Romberg İntegrali Kronolojim 3

Fotoğraf: *D. PAMUKTULUM*, 12.09.2017, 12:11.

***DİKKAT:** Bu dosyadaki matematiksel çalışmaların tamamı, ilk ikisi hariç, Mathematica programları ve bunlara ait demolardaki programlardaki algoritmalarım (yani algoritmalarım bana ait olmak üzere demoları istediğiniz gibi kullanabilirsiniz) ve bana ait çalışma dosyalarım tarafımca yapılmış olup, yazılı izin alınmadan tamamı veya bir kısmı yayınlanamaz. Sözkonusu bu çalışmalar 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu kapsamında olmak üzere "Genelleştirilmiş Napolyon Teoremi" örneğine bakabilirsiniz!*

D. PAMUKTULUM.

ONAYLANDI
Derya PAMUKTULUM 01:33, 10.2.20

KAMUYA AÇIKLANACAK

Mısır Devlet Başkanı ***Enver Sedat*** *Giza Piramitleri'nde-1977, TIME'ın 02.01.1978'deki "Yılın Adamı: Enver Sedat: Yeni Ortadoğu Mimarı" adlı özel röportajından.*

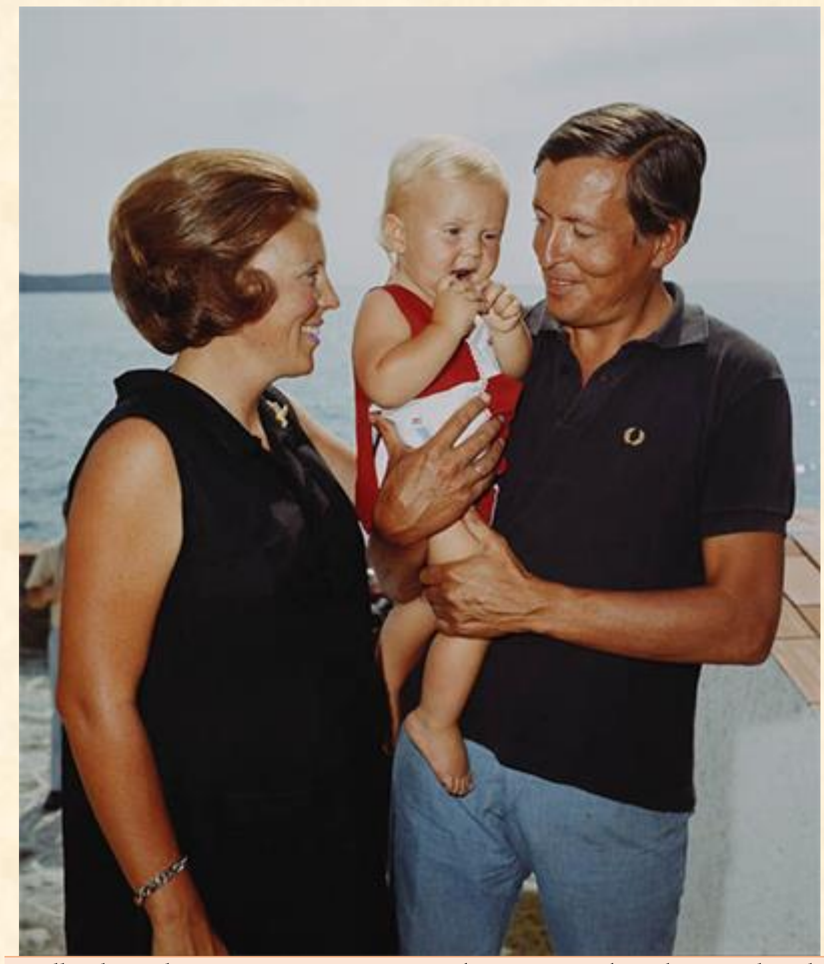
"Hayattaki her şey, dolayısıyla hayatın kendisi yaklaşımlardan ibarettir!"

Not. *Bu söz piramitlerin tasarımlarında çalışırken her seferinde karşıma çıkardı ve ben de onu alıp hayata uyarladım!*

D. PAMUKTULUM.

Hollanda Kralı'na Açık Bir Mektup

Saygıdeğer Ekselansları WILEM ALEXANDER CLAUS GEORGE FERDINAND'a,



Hollanda Kraliçesi ***Beatrix*** ve eşi Prens ***Claus von Amsberg***, kucağında oğlu ***Willem Alexander*** Porto Ercole'de tatilde, *Dutch Royal Family*.

Saygıdeğer ***Ekselansları***, bilgi ve iletişim teknolojilerindeki baş döndürücü gelişmeler dünyamızı küçülttü ve bizi birbirimize yaklaştırarak bilimsel ve kültürel etkileşimler ortaya çıktı. Örneğin 14 Ağustos 2000'de internete bağlandıktan sonra sadece internet üzerindeki kaynaklarla 22.7.2002'de ***"Arşimet'in Metodu M.V."*** çalışmasını yapmıştım. Adından anlaşılacağı üzere bu çalışma, ***Arşimet***'in metodunun dizilerle günümüze taşınmış şekli olup, M.Ö. 3. yy.-M.S. 19. yy.'daki matematikçilerin π hakkındaki çalışmalarının bu yeni şekle göre bir almanağıdır. Fakat bu çalışmalardaki algoritmaların yakınsaklık hızlarının artırılması sözkonusu olduğunda, ister istemez 16-17. yy. Hollandalı matematikçilerin çalışmalarıyla ilgilenme cüretinde bulundum. Ancak bunların içinden beni en çok etkileyen kişi, ***WILLEBRORD SNELL VAN ROYEN (1580-1626)*** oldu. Çünkü başlangıçta bir oyun gözüyle baktığım ***SNELL***'in 1621'deki algoritmasını (ki aynı yıl Yansıma Kanunu'nu da keşfetmişti) 10.09.2002, 01:45-27.10.2002, 05:40 tarihleri arasında genelleştirmiştim ve buna ***"Snellius Ekstrapolasyonu"*** adını verdim!

Fakat 2016'da ***"Romberg İntegrasyonu"*** adlı kitabıma başlarken yine ***Snellius*** çıktı karşıma ve onun algoritmasını en iyi şekilde değerlendirdim (ki bu yeni kitabımda ***Snellius*** hatırı sayılır bir yer kaplar). Ancak kitabın makale aşaması sırasında (ki bu makalede olduğu gibi) Babanız ***CLAUS GEORGE WILLEM OTTO FREDERIK GEERT VAN AMSBERG***'in kültürel faaliyetleri dikkatimi çekmişti ve 2002'de Snellius Ekstrapolasyonu'nu yazarken amacım da bu idi. Bununla birlikte, Babanız ***CLAUS GEORGE WILLEM OTTO FREDERIK GEERT VAN AMSBERG***'in 6 Ekim 2002'deki kaybını öğrendim ve şok geçirdim. Çünkü kültürle bu derecede ilgilenen bir kimsenin kaybı hepimiz için üzüntü verici idi!

Çok saygı duyduğum Babanızın şimdi anısı adına faaliyette olan fona ait sitenin giriş sayfasında şu sözü asılı idi (ki 2016'da gördüğüm bu söz şimdi siteden kaldırılmıştır):

"Belirleyici güç, kişinin kültürü, dili ve yaşam tarzının saygı gördüğü çevrede, gelişme ve ilerlemenin yalnızca toplumun kendisi tarafından gerçekleştirebildiği büyüme farkındalığıdır. Kişinin kendi kültürü ve geleneklerine saygısı ve güveni olmaksızın ilerlemenin gerçekleşmesi zordur", *Kültür temel ihtiyaçtır, Prens Claus Fonu*.

Sizden yüksek müsaadelerinizle isteğim, Hollanda'nın büyük düşünür ve matematikçilerinden ***SNELL***'in bu çalışmasına kayıtsız kalmamanızdır. Umarım, (kendisine bir vazife gören) kültür elçilerimiz sizi bu konuda bilgilendirir ve böylece, ülkelerimiz arasında başta kültür olmak üzere pek çok alanda ilişki kurulur!

Türk Snellius'u Derya PAMUK TULUM.

ARD’den Çirkin İftira

Almanya’nın Birinci Devlet Kanalı ARD’de 1 Aralık 2019’da ***Thorsten Mack*** ve ***Karaman Yavuz*** tarafından hazırlanan *“Unutulan Katliam: Atatürk Alevileri nasıl öldürdü?”* adlı bir belgesel yayınlandı. 6 dakika süren ve Tunceli’de çekilen belgeselde arşiv fotoğraflarına, arşivimizdeki 1937’den kalma ve onların önem verdiği bir belgeye ve **“sözlü tarih”** usulü röportajlara yer verildi (Bkz. *“ARD’de yayınlandıktan sonra tartışılan ‘Atatürk ve Dersim’ konulu haberde ne vardı?”*).

Belgesel Moderatör ***Dieter Moor***’un (resimdeki kişi) konuşmasıyla şöyle başlar: *“Mustafa Kemal **Atatürk**, Türklerin Babası. O geri kalmış Osmanlı İmparatorluğu'nu Batı merkezli bir cumhuriyete dönüştürdü. O dinin egemenliğini kaldırarak kadınları ataerkil baskıdan kurtardı. İsviçre medeni kanunu, Alman ticaret hukuku ve İtalyan ceza hukukunu yürürlüğe koydu. Bu nedenle çoğu Türk için parlayan ışık ve bir kahramandan başka biri değildi. Bu amaçlara ulaşmak için hiç tereddüt etmeden cesetleri, hem de çok sayıda cesedi ayaklar altına aldığı hep göz ardı edildi. Hatta zehirli gaz bile onun için bir tabu değildi. Şimdi bu inkar biraz zorlaşıyor, çünkü o zamanın tanık anlatımlarından oluşan bir arşiv kuruluyor.”*

Bu sözler belgeselin içeriği olmakla birlikte, kırmızı renkle gösterdiğim yerler tamamen uydurmadır. Sözkonusu bu uydurmalar için ***Atatürk***’ün 1937’de imzaladığı bir belge ([1]) ve provakatif Türk kökenli ama şimdi Almanya’da yaşayan birkaç araştırmacının ve onlara kanan 2 Tuncelili vatandaşımızın sözlü hikâyeleri kanıt olarak gösteriliyor. Programın sonunda ise hem bize hem de tarihe karışmış Federal Almanya’dan yanıtlanması istemiyle şu sorular soruluyor: *“**Atatürk**’ün soykırımdaki rolü ve Almanya’nın **Atatürk**'ün ısmarladığı zehirli gaz hakkında konuşulsun istiyoruz. Bu da **Hitler**’in yasal halefi olan Federal Almanya Cumhuriyeti'ne cevaplanması gereken sorular yöneltiyor.”*

“Aman Petrol!”

