrow{A_2 B_2} - \overrightarrow{A_1 B_1} - \overrightarrow{A_2 B_2} = \overrightarrow{A_2 B_2} - \overrightarrow{A_1 B_1} = \overrightarrow{PY} - \overrightarrow{PX} = \overrightarrow{XY}, \\ 3 \overrightarrow{C_2 C_3} &= 2 \overrightarrow{A_3 B_3} + \overrightarrow{A_1 B_1} = 2 \overrightarrow{A_3 B_3} - \overrightarrow{A_2 B_2} - \overrightarrow{A_3 B_3} = \overrightarrow{A_3 B_3} - \overrightarrow{A_2 B_2} = \overrightarrow{PZ} - \overrightarrow{PY} = \overrightarrow{YZ}, \\ 3 \overrightarrow{C_3 C_1} &= 2 \overrightarrow{A_1 B_1} + \overrightarrow{A_2 B_2} = 2 \overrightarrow{A_1 B_1} - \overrightarrow{A_3 B_3} - \overrightarrow{A_1 B_1} = \overrightarrow{A_1 B_1} - \overrightarrow{A_3 B_3} = \overrightarrow{PX} - \overrightarrow{PZ} = \overrightarrow{ZX} \end{aligned}$$

nedeniyle



$$(18) \quad \overrightarrow{C_1 C_2} = \frac{\overrightarrow{XY}}{3}, \quad \overrightarrow{C_2 C_3} = \frac{\overrightarrow{YZ}}{3}, \quad \overrightarrow{C_3 C_1} = \frac{\overrightarrow{ZX}}{3}$$

olarak bulunurlar.

Şu halde $\triangle XYZ$ eşkenar üçgeninin tüm kenarların uzunlukları aynı olduğundan, $N(\overrightarrow{XY}) = N(\overrightarrow{YZ}) = N(\overrightarrow{ZX})$ eşitlikleri geçerli olur ve (18)'de norm alma işlemi yapılırsa,

$$(19) \quad N(\overrightarrow{C_1 C_2}) = N(\overrightarrow{C_2 C_3}) = N(\overrightarrow{C_3 C_1})$$

eşitlikleri ortaya çıkar ki, bu sonuç, $C_1 \hat{C}_2 C_3$ üçgeninin bir eşkenar üçgen olduğunu gösterir. Ayrıca (12)'deki eş vektörler, (19) nedeniyle $D_1 \hat{D}_2 D_3$ üçgeninin $C_1 \hat{C}_2 C_3$ eşkenar üçgenine eş olan bir eşkenar üçgen olduğunu söylemektedir, hem de eşitliklerde yer alan eş vektörlerin 2'şer 2'şer birbirine paralel olması nedeniyle $C_1 \hat{C}_2 C_3$ ve $D_1 \hat{D}_2 D_3$ eşkenar üçgenlerinin birleşmesiyle bir **Sion Yıldızı**'nın ortaya çıktığını göstermektedir. Bu 2 üçgeni gördüğümde aklıma ilk olarak bu şekil, **Sion Yıldızı** gelmişti! O halde $C_1 \hat{C}_2 C_3 \cong D_1 \hat{D}_2 D_3$ eşkenar üçgenlerinin köşelerinin ardışık olarak birleşmesiyle $C_1 D_3 C_2 D_1 C_3 D_2$ düzgün 6-gen bulunmuş olur.

Sonuç 1 (Yardımcı Teoremdaki Düzgün 6-gen): Yardımcı teoreme göre, $\overrightarrow{A_1 B_1}$, $\overrightarrow{A_2 B_2}$ ve $\overrightarrow{A_3 B_3}$ vektörleri paralel kaydırılarak başlangıç noktaları P noktasında çakıştırıldığında, bitim noktalarının birleşimiyle $\triangle XYZ$ eşkenar üçgeni elde edilmişti. Benzer şekilde, $\overrightarrow{A_1 B_1}$, $\overrightarrow{A_2 B_2}$ ve $\overrightarrow{A_3 B_3}$ vektörlerinin zıt vektörleri de, yani $\overrightarrow{B_1 A_1}$, $\overrightarrow{B_2 A_2}$ ve $\overrightarrow{B_3 A_3}$ vektörleri de paralel kaydırılarak başlangıç noktaları P noktasında çakıştırılırdı, bitim noktalarının birleşimi, $\triangle XYZ$ eşkenar üçgenine eş olan yine bir $X^* \hat{Y}^* Z^*$ eşkenar üçgenini verirdi ve $\triangle XYZ \cong X^* \hat{Y}^* Z^*$ eşkenar üçgenlerinin köşelerinin ardışık olarak birleşmesiyle oluşan $XZ^* YX^* ZY^*$ kapalı şekli bir düzgün 6-gen olur.

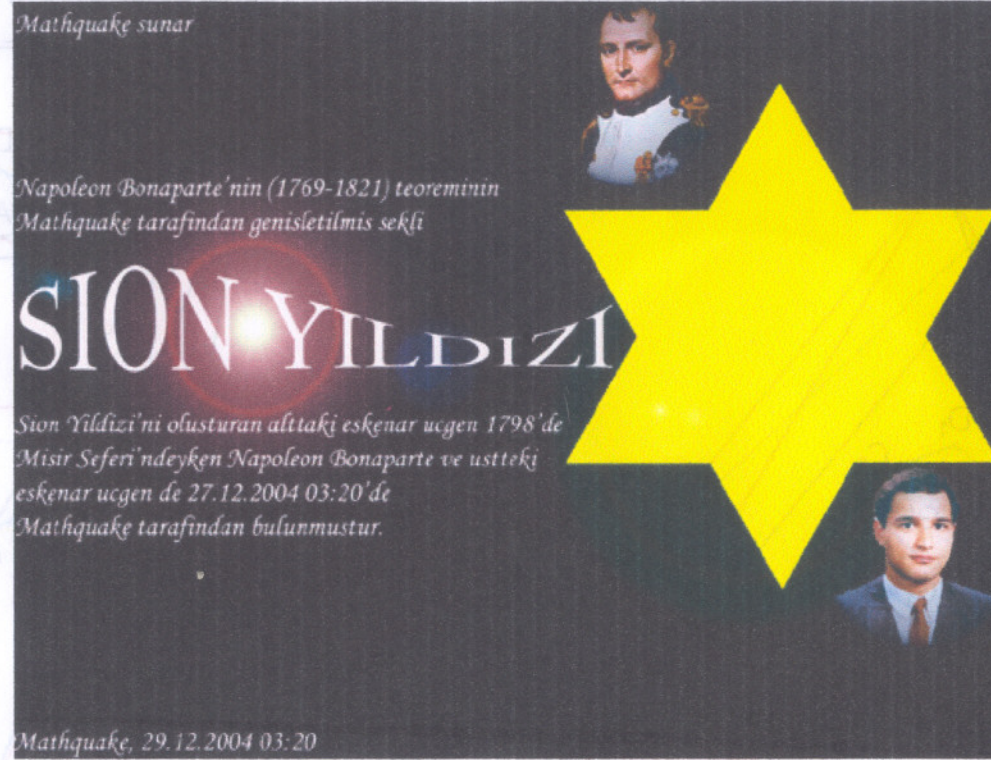
Sonuç 2 (Napoleon Üçgen Koleksiyonu'nun 1. Takım Üçgenleri'ndeki Düzgün 6-genler): Napoleon Teoremi'nin **Düzgün 6-gene Genişletilmiş**'indeki $A_2 A_3 D_1$, $A_3 A_1 D_2$, $A_1 A_2 D_3$ üçgenlerinin ağırlık merkezleri sırasıyla E_1 , E_2 , E_3 noktaları ve $D_2 D_3 A_1$, $D_3 D_1 A_2$, $D_1 D_2 A_3$ üçgenlerinin ağırlık merkezleri de sırasıyla F_1 , F_2 , F_3 noktaları olsun. Bu durumda $E_1 \hat{E}_2 E_3 \cong F_1 \hat{F}_2 F_3$ üçgenleri birbirine eş olan eşkenar üçgenlerdir ve bu eşkenar üçgenlerin köşelerinin ardışık olarak birleşmesiyle oluşan $E_1 F_3 E_2 F_1 E_3 F_2$ kapalı şekli de bir düzgün 6-gen olur ($E_1 \hat{E}_2 E_3$ eşkenar üçgeninin $C_1 \hat{C}_2 C_3$ eşkenar üçgenine ve $F_1 \hat{F}_2 F_3$ eşkenar üçgeninin $D_1 \hat{D}_2 D_3$ eşkenar üçgenine benzerlik oranı $\frac{1}{3}$ 'tür).