Güzel, hemen yakın tarihe bir bakalım. NETFLIX’teki *“Sarajevo (Saraybosna)”* filminde anlatıldığına göre, bir Sırp gencinin Avusturya Arşidükü ***Franz Ferdinand***’ı öldürmesinden tam 1 ay sonra I. Dünya Savaşı başlar. Bakın burası önemli: Bu, Almanya’nın Berlin-Bağdat demiryolu aracılığıyla Irak’taki petrolün üzerine çökmesi için gerekliydi. Fakat Almanya I. Dünya Savaşı’ndan yenik çıkınca hem müttefiki olarak biz yenilmiş sayıldık, hem de Lozan Antlaşması’nda çözülemeyen **“Musul ve Kerkük Sorunu”** sonrası bölgedeki petrole bu sefer İngilizler çökmek istedi. Musul konusu özellikle İngiltere ile tartışmalıydı. İşte tam bu sırada İngilizler, ellerini güçlendirmek için **“iç sorun kaşınması”** planını yaptılar. Pazarlık konusu için Şeyh Sait isyanındaki gibi Dersim

---

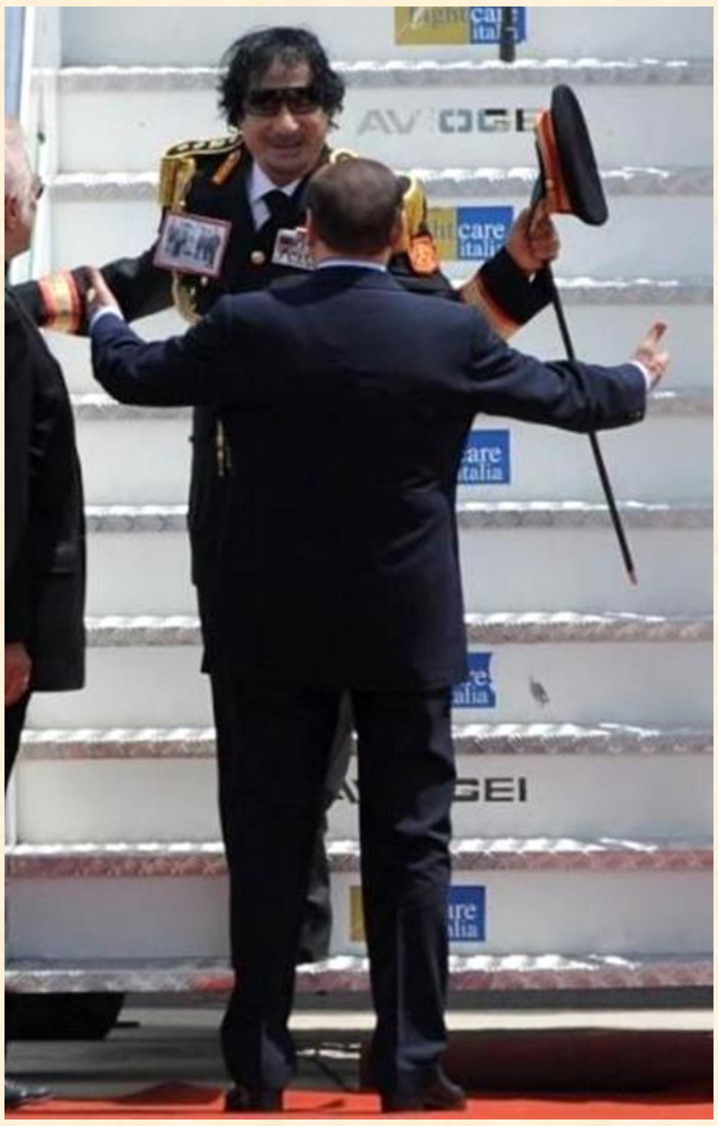
([1]) Sözkonusu bu belge ***Sinan Meydan***’ın 2013’te yayımladığı *“El Cevap”* adlı kitabında mevcuttur. 1937 tarihli bu belgede Türkiye 2. Dünya Savaşı’na giderken düşmanın silahları ile silahlanmak istediği için Almanya’dan gaz istendiği geçiyor. Sadece Almanya’dan değil; 1938’de de İngiltere’den gaz istiyor. Ama bunların geldiğine yönelik bir belge yok. Çünkü o sırada Almanya zaten kendi iç karışıklığıyla uğraşıyordu ve bu yüzden bize olumsuz cevap verdi. İngiltere ise 2 yıl sonra cevap verdi ve kabul etmediler. O dönem bu tip alışverişler suç değildi; askeri faaliyetti. Hem böyle bir gaz kullanılmış olsaydı askerlerimiz ölürdü ya da o gaza maruz kalanlarda yıllar sonra yan etkileri ortaya çıkardı (Bkz. *“İspatlayamazsa mahkum olur”*. Bu konuda en yetkin bilgileri *“Cengiz Özakıncı, Alman Devlet Televizyonunun Atatürk’e yönelik Dersim iftiralarını belgelerle çürütüyor!”* makalesinde bulabilir ve bu makaledeki bilgilerin sunulduğu *“Türkiye’ye Yönelik ‘Dersim İftirası’na Yanıtlar”* programını ve en son sunulan *“Atatürk’e Soykırımcı İddialarına Yanıtlar”* programını da izlemenizi hararetle tavsiye ederim).

isyanını provoke ettiler (Bkz. "*Prof. Dr. Ramazan Demir: Feodalizmin Devlete İsyanı: Dersim Olayları (1)*"). Buna göre Dersim isyanını, bu esas bağlamından koparak sırf bölge insanının başına gelenlerle tartışmak doğru olmaz. Çünkü bu şekilde hareket etmekle emperyalistlerin ekmeğine yağ sürmekten başka bir şey yapmış olmazsınız. Yani zevahiri kurtarayım derken elinizdekinden de olursunuz!

Almanlar'ın *Hamsun*'dan Ders Alması Gerekiyor!

Bizimkiler, yukarıda görüldüğü üzere, Dersim isyanının bu şekilde tartışılmadığını, yukarıdaki kırmızı renkle vurguladığım yerdeki gibi yalan yanlış bilgilerle tartışıldığını görünce soluğu hemen ARD televizyon binasının önünde aldılar ve protesto ettiler (Bkz. "*Alman Devlet Kanalı ARD önünde Atatürk protestosu*") ve bugün de Hamburg'ta protesto ettiler (Bkz. "*Alman kanalının skandal Atatürk yayını Hamburg'da protesto edildi*"). Çünkü bizi "***Hitler****'in 1932'deki seçim konuşması*"ndaki gibi kendileriyle karıştırıyorlardı ve ***Romberg***'in Almanya'dan kaçmasının biricik nedeni de bu idi. Yani Almanya, Devlet Terörü'nü 1933'te NAZİ karşıtı muhalif Almanlara ve azınlıklara karşı kullandığı gibi biz Türklere karşı da hep kullandı!

Knut Hamsun (***Max von Sydow***) 26 Haziran 1943'te Berghof malikanesinde ***Hitler*** görüşürken, "*HAMSUN, 1996*" adlı filminden bir sahne (**Y.N.** 7 Haziran 1944'te de Albay ***Stauffenberg***, Valküre Operasyonu'nu onaylatmak için Berghof malikanesine gelir. Bkz. "*Valkyre: Hitler's Berghof*"). Ulusal Basın Başkanı ***Otto Dietrich*** (solda) ve Bakan Temsilcisi ***Ernst Züchner*** (sağda) 84 yaşında ama ***Romberg*** gibi ayakta duran şaire büyük bir takdirle eşlik ediyorlar. Bu görüşmede ***Hamsun***'un tek merakı vardır; Norveç'in Yeni Avrupa'da yer alıp almayacağı sorusunun yanıtını ***Hitler***'den öğrenmektir.



Yani Almanlar'ın bu belgeselde yaptığı iş, ***Knut Hamsun***'un, "*İstanbul'da 2 İskandinav Seyyah*" adlı kitabındaki (ki kitabın PDF'si sayfanın altındaki "şuradan" linkinde mevcuttur) Türkler'e karşı önyargısından öteye gitmez. ***Hamsun*** mükemmel bir İstanbul tasviriyle başladığı gezisinde, 1899-1900'deki Osmanlı'yı anlatırken bizzat gördüğü Sultan ***II. Abdülhamit***'in geçit törenindeki gözlemlerini de anlatır. Ama ***Hamsun*** bizi tanıdıkça önyargılarından vazgeçmeye ve 120 yıl önce neden öyle olduğumuza hak veriyor!

Şimdi de *"Barış Pınarı Operasyonu'nda Kimyasal Silah Kullanıldı"* Diyorlar!

Bu konuda son bir gelişme Amerika'dan geldi. Kongre'nin ilk Müslüman kadın üyelerinden biri olan Demokrat Parti Minnesota milletvekili ***Omar***, talebini ABD'nin Suriye Özel Temsilcisi ***James Jeffrey***'ye yazdığı mektupta dile getirdi. ***Omar*** mektubunda, ABD'nin bir NATO müttefikinin Kürt sivilleri beyaz fosforla kasıtlı olarak hedef alıp almadığını tespit etmesinin aciliyet taşıdığını belirtti (Bkz. "*Şimdi de kimyasal silah diyorlar*").

Şimdi anlaşılıyor, ***Vehbi***'nin kerrakesi. Yani biri düğmeye basmış ve Türkiye Cumhuriyeti'nin, tarih boyunca kimyasal silah kullandığını iddia ediyorlar. Aslında ARD'deki çirkin iftirafının asıl hedef için bir basamak olduğunu görmek gerekiyordu. Ama bunu görmek yerine geçmişi suçlamanın kimseye bir yararı yok!

Bakınız, sağ göğsünde ***Ömer Muhtar***'ın resmini taşıyan ***Kaddafi***'nin, *"****Mussolini****'yi, ****Graziani****'yi ve ****Balbao****'yu kınıyoruz. Onların Libya'da yaptıkları tehcirler, katliamlar ve yıkımların tümü büyük bir şerefsizliktir"* sözlerine karşılık ***Berlusconi***, kısaca şu yanıtı verir: *"Bizi anlamayanlar, halen mazinin esiri durumundadırlar. İtalya ve Libya arasındaki ilişkilerin düzelmesi, herkesin işine yaramıştır. Bu konuda halen bizi eleştirenler var. Onlar mazide yaşamaya ve klişelerin esiri olmaya devam ediyorlar. Biz ise ileriye bakıyoruz!"*

Berlusconi haklı, çünkü ***Kaddafi***'nin dile getirdiği olaylar mazide kalmıştır ve bunları tekrar gündeme getirmenin kimseye bir faydası yoktur. Oysa Almanlar'ın biz Türkler'e karşı kötücül davranışları sistematiktir ve bu yüzden affedilemezdir!

ARD’den Çirkin İftira

Barış İçin Sürpriz Yapmak Gerekiyor!

Bilindiği üzere 29 Mayıs 1999’daki Eurovision Şarkı Yarışması yeniliklerin yarışmasıydı. Çünkü yarışmaya dil serbestliği getirildi; artık isteyen her ülke istediği dillerde şarkılarını söyleyecekti ve 1956’dan beri yarışmaya dahil olan orkestra tamamen Eurovision’dan çıkarıldı. Önceden kazanan ülke kendi orkestrasını yarışma gecesi için hazırlıyordu fakat genellikle orkestra şefleri birbirinden farklıydı. Çünkü her ülke kendi orkestra şefini sanatçısıyla beraber yarışmaya gönderiyordu. Belli yıllarda orkestra şefleri ile ev sahibi ülkenin orkestrası arasında çeşitli anlaşmazlıklar sözkonusu olmuştu. Orkestranın kaldırılmasının bir diğer sebebi de, etnik enstrümanların daha fazla kullanılmaya başlanmasıydı. Bir anlamda etnik tınılar ve bestelerin özgünlüğü korunamıyordu.

Sürpriz-“*Riese Nach Jerusalem-Kudüs’e Seyahat-Journey To Jerusalem*”.

İşte bu yüzden tüm zamanlardaki en dikkat çekici şarkı, Almanya adına yarışan Sürpriz grubunun “*Reise nach Jerusalem-Kudüs’e Seyahat*” parçası oldu. Şarkı ***Zeyno Filiz***, ***Deniz Filizmen***, ***Bülent Ural***, ***Yasemin Akkar***, ***Savaş Uçar*** ve ***Chicco Özden***’den kurulu Sürpriz grubu tarafından Türkçe, Almanca, İbranice ve İngilizce olarak 4 dilde seslendirildi.

Bu parçada barış ile ilgili şu sözler son derece dikkat çekicidir:

Dostça yaşamak varken
Birlik, kardeşlik varken neden bu savaşlar?
Umut dolu yarınlara beraber varalım.
Dileğimiz bu!

…

Dost kalırsak eğer, yaşamaya değer.
Arzular bir olunca var olmak ne güzel!
Ve bir zaman, hedefe vardığımız an
Dünyayı sevgi sarar!

Şarkı 3. oldu (ki Türkiye ve İsrail 12 puan verdi) ve Almanya 2010’a kadar bir daha bu sonucun yanından bile geçemedi! Bu arada, son 7 yıldır Eurovision’a katılmamamıza tamamen hak veriyor ve bizi büyük bir rezillikten kurtaran kararı aldıkları için başta Sayın Cumhurbaşkanımız olmak üzere TRT Genel Müdürlüğü’nü ve ilgili tüm yetkilileri tebrik ediyorum!

Derya PAMUKTULUM

Önsöz

Werner Romberg'i 17. Ölüm Yıldönümü'nde Anıyoruz!

SADECE BİLGİ

05.02.2020, 17:00.

Werner Romberg, *"Mathematicians Fleeing from Nazi Germany"* kitabında 47 kişilik listede 26. sıradaki Nazi Almanyası'ndan kaçan bir matematik-fizikçisidir. Ama o bir Yahudi olduğu için Nazi Almanyası'ndan kaçmadı; solcu olduğu için kaçtı. Çünkü Heidelberg Üniversitesi'nde öğrenciyken Sosyalist İşçi Partisi'ne (SAP) yakındı ve Münih'teki Ludwig Maximilian Üniversitesi'nde doktorasını yaparken Sosyal Demokrat Parti'ye (SPD) üye idi. Ama en kötüsü, üniversitedeyken ona **"Yarı Yahudi (Halb-Jude)"** lakabı takılmıştı (ki bunun ne olduğunu öğrenebilmeniz için http://romberg-integrali.org adlı web sitemin girişindeki fotoğraf albümümdeki 23. fotoğrafa bakınız. Bu konuda *"Genelleştirilmiş Napolyon Teoremi"* adlı çalışmam vardır. Ama bunun hikâyesini sonra anlatayım. Çünkü Nazi döneminde yaşanan bu olay karmaşıktır)…

Romberg, bu konuda *"Mathematicians Fleeing from Nazi Germany"* kitabının yazarı ***Reinhard Siegmund-Schultze***'ye 1998'de şu anısını anlatır: *"SPD ve KPD'nin Naziler'e karşı ortak mücadelesini destekleyen SAP'a yakındım (Bkz. "**Hitler**'in 1932'deki seçim konuşması"). Yaklaşık 10-20 öğrenciydik ve bu yüzden Naziler tarafından tanınıyorduk. **Sommerfeld** 1932'de MÜNİH Üniversitesi'nde bir ödül yarışması organize etti ve katılmamı önerdi. Çözümü sundum ve şu yanıtı aldım: '**Atama tamamen gönderen tarafından yapıldı. Ancak, gereken olgunluğa (geistige Reife: Zihinsel Olgunlaşma) sahip olmayan (yetersiz) gönderici (Werner Romberg), ödül verilemez!**'. **Sommerfeld** onu doktora (PhD) olarak sunmamı önerdi ve acele etmemi istedi. Bu nedenle 1933'ün yazında '**Yüksek Onur (Magna Cum Laude)**' ile sınavı geçebildim. **Sommerfeld** SSCB'nden teorik fizikçilerin taleplerini duymuştu ve solcu yanılsamalarımı iyileştirmek için beni tavsiye etti.", Mathematicians Fleeing from NAZI Germany/4. Pretexts, Forms, and the Extent of Emigration and Persecution/4.D. Documents/4.D.5. Political Reasons for Emigration beyond Anti-Semitism, p. 77.*

Şimdi ***Werner Romberg***'in biyografisini *"Hitler ve Naziler"* eşliğinde vereyim (**Y.N.** NETFLIX'te orijinalde *"Hitler and the Nazis-2011"* olarak sunulan bu TV dizisi 2018'de yayından kaldırılmıştır. Ama ondan aldığım gerekli bilgiler, ki bazı hataları düzelttim, burada mevcuttur).

30 Ocak 1933: Alman Tarihi'nde yeni bir dönem başladı. ***Hitler*** Başkanlık Sarayı'ndan Alman ulusunun yeni Şansölyesi olarak çıkıyordu. ***Hitler***'in nihai güç olmasının önünde sadece, 87 yaşındaki pos bıyıklı amca ***Paul von Hindenburg*** vardı. Kendisi o anda Prusya'daki mülkünde ölüm yatağında yatıyordu. ***Hitler*** için, ***Hindenburg***'un ölümü daha iyi bir zamanda gerçekleşemezdi. Zorba Kahverengi Gömleklileri yeni yola getirmiş ve Ordu Generalleri'nden destek almıştı. Şimdi, tek çözmesi gereken sorun, ***Hindenburg***'un yerine kimin Başkan olacağı idi. ***Hitler***, elbette, ***Hindenburg***'un yerine kendisini düşünüyordu. Ama Başkan olarak değil. Bunun yerine, **"FÜHRER"** olmak istiyordu: Alman Halkı'nın Yüce Lideri. 2 Ağustos 1934'te ***Hindenburg***'un beklenen ölümü gerçekleşti. Saatler içinde Nazi Yönetimi Başkanlık Ofisi'nin Şansölyelik makamıyla birleştirildiğini duyurdu. Alman İmparatorluğu'nun Yüce Lideri'nin ***Adolf Hitler*** olduğu yasalara girdi. Alman Halkı bu Yasa için oy vermedi. Her şey bir anda gerçekleşmişti (ki belgeselde böyle geçiyordu). Ama ***Hindenburg***'un ölümünden 17 gün sonra bir referandum yapıldı. Yanda bu referandumda kullanılan bir oy pusulası ve oyun nasıl kullanılması gerektiği görülüyor (Bkz. *"Wahlen 1933 bis 1938"*).

Referandumda onaya sunulan soru şöyle idi: *"Cumhurbaşkanlığı makamı, Şansölyelik makamı ile birleştirilmiştir. Cumhurbaşkanı'nın tüm yetkileri ile Şansölyeliğin yetkileri Führer ve Şansölye **Adolf Hitler**'de toplanmıştır. Vekilini kendisi atayacaktır. Her Alman erkeği ve Alman kadını, yasa ile öngörülen bu düzenlemeyi onaylıyor mu?"*

Hitler, % 89.93 gibi ezici bir üstünlükle **"EVET (JA)"** oylarını topladı. Fakat Nazi yönetimi ilk başta referandum sonuçlarından dolayı hayal kırıklığına uğramıştı. *Joseph Goebbels*, günlüğüne 22 Ağustos tarihinde referandumdan bahsederken şunları yazacaktı: *"İlk sonuçlar: Çok kötü. Sonradan yükseldi. Nihayet **Führer** için 38 milyon oy. Daha fazlasını ummuştum"*. Bununla birlikte tarihçi *Ian Kershaw*, oylama sürecindeki manipülasyon hesaba katıldığında dahi, *"sonuçların o sırada Alman halkının büyük çoğunluğunun **Hitler**'e olan hevesli desteğini yansıttığını"* belirtir.