Benzer şekilde, $D_2 D_3 C_1$, $D_3 D_1 C_2$, $D_1 D_2 C_3$ üçgenlerinin ağırlık merkezleri sırasıyla G_1 , G_2 , G_3 noktaları ve $C_2 C_3 D_1$, $C_3 C_1 D_2$, $C_1 C_2 D_3$ üçgenlerinin ağırlık merkezleri de sırasıyla H_1 , H_2 , H_3 noktaları olsun. Bu durumda $G_1 \hat{G}_2 G_3 \cong H_1 \hat{H}_2 H_3$ üçgenleri birbirine eş olan eşkenar üçgenlerdir ve bu eşkenar üçgenlerin köşelerinin ardışık olarak birleşmesiyle oluşan $G_1 H_3 G_2 H_1 G_3 H_2$ kapalı şekli bir düzgün 6-gen olur ($G_1 \hat{G}_2 G_3$ eşkenar üçgeninin $C_1 \hat{C}_2 C_3$ eşkenar üçgenine ve $H_1 \hat{H}_2 H_3$ eşkenar üçgeninin $D_1 \hat{D}_2 D_3$ eşkenar üçgenine benzerlik oranı $\frac{2}{3}$ 'tür).

Sonuçta, **Napoleon Üçgen Koleksiyonu**'ndaki üçgenlerin ağırlık merkezleriyle oluşan düzgün 6-genler araştırıldığında, sonsuz tane olduğu görülecektir.



Tüm İnsanlığın Kardeşçe Yaşamaya AME/İN

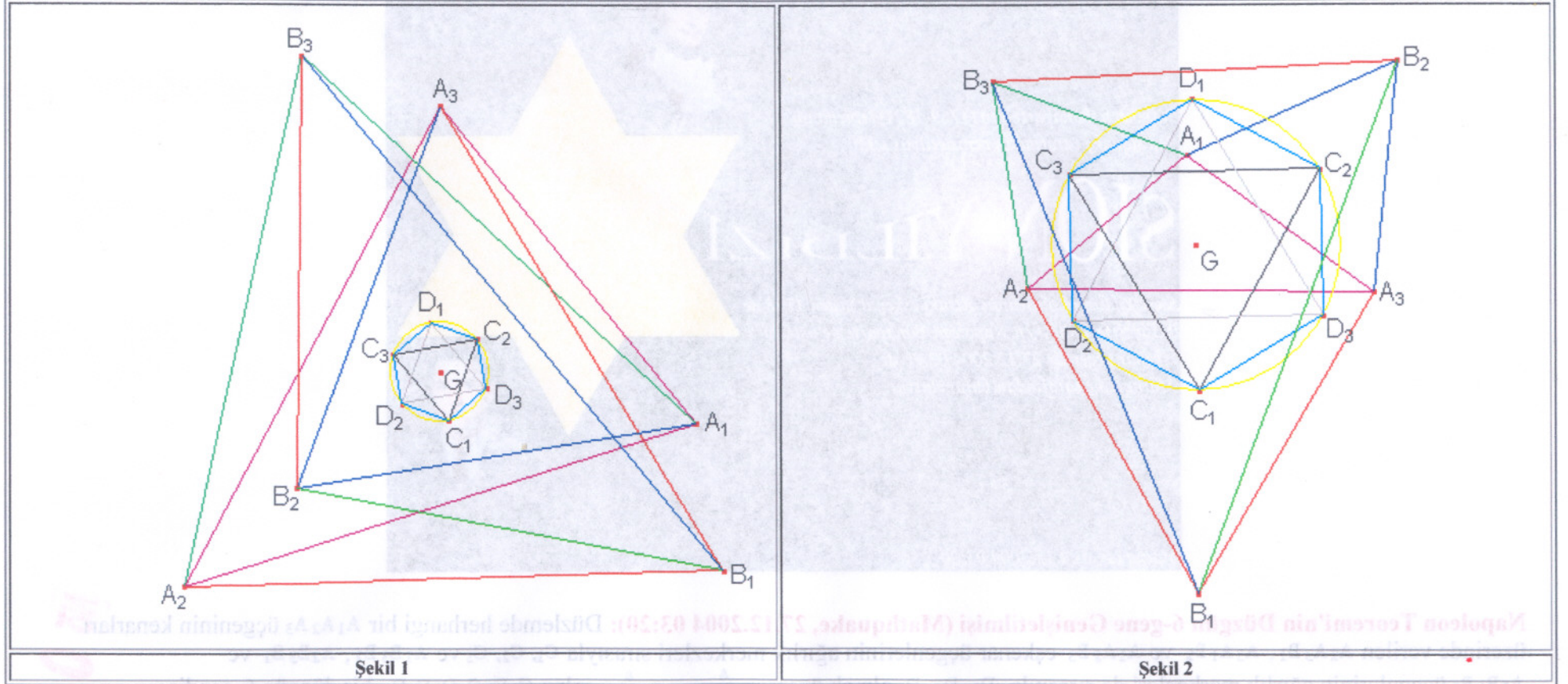


Napoleon Teoremi'nin Düzgün 6-gene Genişletilmiş (Mathquake, 27.12.2004 03:20): Düzlemde herhangi bir $A_1 A_2 A_3$ üçgeninin kenarları üzerinde verilen $A_2 A_3 B_1$, $A_3 A_1 B_2$ ve $A_1 A_2 B_3$ eşkenar üçgenlerinin ağırlık merkezleri sırasıyla C_1 , C_2 , C_3 ve $A_1 B_3 B_2$, $A_2 B_3 B_1$ ve $A_3 B_1 B_2$ üçgenlerinin ağırlık merkezleri de sırasıyla D_1 , D_2 , D_3 olmak üzere $C_1 \hat{C}_2 C_3 \cong D_1 \hat{D}_2 D_3$ olup $C_1 D_3 C_2 D_1 C_3 D_2$ bir düzgün 6-gendir.

Aşağıdaki şekillerde siyah renkli $C_1 C_2 C_3$ eşkenar üçgeni Napoleon Bonaparte'nin (1769-1821) 1798'de Mısır Seferi'ndeyken yanındaki dostlarına teoremini anlatırken söz ettiği üçgendir ki, bu üçgene **Napoleon Üçgeni** de denmektedir, ve gri renkli $D_1 D_2 D_3$ eşkenar üçgeni ise Napoleon Üçgen Koleksiyon'unun 1. Takım Üçgenleri'nde ağırlık merkezleri üzerinde bilgisayarda **Cabri Geometry II Plus 2001-2004** programıyla çalışırken 27.12.2004 03:20'de ortaya çıkan üçgendir. Bu 2 üçgeni gördüğümde aklıma ilk olarak **Sion Yıldızı** gelmişti ki, Sion Yıldızı'nın

özelliklerine göre köşeler sırasıyla birleştirildiğinde bir düzgün 6-gen elde edilir. Burada bir başka ilginç durum daha var; $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$ ve $D_1D_2D_3$ üçgenlerinin ağırlık merkezleri G noktasında çakışmaktadır.

Öte yandan **Şekil 1**'dekine iç (Sion yıldızı) düzgün 6-gen ve **Şekil 2**'dekine ise dış (Sion yıldızı) düzgün 6-gen denilir.



Not: Bu teoreminin ispatını daha sonra vereceğim, ama benim favori ispatım Argand diyagramındaki (kompleks düzlemdeki) ispattır.

Diğer Çalışmalar:

1) Genelleştirilmiş Napoleon Teoremi, Mathquake, 29.11.2004 02:03

2) [Sion Yıldızı](#), Bir Mathquake Yapımı, 29.12.2004 03:20

Özellikleri
Pixel Dimensions: 2,25 M
Width x Height: 1024 pixel x 768 pixel
Docement Size:
Width x Height: 36,12 cm x 27,09 cm
Resolution: 72 pixel/inch
Resample Image: Bicubic

Not: Bu resmi bilgisayarınızda **Duvar Kağıdı** olarak kullanabilirsiniz.

3) [Sion Yıldızı İçin Napoleon Teoremi'ne İlişkin Resimler](#): [DSC00088](#), [DSC00091](#), Mathquake, 15.01.2005 17:36

Created by [Mathematica](#) (December 30, 2004)

Giza Piramitleri'nde Yeni Arastirmalar

CONFIDENTIAL

REVIEWED

By Mathquake at 11:49 pm, 5/2/06

RECEIVED

By Mathquake at 11:49 pm, 5/2/06

APPROVED

By Mathquake at 11:49 pm, 5/2/06

REVISED

11:49 pm, 5/2/06

15 07 59 2

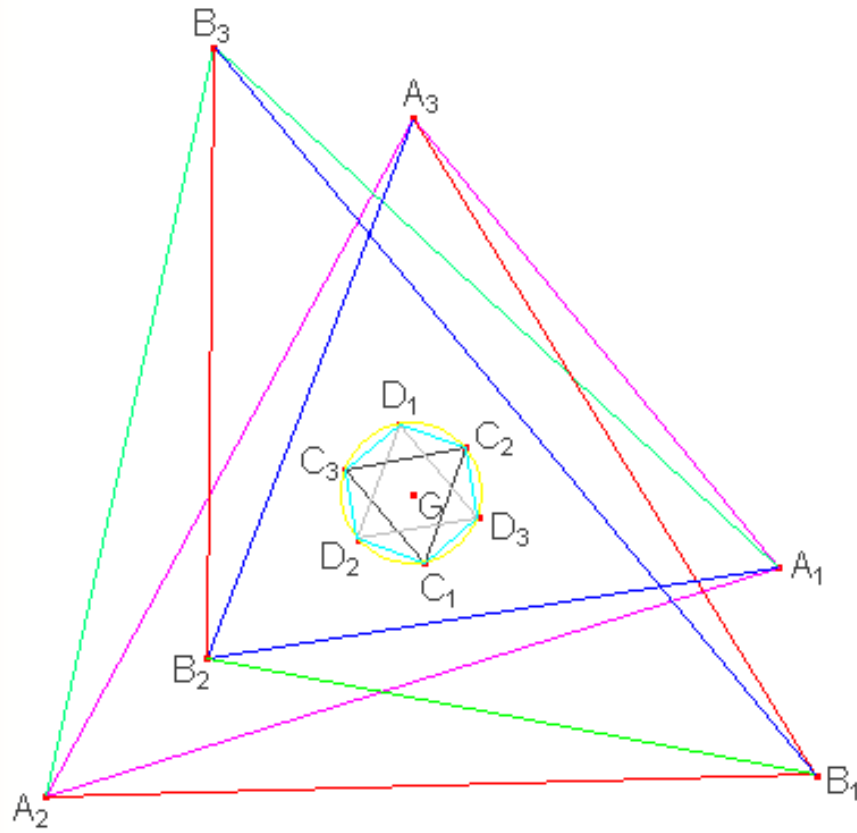
Tüm İnsanlığın Kardeçe Yaamasına AME/N



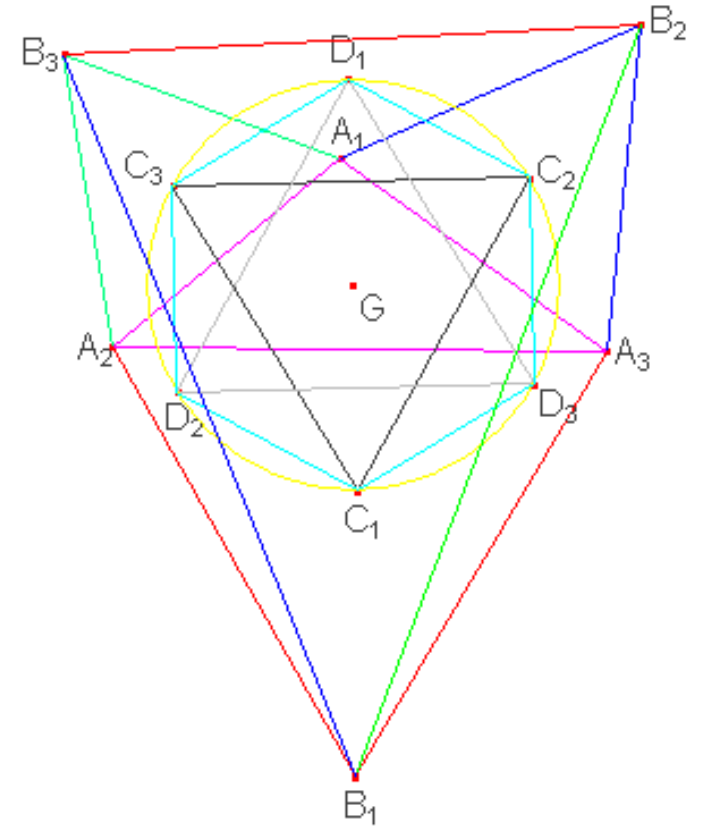
Napoleon Teoremi'nin Düzgün 6-gene Geniletilmi-i (Mathquake, 27.12.2004 03:20): Düzlemde herhangi bir $A_1 A_2 A_3$ üçgeninin kenarları üzerinde verilen $A_2 A_3 B_1$, $A_3 A_1 B_2$ ve $A_1 A_2 B_3$ e-kenar üçgenlerinin a-ırlık merkezleri sırasıyla C_1 , C_2 , C_3 ve $A_1 B_3 B_2$, $A_2 B_3 B_1$ ve $A_3 B_1 B_2$ üçgenlerinin a-ırlık merkezleri de sırasıyla D_1 , D_2 , D_3 olmak üzere $C_1 \overset{\Delta}{C_2} C_3 \cong D_1 \overset{\Delta}{D_2} D_3$ olup $C_1 D_3 C_2 D_1 C_3 D_2$ bir düzgün 6-gendir.

A-a-ıdaki •ekillerde siyah renkli $C_1 C_2 C_3$ e-kenar üçgeni Napoleon Bonaparte'nin (1769-1821) 1798'de Mısır Seferi'ndeyken yanındaki dostlarına teoremini anlatırken söz etti-i üçgendir ki, bu üçgene **Napoleon Üçgeni** de denmektedir, ve gri renkli $D_1 D_2 D_3$ e-kenar üçgeni ise Napoleon Üçgen Koleksiyon'unun 1. Takım Üçgenleri'nde a-ırlık merkezleri üzerinde bilgisayarda **Cabri Geometry II Plus 2001-2004** programıyla çalışırken 27.12.2004 03:20'de ortaya çıkan üçgendir. Bu 2 üçgeni gördü-ümde aklıma ilk olarak **Sion Yıldızı** gelmi-ti ki, Sion Yıldızı'nın özelliklerine göre kö•eler sırasıyla birle-tirildi-inde bir düzgün 6-gen elde edilir. Burada bir ba•ka ilginç durum daha var; $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$, $C_1 C_2 C_3$ ve $D_1 D_2 D_3$ üçgenlerinin a-ırlık merkezleri G noktasında çaklı-maktadır.

Öte yandan •ekil 1'dekine iç (Sion yıldızı) düzgün 6-gen ve •ekil 2'dekine ise dı• (Sion yıldızı) düzgün 6-gen denilir.



•ekil 1



•ekil 2

Not: Bu teoreminin ispatını daha sonra verece•im, ama benim favori ispatım Argand diyagramındaki (kompleks düzlemdeki) ispattır.

Di•er Çalışmalar:

- 1) [Genelle•tirilmi• Napoleon Teoremi](#), Mathquake, 29.11.2004 02:03
- 2) [Sion Yıldızı](#), Bir Mathquake Yapımı, 29.12.2004 03:20

Pixel Dimensions: 2,25 M
Width x Height: 1024 pixel x 768 pixel
Docement Size:
Width x Height: 36,12 cm x 27,09 cm
Resolution: 72 pixel/inch
Resample Image: Bicubic

Not: Bu resmi bilgisayarınızda **Duvar Kağıdı** olarak kullanabilirsiniz.