Nazi Partisi referandum ile, ***Hitler***'in tüm siyasi güçleri tek elde toplamasını amaçlamıştı. Referandum seçmenlere dönük akla hayale gelmeyen bir baskı atmosferinde gerçekleşti ve **"EVET (JA)"** sonucu ***Hitler*** tarafından Almanya'nın *De Facto* Devlet Başkanı olarak gerçekleştireceği işlemlere dayanak olarak kullanılmıştı. Gerçekte ***Hitler***, referanduma konu makamları ve yetkileri referandumdan önce halihazırda (ve yasa dışı olarak) elinde toplamıştı ve referandumu bu durumu meşrulaştırmak için kullanarak **"Führer und Reichskanzler (Führer ve Şansölye)"** unvanını aldı. Yeni Führer'in ilanından hemen sonra ülke tamamen elden geçirildi: Askerlik yemini, *"Yeminime Tanrı şahit olsun. **Adolf Hitler**'e kayıtsız şartsız itaat edeceğim, Alman İmparatorluğu'nun ve halkının Führer'ine, Silahlı Kuvvetler'in Yüce Komutanına ve cesur bir asker olarak, bu yeminden itibaren hayatımı ortaya koyacağım!"* şeklinde değiştirilen (bkz; *"Walküre"* filminin girişine. Bu arada ***Tom Cruise***'e başarılar diler ve ondan bu tür nitelikli filmlerin devamını hasretle beklerim) Alman Ordusu Alman Devleti'ne ya da Anayasası'na değil, doğrudan ***Hitler***'in kişisel aracı haline geliyordu. 2 ay içinde Nazi kontrolündeki Parlamento'nun çıkardığı yasalar sonucunda, ***Hitler***, diktatörlük yetkilerine kavuştu. Tüm Alman Kurum ve Kuruluşları ya Nazileştirildi ya da dağıtıldı (Bkz. *"Hitler ve Naziler: Sezon 1: Bölüm 2, Parça 2, Bölüm 2: FÜHRER"*). Yahudiler'e yapılan kötü muameleler komünistlere, sosyal demokratlara, liberallere, çingenelere vb. yani ***Hitler***'e muhalif olan herkese genişletildi. İşte bu yüzden ***Romberg***'in Almanya'dan kaçmaktan başka çaresi kalmaz!

Sommerfeld Faktörü

Romberg'in kaçmasında ***Arnold Sommerfeld*** son derece önemli rol oynar. Çünkü ***Sommerfeld***, ilkin 1932'de Münih Üniversitesi'nde düzenlenen ödül yarışmasına ***Romberg***'in katılmasını önerir. Fakat ***Romberg*** çözümü sunmasına rağmen atama tarafından yetersiz görülür ve şu yanıtı alır: *"Atama tamamen gönderen tarafından yapıldı. Ancak, gereken olgunluğa (geistige Reife: Zihinsel Olgunlaşma) sahip olmayan gönderici (**Romberg**), ödül verilemez!"*. Yani ***Romberg*** kibarca reddedilir. Ancak ***Sommerfeld***, bu sefer aynı çalışmayı ***Romberg***'ten doktora (PhD) olarak sunmasını önerir ve bunun için acele etmesini ister. ***Romberg***, ***Sommerfeld***'in nasihatını dinler ve 26.07.1933'te *"Kanal Işınlarının Kutuplaşması Hakkında (Zur Polarisation des Kanalstrahlichtes)"* çalışmasını doktoran tezi olarak sunar. Yine 1933 yazında, ***Romberg*** **"Yüksek Onur (Magna Cum Laude)"** ile bir sınavı geçer ve ***Sommerfeld*** 3. kez devreye girer. Çünkü ***Sommerfeld***, SSCB'den teorik fizikçilerin taleplerine duyar ve ***Romberg***'i, solcu yanılsamalarının tedavisi için tavsiye eder. Nihayet, 1934'te Dnipro'daki Fizik ve Teknoloji Enstitüsü'ne teorik fizikçi olarak atanması gerçekleşince, ***Romberg*** Münih'ten ayrılır. Burada 1937'ye kadar kalır. Çünkü bu sefer de ***Stalin*** devreye girer. ***Josef Stalin***, 1935'te tasfiyeye başladı. Esas olarak rakiplerini kaldırmayı amaçlasa da, bu tasfiyeler güvenilir olmayan yabancılara da uygulandı. Onlardan biri ***Romberg*** idi ve bir Alman vatandaşı olarak 1937 sonuna kadar SSCB'de kalma hakkına sahipti.

Romberg'in Politik İkizi: *Sabahattin Ali*

Sabahattin Ali'nin Almanya'daki 1928-1930'daki öğrencilik yılları Yozgat'ta geçirdiği 1 yıllık süreden sonra İstanbul'a dönmesiyle başladı. Dayısı ***Rıfat Ali Ertüzün*** de Ankara'da özel bir hastane açarak oradan ayrıldı. İstanbul'a tatile giderken Ankara Mili Eğitim Bakanlığı'ndan tanıdığı kişilere uğradı ve onlara şaka ile karışık bir şekilde Yozgat'tan ayrılmak istediğini ve geri dönmesi halinde alacaklılarının kendisini öldürme ihtimalinden bahsetti. Yetkililer ise kendisinin genç ve gelecek vaat eden bir öğretmen olmasına dikkat çekerek onu Avrupa'ya gitmeye teşvik ettiler. Nitekim, yeni kurulmuş Türkiye Cumhuriyeti tarafından 1928 yılı Kasım ayında Almanya'ya eğitim amacıyla gönderildi.

Sabahattin Ali, 15 gün Berlin'de kaldıktan sonra Potsdam'a yerleşti. İlk olarak dil öğrenmek için yaşlı bir kadının evine pansiyoner olarak girdi. Daha sonra Almancasını güçlendirmek için özel bir kurum olan Deutsches Institut Ausländer'ın (Das Deutsche Institut für Ausländer an der Universität Berlin) kurslarına başladı. Ayrıca I. Dünya Savaşı'nda Türkiye'de bulunan ve biraz Türkçe bilen eski bir subaydan dersler aldı. Burada Almanya'ya giden ekipten olan ***Melahat Togar*** ile de görüşmekteydi. ***Melahat Togar***, **"Arkadaşım Sabahattin Ali"** yazısında ***Sabahattin Ali***'nin Almancayı tam öğrenemeden Almanca üzerinden solcu yazarları okuduğunu belirtti: ***İvan Turgenyev***, ***Maksim Gorki***, ***Knut Hamsun***, ***Edgar Allan Poe***, ***Guy de Maupassant***, ***Heinrich von Kleist***, ***E.T.A. Hofmann***, ***Thomas Mann*** vb. gibi isimleri tanıdı ve onların eserlerinden ilham aldı.

Potsdam'da kaldığı süre içerisinde İstanbul'u ve karşılıksız kalan aşkını özlemekteydi. 1 Ocak 1929'da ***Nahit Hanım***'a yılbaşı hediyesi olarak yazdığı şiirleri gönderdiyse de cevap alamadı. Potsdam'daki dil kurusunu bitirdikten sonra Berlin'de yatılı bir okula yerleşti. Almanya'ya 6 ya da 7 yıl kalmak için gönderildiğini düşündüyse de aslında bu süre 4 yıl olarak planlanmıştı. İlk yılını kazasız belasız atlattıktan sonra 2. yılında Türkiye'ye geri dönmek zorunda kaldı.

Geri dönüşü hakkında farklı iddialar mevcuttur:

1. ***Nihal Atsız***'a anlattığına göre, *"Bu parazit Türkleri buradan atmalı!"* diyen bir Alman öğrenciyi dövdüğü için geri gönderildi.
2. Anılarına göre hasımlarından kurtulabilmek için kaçmak zorunda kaldı: *"Bu Nazi yandaşlarının en çok diş biledikleri kişi ben olmuştum. Şundan ki, aşağılanan öğrenciler zamanla hep benim çevremde toplanmışlardı. Türk oluşum, düşmanlarımı durduruyordu. Eğer **Hitler**'in orduları Türkiye'ye girseydi o zaman benim başımda belaya girebilirdi. Şimdi eski bir müttefik memleketin gençlerinden olmam bana biraz olsun dokunulmazlık veriyordu. Çevreme sığınan sosyal demokratlar zamanla azaldı, hele Yahudiler hiç kalmadı. O zaman tehlikenin benim başımda döndüğünü anladım. Bir gün hasımlarımdan habersiz trene atladığım gibi Türkiye'nin yolunu tuttum, yoksa biraz daha gecikseydim Spartakist olarak ben de yaşamımı yitirebilirdim"*
3. Alman öğrencilere komünizm propagandası yaptığı gerekçesiyle geri gönderildi (**Y.N.** ***Lida Baarová***, *"Şeytanın Aşkı"* filminde anılarını anlatırken komünizmin korkunç yüzünü sergiler).

Biz, bu konuda ***Sabahattin Ali***'nin, 14.04.1933'te ***Atatürk***'e gönderdiği mektuptaki *"'Ben böyle bir şey yapmadım' diyor ve buna inanmanızı rica ediyorum. Benim şimdiye kadar yalan söylediğim görülmemiştir. Ne karakter bir adam olduğum da Maarif Vekâleti'nden sorulabilir."* beyanına güveniyor ve gerçeğin orada olduğunu biliyoruz. Aslında oraya gitmeye gerek yok; çünkü ***Sabahattin Ali Romberg***'in politik ikizi olduğundan bu gerçek apaçık ortadadır!

Referandum pusulası: *Siz, 13 Mart 1938 tarihli Avusturya'nın III. Reich ile birleşmesini ve Führerimiz **Adolf Hitler**'in partisini kabul eder misiniz?* (**Y.N.** Yanıt bölümünün ortasında büyük bir **"Evet (Ja)"** yuvarlağı ve sağ tarafında ise küçük bir **"Hayır (Nein)"** yuvarlağı vardır). Sonuç, % 99.73 **"Evet"**.