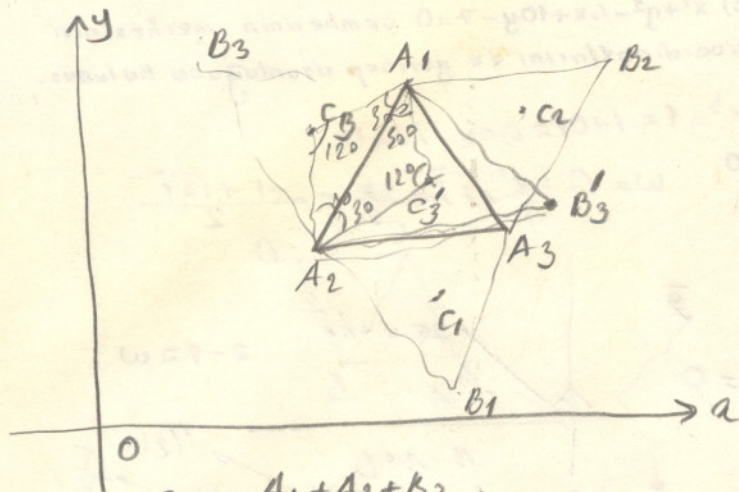
3) **Sion Yıldızı •çin Napoleon Teoremi'ne •li•kin Resimler:** [DSC00088](#), [DSC00091](#), Mathquake, 15.01.2005 17:36

Created by [Mathematica](#) (December 30, 2004)



Digitally signed by Mathquake
DN: CN = Mathquake, C = US, O
= Giza Piramitleri'nde Yeni
Arastirmalar, OU = Giza
Piramitleri
Reason: I am the author of this
document
Location: ISTANBUL
Date: 2006.05.03 23:55:50 +03'00'

5) $P(1, -4)$ noktasından $x^2 + y^2 - 5x + 4y + 8 = 0$ çemberine çizilen teğet parçasının uzunluğu kaç birimdir?



$$C_3 = \frac{A_1 + A_2 + B_3}{3}$$

$$C_3' = A_1 + A_2 - \frac{A_1 + A_2 + B_3}{3}$$

$$C_3' = \frac{2A_1 + 2A_2 - B_3}{3}$$

$$C_3' = \frac{A_1 + A_2 + B_3'}{3}$$

6) $(x+6)^2 + (y+3)^2 = 4$ ve $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ çemberleri arasındaki en kısa uzaklık kaç birimdir?

$$B_3' = A_1 + A_2 - B_3, C_3' = A_1 + A_2 - C_3$$

$$G_1 = \frac{A_1 + A_2 + A_3}{3}$$

$$G_2 = \frac{B_1 + B_2 + B_3}{3}$$

$$G_3 = \frac{C_1 + C_2 + C_3}{3}$$

$$\textcircled{1} \vec{G_2 G_3} = 2 \vec{G_3 G_1}$$

$$G_3 - G_2 = 2G_1 - 2G_3$$

$$(*) 3G_3 = 2G_1 + G_2$$

$$G_3 = \frac{2}{3}G_1 + \frac{1}{3}G_2$$

7) $A(2, -1)$ ve $B(-3, 4)$ noktalarına uzaklıklarının kareleri farkı 4 olan noktaların geometrik yerini bulunuz.

$$3. \frac{C_1 + C_2 + \frac{2A_1 + 2A_2 - B_3}{3}}{3} = 2. \frac{A_1 + A_2 + A_3}{3} + \frac{B_1 + B_2 + A_1 + A_2 - B_3}{3}$$

$$2A_1 + 2A_2 - B_3 + 3C_1 + 3C_2 = 2A_1 + 2A_2 + 2A_3 + B_1 + B_2 + A_1 + A_2 - B_3$$

$$3C_1 + 3C_2 = A_1 + A_2 + 2A_3 + B_1 + B_2$$

$$3A_1 + 3A_2 + 3A_3 = 2B_1 + 2B_2 + B_3 + A_3$$

$$2(A_1 + A_2) - B_3 + 3(C_1 + C_2) = 3(A_1 + A_2) + 2A_3 + B_1 + B_2 - B_3$$

$$-3C_3$$

$$3A_1 + 3A_2 + 3A_3 - 3C_3$$

$$2A_1 + 2A_2 - 3C_3 = B_1 + B_2$$

$$2B_1 + 2B_2 + 2B_3 - A_3 - 3C_3$$

$$B_1 + B_2 + 2B_3 = A_3 + 3C_3$$

$$3(C_1 + C_2) + 2(A_1 + A_2) - B_3 = 3(A_1 + A_2) + 2A_3 + B_1 + B_2 - B_3$$

$$3(C_1 + C_2) = A_1 + A_2 + 2A_3 + B_1 + B_2$$

$$3(A_1 + A_2 + A_3) - 3C_3$$

8) $A(-5, 4)$ ve $B(-3, -2)$ noktaları için

$[AC] \perp [BC]$ koşuluna uyan C noktalarının geometrik yerini bulunuz.

$$\frac{A_1 + A_2 + A_3}{3} + \frac{B_1 + B_2 + A_1 + A_2 - B_3}{3}$$

$$= A_1 + A_2 + \frac{B_1 + B_2 - B_3 + 2A_3}{3}$$

$$= A_1 + A_2 + \frac{B_1 + B_2 - B_3 + 2A_3}{3} \rightarrow A_1 + A_2 + A_3 - B_3$$

$$= A_1 + A_2 + A_3 + \frac{B_1 + B_2 - B_3 - A_3}{3}$$

$$= B_1 + B_2 + B_3 -$$

$$= C_3 = \frac{A_1 + A_2 + B_3}{3} //$$

5) $A(1, x-2), B(-4, 3)$ ve $\|\vec{AB}\| = 13$ br ise $x = ?$

Napoleon Üçgeni Kalkışımı:

$i, j, k = 1, 2, 3, i \neq j \neq k$

1. Takım Üçgenleri: $i < j$ veya $j < k$ için

1) $A_i A_j A_k \Rightarrow A_1 A_2 A_3$

2) $A_i A_j B_k \rightarrow C_k$; $A_1 A_2 B_3 \rightarrow C_3, A_1 A_3 B_2 \rightarrow C_2, A_2 A_3 B_1 \rightarrow C_1$

3) $A_i B_j B_k \rightarrow D_i$; $A_1 B_2 B_3 \rightarrow D_1, (A_1 B_3 B_2) \rightarrow D_2, A_2 B_1 B_3 \rightarrow D_2, A_3 B_1 B_2 \rightarrow D_3$

4) $B_i B_j B_k \rightarrow B_1 B_2 B_3$

$\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 2^3$

2. Takım Üçgenleri:

1) $A_i A_j C_k \rightarrow E_k$

5) $A_i A_j D_k \rightarrow K_k$

2) $A_i C_j C_k \rightarrow F_i$

6) $A_i D_j D_k \rightarrow L_i$

3) $B_i B_j C_k \rightarrow G_k$

7) $B_i B_j D_k \rightarrow M_k$

8) $B_i D_j D_k \rightarrow N_i$

4) $B_i C_j C_k \rightarrow H_i$

7) $\vec{A} = (-2, 4), \vec{B} = (3, -2), \vec{C} = (x, y), \vec{D} = (-3, 1)$

vektörleri için $\vec{AC} = \vec{BD}$ ise

a) C noktasının koordinatlarını bulunuz.

b) $\|\vec{AC} + \vec{BD}\| = ?$

13) $B_i C_j D_k \rightarrow$

14) $A_i B_j C_k$

15) $A_i B_j D_k$

16) $A_i C_j D_k$

A, B, C, D

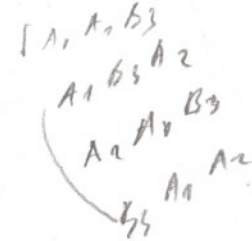
ABC, ABD, ACD,

BCD,

A	B	C	D
2	0	1	0
1	0	2	0
2	0	0	1
1	0	0	2
0	2	1	0
0	1	2	0
0	2	0	1
0	1	0	2

6) $\vec{a} = (2, -1), \vec{b} = (3, -2), \vec{c} = (5, 4)$ vektörleri için:

a) $3\vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c} = ?$ b) $\|4\vec{a} - 2\vec{b}\| = ?$



$A_i A_j A_k$
4576.
6, 48 = 2^3 \cdot 8

9) $C_i C_j D_k \rightarrow P_k$

11) $C_i C_j C_k \rightarrow C_1 C_2 C_3$

10) $C_j D_j D_k \rightarrow Q_i$

12) $D_i D_j D_k \rightarrow D_1 D_2 D_3$

$103! + 2 = 32 \Rightarrow 2^5 - 2 = 30$

8) $A(2, 2), B(3, 5)$ noktaları için $\frac{\vec{DA}}{\vec{DB}} = \frac{5}{4}$ oranında distan bölen D noktasının koordinatlarını bulunuz.

$20 - 2 = 18 \Rightarrow \frac{18}{3!} = 6 \Rightarrow 6 + 1 = 7$

$\binom{12}{3} = 220. 220 - 4 = 216$

$\frac{216}{3! \cdot 2!} = 72 \cdot 36$

$36 - 4 = 32 \cdot C(6, 3) =$

$\binom{14}{3} = [($

$10 \cdot 15 \cdot 120 \cdot 710$

$0 \ 0 \ 2 \ 1$

$3 \cdot 14 + 2 = 44$

$0 \ 0 \ 1 \ 2$

$0 \ 0 \ 3 \ 0$

$0 \ 0 \ 0 \ 3$

$1 \ 1 \ 1 \ 0$

$1 \ 1 \ 0 \ 1$

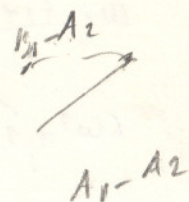
$1 \ 0 \ 1 \ 1$

$0 \ 1 \ 1 \ 1$

$\binom{4}{3} = 4$

$$① \begin{cases} \vec{OC}_1 = \frac{\vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \vec{OA}_3}{3} \quad |w^2| \\ \vec{OC}_2 = \frac{\vec{OA}_1 + \vec{OA}_3 + \vec{OB}_2}{3} \quad |w| \\ \vec{OC}_3 = \frac{\vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \vec{OB}_3}{3} \quad |1| \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{OA}_1 + w\vec{OA}_2 + w^2\vec{OB}_3 = \vec{0} \\ \vec{OA}_2 + w\vec{OA}_3 + w^2\vec{OB}_1 = \vec{0} \\ \vec{OA}_3 + w\vec{OA}_1 + w^2\vec{OB}_2 = \vec{0} \end{cases}$$



$$③ \begin{cases} \vec{OD}_1 = \frac{\vec{OA}_1 + \vec{OB}_2 + \vec{OB}_3}{3} \\ \vec{OD}_2 = \frac{\vec{OA}_2 + \vec{OB}_1 + \vec{OB}_3}{3} \\ \vec{OD}_3 = \frac{\vec{OA}_3 + \vec{OB}_1 + \vec{OB}_2}{3} \end{cases}$$

$$③ \begin{cases} \vec{OC}_3 + w\vec{OC}_2 + w^2\vec{OC}_1 = \vec{0} \\ \vec{OC}_1 + w^2\vec{OC}_2 + w\vec{OC}_3 = \vec{0} \end{cases}$$

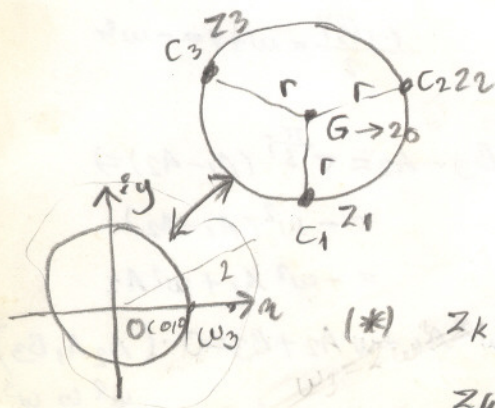
$$\vec{OC}_3 + w\vec{OC}_2 + w^2\vec{OC}_1 = \frac{1}{3} \left((w+1)\vec{OA}_1 + (w^2+1)\vec{OA}_2 + (w^2+w)\vec{OA}_3 + w^2\vec{OB}_1 + w\vec{OB}_2 + \vec{OB}_3 \right) = -\frac{1}{3} [w^2(\vec{OA}_1 - \vec{OB}_1) + w(\vec{OA}_2 - \vec{OB}_2) + \vec{OA}_3 - \vec{OB}_3]$$

$$w^3 = 1 \Rightarrow \cos 2\pi + i \sin 2\pi \Rightarrow w = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = e^{\frac{2\pi}{3}i}$$

$$w_k = w^k = e^{\frac{2k\pi}{3}i}$$

$$\begin{aligned} (A_1 - A_2)e^{\frac{\pi}{3}i} &= B_1 - A_2 \\ B_1 &= A_2 + e^{\frac{\pi}{3}i}(A_1 - A_2) \end{aligned}$$

$$(*) \quad w^n = 1 = e^{2\pi i} \Rightarrow w = e^{\frac{2\pi}{n}i} \Rightarrow w_k = w^k = e^{\frac{2k\pi}{n}i} \quad (k=1, 2, \dots, n)$$



$$|GC_k| = r$$

$$\begin{aligned} \vec{OC}_j &= \alpha_j + \beta_j i \quad (j=1, 2, 3) \\ \alpha_j^2 + \beta_j^2 &= r^2 \end{aligned}$$

$$u_1, u_2, u_3 \\ 2w, 2w^2, 2w^3$$

$$|w| = 1, |u| = 2$$

$$u_1 = 2w \Rightarrow |u| = \sqrt{4a^2 + 4b^2} = 2|w| = 2$$

$$(*) \quad z_k - z_0 = r w_k \quad (k=1, 2, 3)$$

$$z_k = z_0 + r w_k = z_0 + r w_k$$

$$\begin{aligned} z_0 &= -3.01 - 9.14i \\ w^2 + w + 1 &= 0 \\ w^3 &= 1 = -w - w^2 \end{aligned}$$

$$w^6 = 1 \Rightarrow w^6 - 1 = 0 \Rightarrow (w^3 - 1)(w^3 + 1) = 0 \Rightarrow w^3 = \pm 1 \Rightarrow w^3 = 1$$

$$B_1 = A_2 + w A_1 - w A_2$$

$$w^3 = -1 \Rightarrow (-w)^3 = 1 \Rightarrow w^3 = 1$$

$$\alpha^6 = 1 \Rightarrow \alpha^6 - 1 = 0 \Rightarrow (\alpha^3 - 1)(\alpha^3 + 1) = 0 \Rightarrow \alpha^3 - 1 = 0 \Rightarrow \alpha^3 = 1$$

$$\alpha^3 + 1 = 0; \beta = -\alpha \Rightarrow \beta^3 = 1$$

$$B_1 - A_2 = -w(A_1 - A_2) = -w A_1 + w A_2 \Rightarrow w A_1 + w^2 A_2 + B_1 = 0$$

$$A_1 - A_3 = -w(B_2 - A_3) = -w B_2 + w A_3 \Rightarrow A_1 + w B_2 + w^2 A_3 = 0$$

$$B_1 - A_2 = -w(A_3 - A_2) = -w A_3 + w A_2 \Rightarrow B_1 + w A_3 + w^2 A_2 = 0$$

$$\begin{aligned} \omega / \quad \omega A_1 + \omega^2 A_2 + \omega^3 B_3 &= 0 \quad \cdot / \quad \omega C_1 + \omega^2 C_2 + \omega^3 C_3 = 0 \\ \omega^2 / \quad \omega A_3 + \omega^2 A_2 + \omega^3 B_1 &= 0 \quad \cdot / \quad \omega C_1 + \omega^2 C_2 + \omega^3 C_3 = 0 \\ 1 / \quad \omega B_2 + \omega^2 A_3 + \omega^3 A_1 &= 0 \quad \cdot / \end{aligned}$$

$$\omega \cdot \frac{A_1 + A_3 + B_1}{3} + \omega^2 \cdot \frac{A_1 + A_3 + B_2}{3} + \frac{A_1 + A_2 + B_3}{3} = 0 \Rightarrow$$

$$(\omega^2 + 1)A_1 + (\omega + 1)A_2 + \omega(\omega + 1)A_3 + \omega B_1 + \omega^2 B_2 + B_3 = 0$$