Şeytanın Aşkı'nda Kesişen Yollar!

Hitler, 12 Mart 1938'te Almanya'nın bir parçası olan Avusturya'yı ilhak edip, bunu yandaki pusulada görüldüğü üzere Alman halkına onaylatınca ***Romberg***, dikkatini bu sefer Çekoslovakya'ya yöneltir (Bkz. *"Hitler ve Naziler: Sezon 1: Bölüm 2, Parça 2, Bölüm 4: The First Invasions"*). Mayıs 1938'de Varşova'dan geçerek akrabalarının olduğu Prag'a geçti ve orada bir süre geçimi için yeterli parayı kazanabilmek için özel bir öğretmen olarak çalıştı. Prag'taki Charles Üniversitesi Astrofizik Enstitüsü personeliyle temasa geçti. Ancak ***Romberg***'in seçiminin iyi olmadığı açıktı. Burada çalışma ve oturma izni olmadığı halde, Oslo'daki arkadaşı ***Egil Andersen Hylleraas*** ile irtibata geçip bir asistan olarak yardım etmek ister. Fakat ***Romberg***, ***Hitler***'in Münih Antlaşması ile Prag'ı işgal edeceğini anlayınca, 20 Kasım 1938'de de Prag'tan Oslo'ya uçar. Bu, bir matematikçinin önsezisi midir bilinmez, ama ***Romberg***, Naziler'den hep bir adım önde olur!

Romberg, oradan oraya bir dama taşı gibi sıçramasını şöyle anlatır: *"1937'de SSCB'deki oturma iznim yenilenmedi, çünkü Alman pasaportum vardı. Polonya hâlâ varolduğundan (yani NAZİ Almanyası tarafından işgal edilmediğinden) beri Prag'taki akrabalarım için Varşova'ya seyahat edebilirdim. Oslo'daki Profesör **E. A. Hyllerås**'e asistan olarak yanında çalışmayı teklif ettim. Brøgger Komitesi'nden biraz para bulmayı başardım. Böylece Sudetland'ın işgalinden sonra ama Prag'ın işgali öncesinde Oslo'ya uçabildim."*, *Mathematicians Fleeing from NAZI Germany/6. Alternative (Non-American) Host Countries/6.D. Documents and Problems Pertaining to the Various-Often Temporary-Host Countries outside of the United States/Norway, p. 125*.

Gerçekten de ***Romberg***'in önsezisi doğru çıkıyor ve ***Hitler***, Münih Antlaşması'nı devreye sokup Çekoslavakya'daki çoğunluğun Almanca konuştuğu Südet bölgesini işgal etmeye karar veriyor. Ama herkes ***Romberg*** gibi uyanık değildir. Örneğin ***Walter Schmid***, uyuduğunu şöyle itiraf eder: *"Münih Konferansı'nın sonuçlarını öğrenince, hepimiz memnun olmuştuk. Bu, halk için de geçerliydi. Bu şekilde savaştan kaçınabilirdik. **Hitler**'in niyetini, halkın bildiğinden farklı olduğunu görememiştik.* Bkz. *Hitler ve Naziler: Sezon 1: Bölüm 2, Parça 2, Bölüm 5: SUDETENLAND"*. ***Hitler***, nihayet 16 Mart 1939'da Prag'a girerek Çekoslovakya'yı işgal eder ama bundan önce, yine yukarıdakine benzer oy pusulasıyla bir referandum daha yapar (4 Aralık 1938). Bu sefer soru şu: *"Büyük Alman İmparatorluğu'nda Südetli Alman Seçimi. Oylar Südet'in kurtarıcısı olarak bizi kabul ediyor musunuz? Nasyonel Sosyalist Alman İşçi Partisi'nin seçim için oy teklifinizi veriniz! Şu isimler sizi lideriniz olarak yükseltecek: **1. Adolf Hitler, 2. Konrad Henlein, 3. Karl Hermann Frank**.* Bkz. *Reichstagswahl 1938"*. Sonuç % 99.1 **"EVET (JA)"** çıkar.

Ancak ***Hitler***'in durmaya niyeti hiç yoktur. ***Hitler***, Weserübung Operasyonu ile İskandinav ve Baltık Denizi'nde bir İngiliz müdahalesini engellemek, İsveç demirini güvenceye almak ve Alman Kriegsmarine ve Luftwaffe'sine İngiliz adalarına olası bir saldırı için iyi pozisyonlar hazırlamak istiyordu. 9 Nisan 1940, 04:15: Oslo hariç her yerde sürpriz saldırılar gerçekleşir. Bunun üzerine ***Romberg*** artık Oslo'da kalmanın bir anlamı olmadığını anlar. Bu arada, Kopenhag sivil halkının Luftwaffe tarafından bombalanması tehdidi karşısında Danimarka Kralı, iç işlerinde bağımsız olmak koşuluyla neredeyse hemen teslim olur. Bu durum Danimarka'nın 1943 yazına kadar, hoşgörülü bir şekilde işgal edilmesiyle sonuçlandı. Ayrıca Danimarkalı Yahudiler'in tutuklanmadan önce neredeyse hepsinin İsveç'e kaçacak şekilde uyarılacak zaman kazanması sağlandı (Bkz. "Hitler ve Naziler: Sezon 1: Bölüm 2, Parça 2, Bölüm 8: Weserübung Harekatı"). Muhtemelen ***Romberg*** de bunların arasında idi ve yine Naziler'den bir adım öndeydi. 1940-1944'te Uppsala'da yaşadı.

Alman Reich'ı 1941'de ***Romberg***'i Alman vatandaşlığından attı ve 1943'te de doktorasını geri aldı. 1944'ün sonlarında Oslo Almanlar tarafından özgürlüğüne kavuşturulduğunda, ***Romberg*** Oslo'ya geri döndü ve ***Hylleraas***'ın asistanı olarak resmi bir pozisyon aldı. 1947'de de Norveç vatandaşı oldu. Arkadaşı ***Harald Wergeland*** sayesinde Tröndheim'daki Norveç Teknoloji Ensititüsü'nde Uygulamalı Matematik'teki Diferansiyel Analiz ve Nümerik Metotlar üzerine çalışmaya başladı. ***Romberg***, Norveç'in küçük bir liman şehri olan Tröndheim'da kalıyordu ve orada kuzey ışıkları altında Nümerik İntegral'deki o ünlü katkıyı yaptı. ***DKNVS***, bu ünlü katkıyı yazdı. Makalenin sunumu 14 Şubat 1955'teki toplantıda NTH'deki (ki şimdi NTNU) Matematik Enstitüsü Başkanı Prof. Dr. ***Sigmund Selberg***'e verildi ve 25 Nisan 1955'te de Komisyon Başkanı ***F. Bruns Bokhandel***'in kaşesiyle onaylanarak "*Vereinfachte numerische Integration (Basitleştirilmiş Nümerik İntegral), Norske Vid. Selsk. Forh. (Trondheim) 25 (1955) 30-36*" adıyla dünyaya duyuruldu. Fakat o sırada Nazi sürgünü olduğu için NTH'de bir pozisyona sahip değildi. Ama aynı yıl Videnskapsselskabet'e üye seçildi ve NTH'deki Uygulamalı Matematik Enstitüsü'ne ancak 1960'da atanabildi.

Onun bu tezi günümüzde ***"Romberg Metodu"*** ya da ***"Romberg İntegrali"*** olarak bilinir. Bayılırım, kesişen yol hikâyelerine… ***Göbels***'in yasak aşkı ***Lida Baarová***, 9 Kasım 1938'de Berlin'den Prag'a kaçarken ***Romberg***, 11 gün sonra, 20 Kasım 1938'de Prag'tan Oslo'ya kaçar. Aynı şekilde, 2 Kasım 2016, 22:54'te trapez metodunun geometrik yorumunda bazı sonuçlara erişip bunların 3 Kasım 2016, 16:19'ta bilgisayarıma indirdiğim ***Byrnjulf Owren***'in "*Werner Romberg: Vereinfachte numerische Integration*" makalesinde ***Romberg*** tarafından verilmiş olduğunu görünce şok geçirmiştim (Bkz. "*Romberg İntegrali Kronolojim 1*"deki 1.1. Trapez Metodu ve 1.2. Romberg Metodu'na İlişkin Orijinal Formüller'e). Çünkü ***Romberg***'in tezinde geçen orijinal metot günümüzde kullanılmıyordu ve bunu yetkin akademik kaynaklar dışında görmeniz mümkün değildi.

Romberg'in bu makaledeki hedefi, standart bir nümerik integrasyon için yamuk kuralının yakınsaklık hızını artırmaktı. O, ilkin 1927'deki ***Lewis Fry Richardson***'un yayımladığı ekstrapolasyonu hedeflemiş değildi; çünkü bu ekstrapolasyon günümüzdeki gibi kullanılmıyordu. Bu nedenle ***Romberg***, Richardson ekstrapolasyonundan çok, 1654'deki ***Huygens***'in "*De Circuli Magnitudine Inventa*" kitabında geçen (2.23)'teki algoritması üzerine eğildi ve araştırmalarının sonunda (2.2)'deki ekstrapolasyonu heurestik (sezgisel) şekilde (1,25)-(1.27)'de yeniden keşfetti!

Sözkonusu bu keşif için ***Fujino Romberg***'e metodu nasıl bulduğunu sorduğunda, ***Romberg*** bunu şöyle anlatır: "*Sonrasında profesöre **"Romberg İntegrali"**ni nasıl bulduğunu sordum. O dönem profesörün kullandığı bilgisayar İsviçre malı **"MADAS"** adında (MADAS ATG -20) bir hesap makinesiymiş ve hafızası yalnızca 30 kelimeyi barındırabiliyormuş. Bir seferinde nümerik integrali Simpson integral metoduyla denediğinde, kesin sonuca bir türlü ulaşamamış. Bu sebeple Gauss integral yöntemiyle denemiş, fakat bu sefer de katsayıları depolarken hafıza doluvermiş. İşte bu şartlar altında Romberg integrali fikri aklına gelmiş. Hem kodlaması kolay, hem fazla hafıza gerektirmiyor, hem de yakınsaklığı bulmak kolay.*", ***Romberg integralinin mucidi Werner Romberg ile bir röportaj gerçekleştirdim, Seiji Fujino, 14.10.1996***.