$$\omega A_1 + \omega^2 A_2 + A_3 = \omega B_1 + \omega^2 B_2 + B_3$$

$$P + \omega Q + \omega^2 R = C_3 + \omega C_2 + \omega^2 C_1$$

$$\omega A_2 + \omega^2 A_1 + \omega^3 B_3 = 0$$

$$(-) B_3 B_1 A_2$$

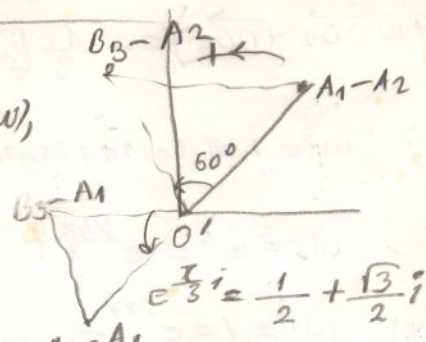
$$(+) B_3 B_2 A_1$$

$$(-) B_1 B_2 A_3$$

$$X = (X_1, X_2, X_3), \quad W_1 = (1, \omega, \omega^2), \quad W_2 = (\omega^2, 1, \omega)$$

$$W_3 = (\omega, \omega^2, 1)$$

$$X \cdot W_1 = 0, \quad X \cdot W_2 = 0, \quad X \cdot W_3 = 0$$



$$\begin{aligned} B_3 - A_2 &= \frac{\pi}{3} (A_1 - A_2) \\ &= -\omega^2 (A_1 - A_2) \\ &= -\omega^2 A_1 + \omega^2 A_2 \end{aligned}$$

$$\omega^2 A_1 + \omega^2 A_2 + B_3 = 0 \quad (A_2 A_1 B_3)$$

$$A_1 - A_2 = -\omega^2 (B_3 - A_2)$$

$$\omega A_1 + A_2 + \omega^2 B_3 = 0 \quad (A_1 B_3 A_2)$$

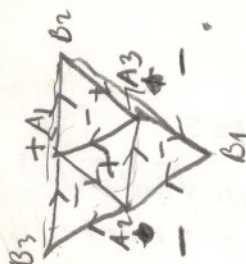
$$B_3 - A_2 = \frac{\pi}{3} (A_1 - A_2)$$

$$= -\omega (A_1 - A_2)$$

$$\omega A_1 + \omega^2 A_2 + B_3 = 0 \quad (A_2 B_3 A_1)$$

$$\omega A_1 + \omega^2 A_2 + B_3 = 0$$

$$A_1 A_2 B_3$$



$$\begin{aligned} A_3 B_2 B_1 &\rightarrow B_1 \\ A_2 B_1 B_3 &\rightarrow B_1 \\ A_1 B_2 B_3 &\rightarrow B_1 \end{aligned}$$

$$(-) B_1 B_2 A_3$$

$$(+) B_2 B_1 A_3$$

$$(-) B_1 B_3 A_2$$

$$(+) B_2 B_3 A_1$$

$$(-) B_3 B_1 A_2$$

$$(+) B_1 B_2 A_3$$

$$(-) B_2 B_3 A_1$$

$$(+) B_3 B_1 A_2$$

$$(-) B_1 B_2 A_3$$

$$(+) B_2 B_3 A_1$$

$$(-) B_3 B_1 A_2$$

$$(+) B_1 B_2 A_3$$

$$(-) B_2 B_3 A_1$$

$$(+) B_3 B_1 A_2$$

$$(-) B_1 B_2 A_3$$

$$(+) B_2 B_3 A_1$$

$$(-) B_3 B_1 A_2$$

$$(+) B_1 B_2 A_3$$

$$(-) B_2 B_3 A_1$$

$$(+) B_3 B_1 A_2$$

$$(-) B_1 B_2 A_3$$

$$(+) B_2 B_3 A_1$$

$$(-) B_3 B_1 A_2$$

$$(+) B_1 B_2 A_3$$

$$2\omega A_1 + 2\omega^2 A_2 + 2\omega^3 A_3 + \omega B_1 + \omega^2 B_2 + \omega^3 B_3 = 0$$

$A_1 A_2 B_3 \textcircled{4}$

~~6140, 6141, 6153, 6147, 6134,~~ 6143, 6145, 6146,

~~61-40, 41,~~

6140-6159 { $F_{11}, \dots, F_{143}$ }

$$6140: F_{82} + \omega F_{83} + \omega^2 F_{133} = 0$$

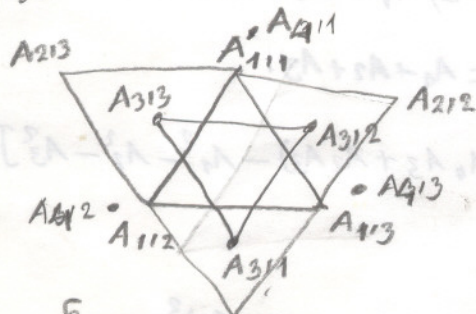
$$F_1' = \frac{F_2 + F_3}{2} = \frac{C_2 + C_3 + D_1 + D_2 + D_3}{2}$$

$$F_{ij} + F_{g1} \omega + F_{133} \omega^2 = 0 \quad (i=1,2,\dots,7, j=1,2,3)$$

$$MM(i,j) \neq 11, \max \varepsilon(i,j) = 71$$

$$F_{82} + F_{83} \omega + F_{133} \omega^2 = 0$$

$$F_{13}, F_{31}, F_{22} \Rightarrow F_{13} + \omega F_{31} + \omega^2 F_{22} = 0$$



$$\frac{6}{25-464} = A_{211}$$

$$5 = 53 - 51 = \frac{9}{4} 54 - \frac{1}{4} 52$$

$$\frac{53}{54} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$S_1' = \left(\frac{1}{3}\right)^2 S_2$$

$$X_1 + wX_2 + w^2X_3 = 0$$

$$52 = 9 + 9 =$$

$$F_1 = \frac{1 + y_3 + x_2}{3} \quad F_k + F_k = \frac{x_1 + y_1 + x_3 + y_1 + y_3}{3}$$

$$\frac{3}{x^2 + 3x + 1} = 4$$

$$f_1 = \frac{1}{1 + \sqrt{3} + \sqrt{2}}$$

$$F_3 = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{3}$$

$$F_1 = \frac{x_2 + x_3 + x_1}{3}$$

$$E_2 = \frac{X_1 + X_3 + Y_2}{3}$$

$$F_3 = \frac{Y_1 + Y_2 + Y_3}{3}$$

$$\Delta - \text{1. Diagonal}$$

$$(-) A_2 A_3 B_1 \rightarrow C_1$$

$$(-) A_3 A_1 B_2 \rightarrow C_2$$

$$(-) A_1 A_2 B_3 \rightarrow C_3$$

$$\Delta - \text{2. Diagonal}$$

$$(+) B_2 B_3 A_1 \rightarrow D_1$$

$$(-) B_3 B_1 A_2 \rightarrow D_2$$

$$(-) B_1 B_2 A_3 \rightarrow D_3$$

$$2_1 \ 2_2 \ 2_3 \ 2_4 \ 2_5 \ 2_6$$

$$D_2 C_1 D_3 C_2 D_1 C_3 \Rightarrow \textcircled{1} 2_1 D_2 + 2_2 C_1 + 2_3 D_3 + 2_4 C_2 + 2_5 D_1 + 2_6 C_3 = 0$$

$$C^3 = 1, d^3 = 1 \ (d = -c) \ \text{ve} \ z^6 = 1 \Rightarrow z_1 = d_2, z_2 = C_1, z_3 = d_3, z_4 = C_2, z_5 = d_1, z_6 = C_3$$

$$\textcircled{2} C_1 C_1 + C_2 C_2 + C_3 C_3 = 0, d_1 D_1 + d_2 D_2 + d_3 D_3 = 0.$$

$A_1 B_3 A_2 B'_3, A_3 B_2 A_1 B'_2$ ve $A_2 B_1 A_3 B'_1$ paralel kenarlarından

$$A_1 + A_2 = B_3 + B'_3, A_3 + A_1 = B_2 + B'_2, A_1 + A_3 = B_1 + B'_1$$

olup

$$\textcircled{3} B'_1 = A_2 + A_3 - B_1, B'_2 = A_1 + A_3 - B_2, B'_3 = A_1 + A_2 - B_3.$$

$$C'_1 = A_2 + A_3 - C_1, C'_2 = A_1 + A_3 - C_2, C'_3 = A_1 + A_2 - C_3.$$

$$(C'_1 = \frac{A_2 + A_3 + B_1}{3} = \frac{2(A_2 + A_3) - B_1}{3} =$$

$$C_1 = \frac{A_2 + A_3 + B_1}{3}$$

$$C_1 + C'_1 = \frac{2(A_2 + A_3) + B_1 + B'_1}{3} = A_2 + A_3,$$

$$D_1 = \frac{A_1 + B_2 + B_3}{3}, D'_1 = \frac{A_1 + B'_2 + B'_3}{3} \Rightarrow D_1 + D'_1 = \frac{2A_1 + B_2 + B'_2 + B_3 + B'_3}{3}$$

$$= \frac{4A_1 + A_2 + A_3}{3} \equiv \frac{3A_1 + A_2 + A_3 - B_2 - B_3}{3}$$

Theorem: $x_1 x_2 x_3$ ve $y_1 y_2 y_3$ her ikisi de jeneratör olduğundan

$$C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 = 0, d_1 y_1 + d_2 y_2 + d_3 y_3 = 0$$

ve

$$2_1 y_2 + 2_2 x_1 + 2_3 y_3 + 2_4 x_2 + 2_5 y_1 + 2_6 x_3 = 0$$

olur.