Günümüzde artık ***Romberg***'in integral formülasyonu tamamen terkedilmiştir; sadece yamuk kuralından elde edilen (1.11)'deki 2. formül (2.2)'deki Richardson ekstrapolasyonun uygulanmasına bırakılmıştır. Bu nedenle ***Romberg***, her ne kadar makalesinin başlığına ***"Basitleştirilmiş Nümerik İntegral (Vereinfachte numerische Integration)"*** demişse de bu formülasyon o kadar da basit değildi; 2003'te 4 farklı versiyondur verdiğim **E-ATA 1 Algoritmaları**'nın en ilkel şekli olan Versiyon 1'ine denk geliyordu. Fakat sonra çok ilginç bir olay oldu: Ben tam bu makaleyi bitirmiş ve yayına hazırlamak üzereyken harddiskim birden çöktü. Aslında harddisk çoktan göçmüştü ama ben bunun farkında değildim. Harddisk 21.12.2016'da çöktüğünde, ben harddiskteki tüm dosyalarımı 17:46'da harici diskime attım ancak, harddiskteki kırıklık tam da bir fay hattı gibi yeni bitirdiğim bu makalenin olduğu dosyanın üzerinden geçiyordu. Bu nedenle bu dosyayı bırakın kurtarmayı, hiçbir işlem yapamıyordum bile. Ancak dosyanın ayrıntıları gibi basit bilgilerine bakabiliyordum. Bu bilgilere göre 73 saat 40 dakikalık emeğim bir anda çöpe gitti ve kendimi resmen başımdan aşağıya kaynar sular dökülmüş gibi hissediyordum. Bu, ***Mr. Bean***'in "*Whistler's Mother*" tablosuna yaptığından daha beter bir şeydi. Sonradan şanslı olduğum bir olay oldu ve bu dosyanın eskizinden yeniden ama bu sefer çok daha yetkin bir şekilde bir makale yazabildim. Fakat bu makaleyi yazarken Bölüm 2'ye ait çalışmam yok gibiydi. Bunları çalıştığım kağıtlardan çıkarttım ve onları daha da geliştirdim. Özellikle notasyon konusunda.

Şimdi, bu makaleyi ***Werner Romberg***'in 17. ölüm yıldönümü nedeniyle özel olarak hazırladım ve bu yüzden orijinalinden epey saptım. Yani aşağıdaki Bölüm 1&2'de % 60 saydamlıkla pasifleştirdiğim yerler, 02.11.2016, 23:24-25.01.2017, 22:26 tarihleri arasındaki orijinal makalelerimden alınmadır. Buna göre pasifleştirmediğim yerleri (ki bunlar makalenin tamamına yakındır) ***Werner Romberg*** için ölümünün 17. yıldönümü nedeniyle 25.01.2017, 22:26'dan sonraki makalelerimden alıp ekledim. Özellikle, orijinaldeki pasifleştirilmiş aşağıdaki bilgileri sorgularken kafanıza herhangi bir şey takılmasın, dolayısıyla panik yapmayın! Onları tanıtım nedeniyle böyle verdim ve bunların ispatlarından tutun uygulamalarına kadar her şey elimde mevcuttur. Örneğin (2.34)'teki ekstrapolasyonu orijinalde sadece ***Eutokios***'un kesirleri için kullanmıştım; ama burada sadece tanıtımını yaparak 6 tane Mathematica programını ve 4 tane demosunu verdim. Yani (2.34)'teki ekstrapolasyonun ispatı, ekstrapolasyondaki her bir iterasyonun asimptotik hatası ve Mathematica uygulamaları elimde var. Bunun için herhangi bir sıkıntı yapmanıza gerek yok!

Özetle bu makale, ***Werner Romberg***'in 17. ölüm yıldönümü için çıkartılan özel olarak performans gösterdiğim bir sayıdır (**Y.N.** WORD 2019'da sadece aktif-pasif çalışması için 7 saatten fazla bir süre harcadığımı biliyor muydunuz? Bu nedenle dosyanın PDF boyutu büyüdü ve 45.3 MB oldu. Kapak ise cepten çekim yaptığım için, ADOBE PHOTOSHOP'ta 1754 Pikselx2339 Piksel formatında ve 150 Piksel/İnç çözünürlüğünde resmin boyutu 11.7 MB olmak üzere PDF'de 18.9 MB'dır. Bunların dışındaki RİK 3'teki boyut artışı ADOBE ACROBAT ile yaptığım düzenlemeler nedeniyle oldu). Böylece hem 05.02.2017, 17:00'da yazdığım bu Önsöz'ü duyurma şansına sahip oldum hem de ***Werner Romberg***'i, ölümünün 17. yıldönümünde bir kez daha anmış oldum (**Y.N.** "*NAZİ ALMANYASI'ndan Kaçan Matematikçiler: Werner Romberg*" mesajımın altında ***Romberg***'i 05.02.2018, 06:20'de bir kez daha anmıştım): Adı algoritmalarına, algoritmaları kendisine kutlu olsun!

Hayatta en çok korktuğum şey, yol kesişmesidir. Çünkü başınıza ne geleceği bilinmez. Almanlar'ın geçmişte biz Türkler'e karşı sistematik olarak sürdürdüğü kötü davranışların ve son olarak ARD'deki çirkin iftiranın bir şekilde tatlıya bağlanarak yeni bir başlangıcın yapılması, dolayısıyla 2 ülke arasındaki ilişkilerin düzelmesi, her iki tarafın da işine yarar. Biz Türkler, mazinin esiri değiliz ve klişeler içinde yaşamayız ama geçmişten ders alırız ve gelecek için de ileriye bakarız. Eğer Almanlar da aynı şekilde karşılıkta bulunursalar, o zaman "*Ben sadece bir yol kesişmesi nedeniyle geçerken **Süssmayr** gibi **Romberg**'e uğradım, o kadar!*" derim. Bunun için bir iyi niyet göstergesi olarak ilk adımı ben atıyor ve makalemdeki, programlardaki ve demolardaki tüm algoritmalarımı ***Romberg***'in adıyla anıyorum. Hatta bir önceki paragrafta kutladım bile!

Bu arada, ***Werner Romberg***'in ölümüyle ilgili bilgileri Nekrolog 2003'te bulabilirsiniz. O oradaki "February (Şubat)" ayında ölenlerin listesinde sondan 4. kişi olarak geçer ve diğer 4 büyük şahsiyetle birlikte anılır. Ama mezarına ait bir resim bulamadım. Merak ettim, ***Werner Romberg***'in mezar taşında *Friedrich Hirzebruch* (ki onun mezar taşındaki cisimlerin çizimini antik dönemdeki mezar taşlarında göremezsiniz. Neden?) ve *Otto Hahn*'daki gibi adıyla anılan integral formülü mü yazıyordu?

D. PAMUKTULUM.

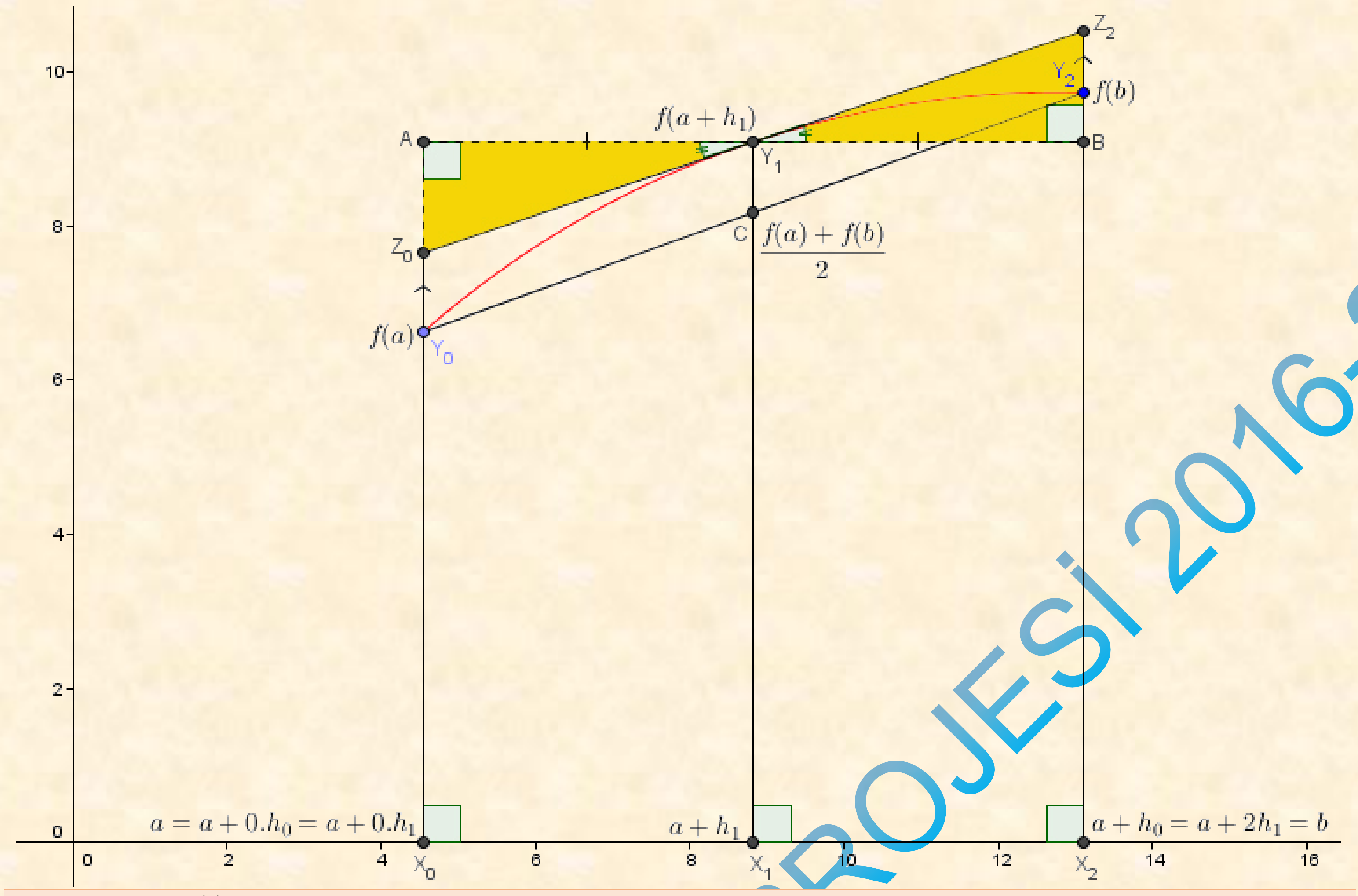
İçindekiler Tablosu

§1. Trapez Metodunun Geometrik Yorumu ve Sonuçları

TAMAMLANDI

02.11.2016, 22:54.