$$x_1 = \frac{k_1 A_1 + k_2 A_2 + k_3 A_3 + m_1 B_1 + m_2 B_2 + m_3 B_3}{3}$$

$$j(C_1 + jC_2 + j^2C_3)(C_3 + jx_1 + j^2x_2)$$

$$j^2C_1 + j^2C_2 + j^2C_3 = j^2x_1 + x_2 + jx_3$$

$$(j, j^2, j^3)$$

$$C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_3 C_1$$

$$C \quad C^2 \quad C^3$$

$$(1 + C C_1 + C^2 C_2 + C^3 C_3 = 0$$

$$C_1 D_3 C_2 D_1 C_3 D_2: C_1 + \omega D_3 + \omega^2 C_2 + \omega^3 D_1 + \omega^4 C_3 + \omega^5 D_2 = 0$$

$$\omega \omega^2 \omega^3 \omega^4 \omega^5 \omega^6$$

$$z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 z_6$$

$$\omega^6 = 1 \Rightarrow \omega^6 = \omega^4 = e^{\frac{2\pi k i}{6}} = e^{\frac{4\pi i}{3}}$$

$$D_1 z_1 = z_1^2 = e^{\frac{\pi i}{3}} = -\omega^2$$

$$C_1 z_2 = e^{\frac{4\pi i}{6}} = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \omega$$

$$D_3 z_3 = e^{\pi i} = -1 = -\omega^3$$

$$C_2 z_4 = e^{\frac{8\pi i}{6}} = e^{\frac{4\pi i}{3}} = \omega^2$$

$$D_2 z_5 = e^{\frac{10\pi i}{6}} = e^{\frac{5\pi i}{3}} = -\omega$$

$$C_3 z_6 = e^{2\pi i} = 1 = \omega^3$$

$$\omega^3 = 1, p^3 = 1 (p = -\omega)$$

$$\omega_k = e^{\frac{2\pi k i}{3}}, p_k = -\omega_k = e^{\frac{2\pi k i}{3}}$$

$$\omega_1 = \omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$$

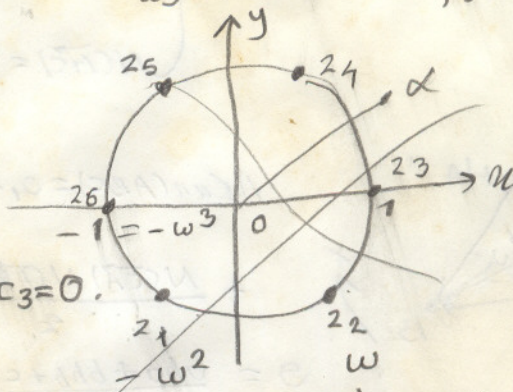
$$\omega_2 = \omega^2 = e^{\frac{4\pi i}{3}}$$

$$\omega_3 = \omega^3 = 1$$

$$p_1 = -\omega = -\omega_1$$

$$p_2 = -\omega^2 = -\omega_2$$

$$p_3 = -1 = -\omega_3$$



$$\sqrt{a^2 + b^2} = d(c, q)$$

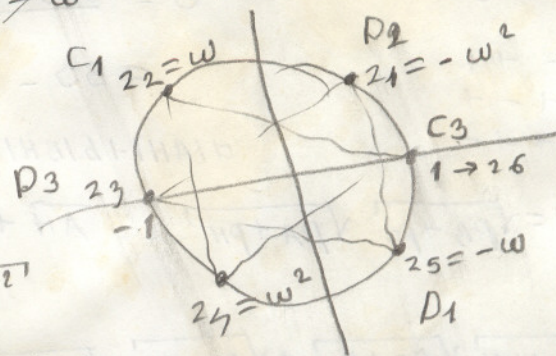
$$z_1 D_1 + z_2 C_1 + z_3 D_3 + z_4 C_2 + z_5 D_2 + z_6 C_3 = 0$$

$$e^{\frac{\pi i}{3}} = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} = \omega + 1 = -\omega^2$$

$$z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 z_6: C_1 D_3 C_2 D_1 C_3 D_2:$$

$$z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 z_6: D_2 C_1 D_3 C_2 D_1 C_3$$

$$\alpha = a + bi, \beta = c + di, d(c, \beta) = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$$



$$z_1 = p_2, z_2 = \omega_1, z_3 = p_3, z_4 = \omega_2, z_5 = p_1, z_6 = \omega_3$$

$$z^6 = 1 \Rightarrow z^6 - 1 = 0 \Rightarrow (z^3 - 1)(z^3 + 1) = 0 \Rightarrow z^3 = 1, z^3 = -1$$

$$c^3 = 1, d^3 = 1 (d = -c) \Rightarrow z_1 = d_2, z_2 = c_1, z_3 = d_3, z_4 = c_2, z_5 = d_1, z_6 = c_3$$

$$C_1, C_2, C_3 \cong D_1, D_2, D_3$$

$$d(C_1, C_2) = d(D_1, D_2) \Rightarrow (C_1 - C_2) \overline{C_1 - C_2} = (D_1 - D_2) \overline{D_1 - D_2}$$

$$d(C_2, C_3) = d(D_2, D_3)$$

$$d(C_3, C_1) = d(D_3, D_1)$$

$$C_1 - C_2 = \frac{A_1 + A_3 + B_1}{3} - \frac{A_1 + A_3 + B_2}{3}$$

$$= \frac{A_2 - A_1 + B_1 - B_2}{3} = D_2 - D_1$$

$$(C_1 - C_2) \overline{C_1 - C_2} = (D_2 - D_1) \overline{D_2 - D_1} = (D_1 - D_2) \overline{D_1 - D_2}$$

$$D_1 - D_2 = \frac{A_1 + B_1 + E_3}{3} - \frac{A_2 + B_1 + E_3}{3}$$

$$= \frac{A_1 - A_2 + B_2 - B_1}{3}$$

①

Napoleon Döğrüsü

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} = 3\overrightarrow{OG_A} \\ & \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OB_3} = 3\overrightarrow{OG_B} \end{aligned}$$

$A_2 A_3 B_1, A_3 A_1 B_2, A_1 A_2 B_3$
 C_1, C_2, C_3
 $A_1 B_3 B_2, A_2 B_3 B_1 (A_2 B_1 B_3), A_3 B_1 B_2$
 D_1, D_2, D_3

$$\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OB_1} = 3\overrightarrow{OC_1}$$

$$\overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_2} = 3\overrightarrow{OC_2}$$

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OB_3} = 3\overrightarrow{OC_3}$$

$$2(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}) + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OB_3} = 3(\overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OC_2} + \overrightarrow{OC_3})$$

$$\textcircled{2} \quad 2\overrightarrow{OG_A} + \overrightarrow{OG_B} = 3\overrightarrow{OG_C}$$

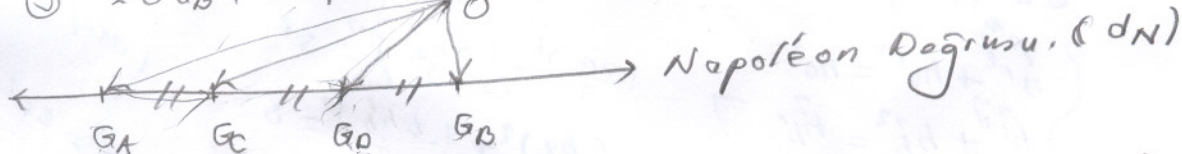
$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_3} + \overrightarrow{OB_2} = 3\overrightarrow{OD_1}$$

$$\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_3} = 3\overrightarrow{OD_2}$$

$$\overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OB_1} = 3\overrightarrow{OD_3}$$

$$2(\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OB_3}) + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} = 3(\overrightarrow{OD_1} + \overrightarrow{OD_2} + \overrightarrow{OD_3})$$

$$\textcircled{3} \quad 2\overrightarrow{OG_B} + \overrightarrow{OG_A} = 3\overrightarrow{OG_D} \Rightarrow \overrightarrow{OG_A} + \overrightarrow{OG_B} = \overrightarrow{OG_C} + \overrightarrow{OG_D} \quad \textcircled{4}$$



$$3\overrightarrow{G_C G_D} = 3(\overrightarrow{OG_D} - \overrightarrow{OG_C}) = 2\overrightarrow{OG_B} + \overrightarrow{OG_A} - 2\overrightarrow{OG_A} - \overrightarrow{OG_B} = \overrightarrow{OG_B} - \overrightarrow{OG_A} = \overrightarrow{G_A G_B}$$

$$\textcircled{5} \quad \overrightarrow{G_A G_B} = 3 \cdot \overrightarrow{G_C G_D}$$

$$\textcircled{2} \text{ den } \overrightarrow{G_A G_B} = \overrightarrow{OG_B} - \overrightarrow{OG_A} = 3(\overrightarrow{OG_C} - \overrightarrow{OG_A}) = 3\overrightarrow{G_A G_C}$$

$$\textcircled{6} \quad \overrightarrow{G_A G_B} = 3\overrightarrow{G_A G_C}$$

$$\textcircled{3} \text{ den } \overrightarrow{G_A G_B} = \overrightarrow{OG_B} - \overrightarrow{OG_A} = 3(\overrightarrow{OG_B} - \overrightarrow{OG_D}) = 3\overrightarrow{G_D G_B}$$

$$\textcircled{7} \quad \overrightarrow{G_A G_B} = 3\overrightarrow{G_D G_B}$$

$$\textcircled{8} \quad \overrightarrow{G_A G_C} = \overrightarrow{G_C G_D} = \overrightarrow{G_D G_B} //$$

kenarortay

$G_A, G_B, G_C, G_D \in d_N$, dir. doğruya (dN) paralel, her ikisi G_C, G_D $\overrightarrow{G_A G_B}$ 'nin ortası, G_D ,

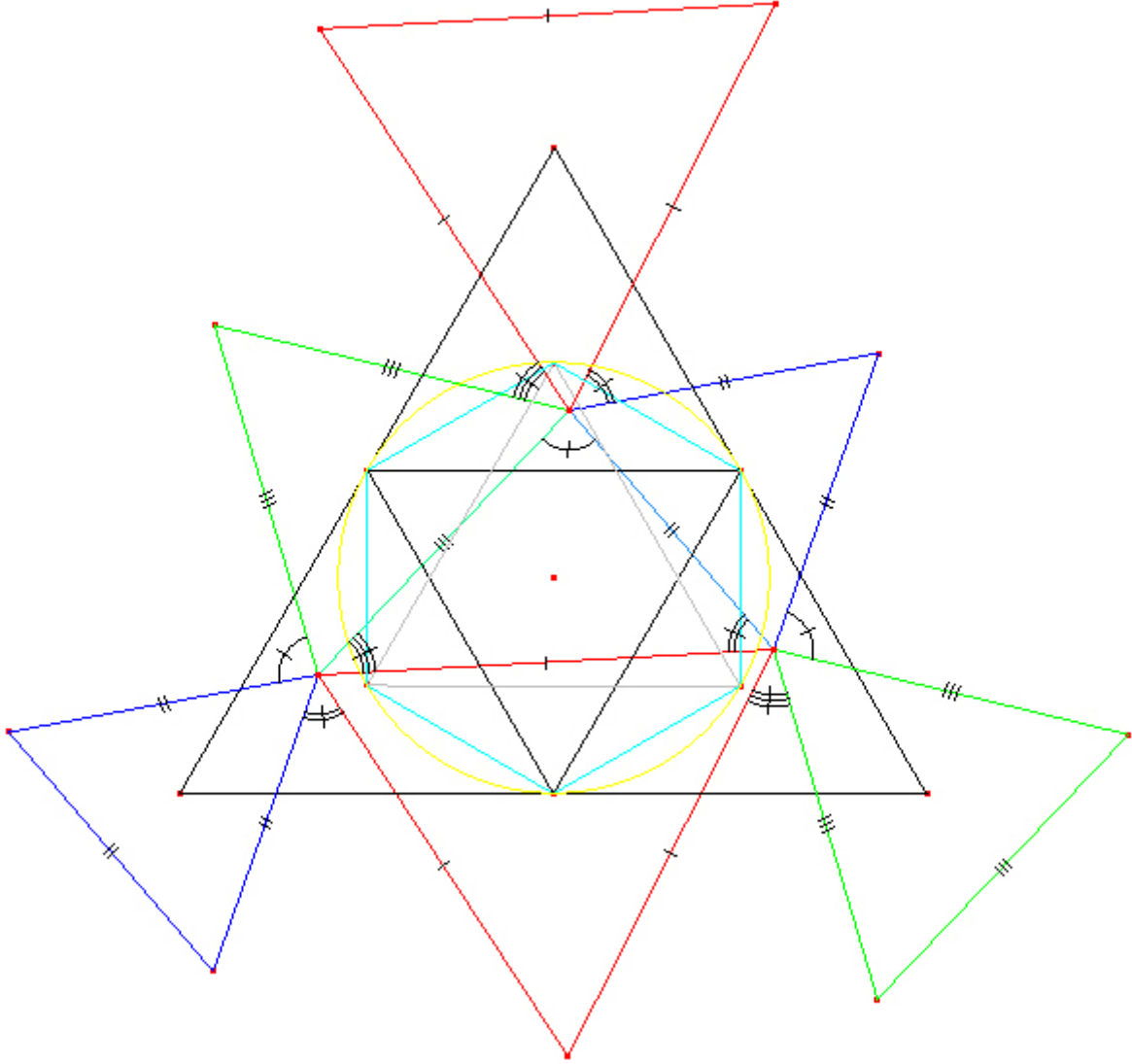
$\overrightarrow{G_C G_B}$ 'nin ortası noktasıdır. Bunun için

$$\overrightarrow{OG_C} = \frac{\overrightarrow{OG_A} + \overrightarrow{OG_D}}{2} \text{ ve } \overrightarrow{OG_D} = \frac{\overrightarrow{OG_C} + \overrightarrow{OG_B}}{2}$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG_C} + \overrightarrow{G_C G_A} &= \overrightarrow{OG_A} \\ \overrightarrow{OG_C} + \overrightarrow{G_C G_D} &= \overrightarrow{OG_D} \\ &= -\overrightarrow{G_C G_A} \end{aligned} \quad \Bigg/ \quad 2\overrightarrow{OG_C} = \overrightarrow{OG_A} + \overrightarrow{OG_D} \Rightarrow \overrightarrow{OG_C} = \frac{\overrightarrow{OG_A} + \overrightarrow{OG_D}}{2}$$

Düzgün 6-gene Genelleştirilmiş Napoléon Teoremi İçin Bir Geometrik Açılım



Bu geometrik açılımda üçgenin dışına doğru katlanmış eşkenar üçgenler üçgenin karşı köşelerine paralel kaydırılarak taşınırsalar, taşınan bu eşkenar üçgenlerin ağırlık merkezleri **Napoléon Üçgeni**'nin kenarları üzerine çizilmiş eşkenar üçgenlerin tepe noktaları olurlar ve bu eşkenar üçgenlerin ağırlık merkezleri de Napoléon Üçgeni'ni düzgün 6-gene tamamlayan eşkenar üçgeninin köşelerini verir (Bu eşkenar üçgenin kenarları gri renklidir). Ancak düzgün 6-genin bu şekilde elde edilmesi aşikâr olup **Düzgün 6-gene Genelleştirilmiş Napoléon Teoremi** için geometrik ifadeye dikkat etmek gerekir.

“Geometride görmek ve ifade etmek tek türlü belirli kavramlar değildir.”

Mathquake

Not: Düzgün 6-gene Genelleştirilmiş Napoléon Teoremi'nde bu geometrik açılım için “Napoleon's Theorem (<http://www.mathpages.com/home/kmath270/kmath270.htm>)” sayfasına bakınız.