1.1. Trapez Metodu. 14 Şubat 1955'te *Werner Romberg (1909-2003)* tarafından keşfedilen metottaki trapez metodu, $I = \int_a^b f(x)dx$ belirli integrali için



Şekil 1.1. Konkav f(x) eğrisinde trapez metodunun geometrik yorumu.

şeklindeki f(x) fonksiyonunun altında kalan $X_0X_2Y_2Y_0$ bölgesine $X_0X_2Y_2Y_0$ dik yamuğun alanıyla başlayan ve her seferinde bu yamuğun $h_0 = h = b - a$ yüksekliğinin 2'ye bölünmesiyle ortaya çıkan dik yamukların yüksekliklerine karşılık gelen yanal kenarların f(x)'e yakınlaştırılması yoluyla ([2]), bu dik yamukların alanlarının toplamının $X_0X_2Y_2Y_0$ bölgesine yakınsaklaştırılmasından ibaret metottur!

Şu halde konkav f(x) fonksiyonu ya da f(x)'in konkav olan parçalarında trapez metodunu uygularsak, yani şekilde n = 1. adımda görüldüğü üzere $X_0X_2Y_2Y_0$ dik yamuğunun alanının $X_0X_2Y_2Y_0$ bölgesinden küçük olduğunu, dolayısıyla $K_0 < I$ ve genelde de n. adımda $K_0 < \cdots < K_n < \cdots < I$ eşitsizliklerinin geçerli olduğunu görürüz. Yani kısaca, $\forall n \in \mathbb{N}$ için K_n, I'nın alt sınırı olur.

Buna göre $X_0X_2Y_2Y_0$ dik yamuğunun alanını hesaplarsak,

$$K_0 := A(X_0X_2Y_2Y_0) = (b-a).\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitliklerinden

$$(1.1) \quad K_0 = h_0.\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

şeklinde bir ilk yaklaşım elde ederiz.

Fakat genel olarak, K_n için $[a,b]$ aralığını 2^n eşit aralığa bölersek, bu şekilde doğrudan dik yamuğun alan formülüyle hesap yapmak zorlaşır. Bu durumda aşağıdaki pratik metoda başvurmak gerekir:

Pratik Metot. $X_0X_2Y_2Y_0$ dik yamuğunun alanını yukarıdaki şekildeki gibi doğrudan dik yamuğun alan formülüyle hesaplamak yerine, onu $X_0X_2Y_2D$ dikdörtgenine tamamlarsak (ki şekilde D noktası yoktur ancak bunu Y_2 noktasından geçen ve x-eksenine paralel olan doğrunun X_0Y_0 doğrusunu kestiği nokta olarak düşünülebiliriz),

$$K_0 = A(X_0X_2Y_2Y_0) = A(X_0X_2Y_2D) - A(Y_2DY_0) = (b-a)f(b) - \frac{(b-a)\big(f(b)-f(a)\big)}{2} = h_0f(b) - h_0.\frac{f(b)-f(a)}{2} = h_0.\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

işleminden (1.1)'in elde ediliş şekli daha kolay olur.

Diğer taraftan, eğer $[a,b]$ aralığında $\frac{a+b}{2} = \frac{2a+(b-a)}{2} = a + \frac{b-a}{2} = a + h_1$'ye karşılık gelen X_1 orta noktasını gözönüne alır ve X_1Y_1 dikmesinin f(x) eğrisini kestiği Y_1'den Z_0Z_2 teğetini çizersek bu teğetin denkleminin,

([2]) Bu şekilde bir yaklaşım, insanoğlunun son 4000 yıldır bir daireye içten ve dıştan düzgün çokgenlerle yaklaşımı yani ***"Tüketme Metodu"***nu gösterir. Yani Şekil 1.1'de $h_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ limitine göre doğru parçalarıyla f(x)'e yaklaşılmaktadır. Tıpkı bir çemberin içine ve dışına çizilen düzgün çokgenlerde olduğu gibi (Bkz. M.Ö. 2000'lere tarihlenmiş *"Susa Tableti"* ve M.Ö. 250'ye tarihlenmiş ***Arşimet***'in *"Çemberin Ölçüsü Hakkında"* çalışmalarına).

$$(1.2)\quad y - f(a+h_1) = f'(a+h_1)\big(x-(a+h_1)\big)$$

şeklinde olduğunu biliyoruz. Burada eğim Leibnitz Teoremi'ne göre $m_T = f'(a+h_1)$ dir.

Buna göre (1.2)'den Z_0 noktasının ordinatı,

$$y - f(a+h_1) = f'(a+h_1)\big(a-(a+h_1)\big) \Rightarrow z_0 = f(a+h_1) - h_1 f'(a+h_1)$$

ve Z_2 noktasının ordinatı,

$$y - f(a+h_1) = f'(a+h_1)\big(a+2h_1-(a+h_1)\big) \Rightarrow z_2 = f(a+h_1) + h_1 f'(a+h_1)$$

olduklarından

$$(1.3)\quad \begin{cases} z_0 = f(a+h_1) - h_1 f'(a+h_1), \\ z_2 = f(a+h_1) + h_1 f'(a+h_1) \end{cases}$$

sonuçları çıkar.

İşte bu sonuçlara göre $X_0X_2Z_2Z_0$ dik yamuğunun alanını,

$$T_0 := A(X_0X_2Z_2Z_0) = (b-a).\frac{z_0+z_2}{2} = (b-a)f(a+h_1) = h_0 f(a+h_1)$$

eşitliklerine göre

$$(1.4)\quad T_0 = h_0 f(a+h_1)$$

olarak elde etmiş oluruz.

Fakat burada da aynı durum sözkonusudur, yani genel olarak T_n için $[a,b]$ aralığını 2^{n+1} tane eşit aralığa böldüğümüzde ortaya çıkan dik yamukların alanını hesaplamak ve bunları toplamak çok zaman ister. İşte burada da şu basit sonucu görmek gerekiyor:

Pratik Metot. Eğer Y_1'den X_0Y_0 ve X_2Y_2 doğrularına birer dikme çizersek $X_0X_2Z_2Z_0$ dik yamuğunun alanı, eş $X_0X_1Y_1A$ ve $X_1X_2BY_1$ dikdörtgenlerinin alanlarının toplamına eşit olur ve böylece,

$$T_0 = A(X_0X_2Z_2Z_0) = A(X_0X_1Y_1A) + A(X_1X_2BY_1) = h_1 f(a+h_1) + h_1 f(a+h_1) = 2h_1 f(a+h_1) = h_0 f(a+h_1)$$

işleminden (1.4)'ü derhal elde etmiş oluruz.

Peki bu nasıl oldu?

Dikkat edilirse şekilde $f(x)$ eğrisine Y_1 noktasında çizilen Z_0Z_2 teğeti nedeniyle sarı renkle boyalı $AY_1Z_0 \cong BY_1Z_2$ (A.K.A) eş dik üçgenlerinde

$$(1.5)\quad A(AY_1Z_0) = A(BY_1Z_2)$$

alanlar eşitliği gerçekleşir, dolayısıyla $X_0X_2Z_2Z_0$ dik yamuğundaki BY_1Z_2 dik üçgeni $X_0X_1Y_1A$ dikdörtgenine AY_1Z_0 olarak transfer edilmiş olur ki $X_0X_2Z_2Z_0$ dik yamuğunun alanı, eş $X_0X_1Y_1A \cong X_1X_2BY_1$ dikdörtgenlerinin alanlarının toplamına dönüşür.

Şu halde (1.1) ve (1.4)'ten

$$(1.6)\quad K_0 < I < T_0$$

tam sıkıştırması geçerli olur.

1.2. K ve T'nin Eğimlerinin Aynı Olması Şartı. Bunun için şekildeki sarı renkle boyalı AY_1Z_0 ve BY_1Z_2 dik üçgenlerindeki

$$(1.7)\quad |z_0 - f(a)| = |z_2 - f(b)|$$

yüksekliklerini eşit almamız yeterlidir!

Şu halde bu eşitlikte (1.3)'teki z_0 ve z_2'yi yerine koyar ve gerekli işlemleri yaparsak,

$$(1.8)\quad \begin{cases} f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = \dfrac{f(a)+f(b)}{2}, \\ f'\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \end{cases}$$

sonuçları ortaya çıkar ki ilk bağıntı f'nin bir lineer fonksiyon yani doğru olmasından (ki bu durumda şekildeki C ile Y_1 noktaları çakışır, dolayısıyla $f(x)$, Z_0Z_2 teğeti ve Y_0Y_2 keseni çakışırlar) ve ikinci bağıntı da f'nin kuadratik (2. derece) bir fonksiyon yani parabol olmasından ileri gelir (Bkz. "*Ortalama Değer Teoremi*").

İkinci olarak, K_1 için $[a,b]$ aralığını 2 eşit parçaya böler (ki bu durum şekilde mevcuttur) ve pratik metotla hesaplarsak,

$$K_1 = A(X_0X_1Y_1Y_0) + A(X_1X_2Y_2Y_1) = h_1f(a+h_1) - \frac{h_1\big(f(a+h_1)-f(a)\big)}{2} + h_1f(b) - \frac{h_1\big(f(b)-f(a+h_1)\big)}{2} = h_1f(a+h_1) + h_1.\frac{f(a)+f(b)}{2} = \frac{K_0}{2} + h_1f(a+h_1)$$

eşitliklerinden

$$(1.9)\quad K_1 = \frac{K_0}{2} + h_1f(a+h_1)$$

sonucunu elde ederiz.

Diğer taraftan, X_0 ile X_1 ve X_1 ile X_2 nokta çiftlerinin orta noktalarını bulur (ki X_0 ile X_1 noktalarının orta noktası $\frac{a+a+h_1}{2} = a + \frac{h_1}{2} = a + h_2$ ve X_1 ile X_2 noktalarının orta noktası da $\frac{a+h_1+a+2h_1}{2} = a + \frac{3h_1}{2} = a + 3h_2$'dir) ve bu orta noktalardan çıkılan dikmelerin $f(x)$ eğrisini kestiği noktalardan birer teğet çizersek,

$$T_1 = 2h_2f(a+h_2) + 2h_2f(a+3h_2) = h_1\big(f(a+h_2) + f(a+3h_2)\big)$$

eşitliklerinden

$$(1.10)\quad T_1 = h_1\big(f(a+h_2) + f(a+3h_2)\big)$$

sonucunu elde etmiş oluruz.

Sonuçta işleme bu şekilde devam edersek MEM (Matematiksel Endüksiyon Metodu) gereğince $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$(1.11)\quad \begin{cases} T_n = h_n \displaystyle\sum_{k=1}^{2^n} f(a+(2k-1)h_{n+1}), \\ K_n = \dfrac{K_{n-1}}{2} + h_n \displaystyle\sum_{k=1}^{2^{n-1}} f(a+(2k-1)h_n) \end{cases}$$

olmak üzere ***Arşimet***'in kullandığı tam sıkıştırma teoremi

$$(1.12)\quad K_0 < K_1 < \cdots < K_n < \cdots < I < \cdots < T_n < \cdots < T_1 < T_0$$

şeklinde gerçekleşir.

Bunlardan ilkine, $x_k = x_0 + kh_n$ apsislerine göre (ki şekle göre $x_0 = a$ ve $x_{2^n} = b$'dir)

$$(1.13)\quad I = \int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{2^n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \approx \underbrace{\sum_{k=1}^{2^n} \Delta x_k f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)}_{\text{Orta noktarla yaklaşım}} = \sum_{k=1}^{2^n} h_n f\left(x_0 + \frac{2k-1}{2}.h_n\right) = h_n \sum_{k=1}^{2^n} f(x_0+(2k-1)h_{n+1}) = h_n \sum_{k=1}^{2^n} f(a+(2k-1)h_{n+1}) = T_n$$

şeklinde orta noktalardan elde edildiği için T_n'ye **"Orta Nokta Formülü"** ya da Şekil 1'de tutmuş olduğumuz yola göre **"Teğetlerle n. Yaklaşım"** denir ve bunun dikdörtgensel formda kaldığına (ki bunun geometrisini yukarıdaki pratik metotta inceledik) ve değişmez olmasına ([3]) dikkat ediniz. İkinci olan K_n'ye ise **"Trapez Formülü"** ya da metodumuz gereği **"Kesenlerle n. Yaklaşım"** denir. Bu ise bir daireye içten ya da dıştan düzgün n-genlerle yaklaşmaktan farklı değildir. Tıpkı ***Arşimet***'in *"Çemberin Ölçüsü Hakkında"* çalışmasındaki gibi. Yani burada ve her nerde yapılıyorsa yaptığımız tek şey var; o da bu çalışmanın ***Arşimet***'in anılan çalışmasındakinden farklı olmadığıdır. Şüphesiz ***Arşimet*** bunun farkında olsa idi, mezarına en çok övündüğü "Kürenin Hacmi" yerine bu çalışmayı simgeleyen bir şey koyarlardı!

Resim 1.1. Piramitler Savaşı'nda ***Napoleon Bonaparte***, *"Askerler, piramitlerin tepesinden 40 yüzyıl bize bakıyor! (Soldats! Songez que du haut de ces pyramides quarante siècles vous contemplent)"* derken, ***Antoine Jean Gros, 1810***.

Arşimet'in İntegral Hesapları ve ***Napolyon*** Amcam!

Arşimet'in integral hesapları günümüzdeki gibi değildir; mekaniktir. Onun π için *"Çemberin Ölçüsü Hakkında"* (örneğin, ***Romberg***'in (1.55)'teki örneğinin trapez formülünün (1.61) olduğu gözönüne alınırsa), *"Arşimet kürenin hacmini nasıl hesapladı?"*, *"Parabolün Alanı"* ve daha birçok çalışmasında günümüzde integrallere karşılık gelen mekanik metotlar kullanılmıştır. İşte 2004'te İmparator ***Napolyon*** için yaptığım *"Genelleştirilmiş Napolyon Teoremi"*, tastamam böyle bir çalışmadır. Çünkü bu çalışmanın 5. sayfasındaki şekilde XYZ üçgenindeki Fermat-Torricelli noktası olan P noktası ile ağırlık merkezi G noktası çakışmış ve oradaki (17) eşitliğini gerçekleyen vektörler dengede kalmışlardır. İşte ***Napolyon***'un teoreminin genelleştirmesine ilişkin 3-6. sayfalarda yaptığım ispat bu denge üzerinde yürür.

Fakat bu teoremin ilk ispatını PDF'de 19-26. sayfalarda karmaşık sayılara göre yapmıştım ama ikincisine neden gerek duymuştum?

O sırada ilk ispatta kullandığım teknik, Napolyon Teoremi'nin ispatında kullanılan teknikle aynı idi ve bu yüzden bu ispatın bir İmparator için hiç de uygun olmadığını düşünüyordum. Bu nedenle yeni bir ispat ama en güzel ispat arayışına girdiğim zaman aklıma n-boyutlu vektörler gelmişti. Çünkü

([3]) Özellikle Cebir'den bildiğimiz bu özellik için ***Tosun Terzioğlu*** şöyle der: *"Topolojide bir değişmeze 'Arf İnvaryantı' denir"*. Bu konuda *"Arf Değişmezleri"*'ne bakabilirsiniz.

bu şekildeki bir ispat her boyutta geçerli olacak ve böylece karmaşık sayılar, 3-boyutlu sayılar, kuaterniyonlar, oktonyonlar, sedonyonlar vb. gibi sayılarla tekrar tekrar ispat yapmamıza gerek kalmayacaktı!

İspat özetle şöyledir: n boyutlu V vektör uzayında herhangi bir $A_1A_2A_3$ üçgenini alınız. Bu üçgenin kenarları üzerine kurulu eşkenar üçgenlerin tepe noktaları karşılıklı köşeler için sırasıyla B_1, B_2, B_3 olsun. Yani aynı indisli noktalar $A_1A_2A_3$ üçgeninin aynı kenarına baksınlar. İşte bu karşılıklı köşelerden oluşan $\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_2B_2}, \overrightarrow{A_3B_3}$ eş vektörlerini paralel kaydırarak başlangıç noktalarını çakıştırdığınız zaman uç noktaları XYZ eşkenar üçgenini gösterir. Buna neden olan şey, başlangıç noktalarının XYZ üçgeninin Fermat-Torricelli noktası olarak bilinen P noktasının üzerinde olması ve bu noktayla G ağırlık merkezinin çakışmasıdır. Bu durumda (17) eşitliği gerçekleşir, yani $\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_2B_2}, \overrightarrow{A_3B_3}$ vektörleri P'de dengede kalır. Tıpkı ***Arşimet***'in "*Kürenin Hacmi*"nde yaptığı gibi. İşte ispat tamamen bu denge üzerinde yürüyerek sonuçlanır!

Şimdi bu ispat belki Fransızlar için anlamsız olabilir ama benim için çok önemli idi. Çünkü karşımda elindeki sopasıyla kuma teoremini çizerek (muhtemelen Khafre piramitinin doğusunda. Tıpkı şurada poz verdiği gibi) yanındaki dostlarına anlatan bir General, ama sonradan İmparator olan bir dahi vardı ve bu yüzden en iyisini yapmam gerekiyordu!

1.3. T_n'nin Değişmezliği Hakkında. Şekilde Y_1 noktasından geçen Z_0Z_2 teğeti yerine Y_0Y_2 doğrusuna paralel ya da herhangi bir doğru alınırsa (1.11)'deki T_n değişmez!

Örneğin, Y_1'den geçen ve Y_0Y_2 doğrusuna paralel bir doğru alırsak teğet ile kesenin eğimleri (1.8)'deki ikinci bağıntıya göre eşit olur:

$$(1.14)\quad m_T = m_K = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Buna göre Z_0Z_2 paralelinin $x = a$ ile $x = b$ dikmelerini kestiği noktaların ordinatları sırasıyla,

$$(1.15)\quad \begin{cases} z_0 = f(a+h_1) - \dfrac{f(b)-f(a)}{2}, \\ z_2 = f(a+h_1) + \dfrac{f(b)-f(a)}{2} \end{cases}$$

olur ve buradan

$$T_0 = A(X_0X_2Z_2Z_0) = (b-a).\frac{z_0+z_2}{2} = (b-a)f(a+h_1) = h_0f(a+h_1)$$

eşitliklerine göre

$$(1.16)\quad T_0 = h_0f(a+h_1)$$

şeklinde yine (1.4)'teki sonuç ve işleme aynı şekilde devam edildiği takdirde de (1.11)'deki T_n elde edilir.

Fakat bu sonuç sadece Y_1'den geçen ve Y_0Y_2 doğrusuna paralel Z_0Z_2 doğrusuna has bir durum değil; genel olarak Y_1'den geçen her doğru için geçerlidir. Ancak bu sonsuz doğrunun içinde en değerli olanı, teğettir. Neden?

Şimdi bu metodu en etkin şekilde nasıl kullanılacağımıza bir bakalım.

1.4. Metodun En Etkin Şekilde Kullanılması Hakkında. Metodun en etkin şekilde kullanılabilinmesi için f(x)'in aşağıya doğru ya da yukarıya doğru konkav olduğu yerlerin belirlenmesi, dolayısıyla f(x)'in dönüm (büküm) noktalarının

$$(1.17)\quad f''(x) = 0$$

denkleminden bulunması gerekir. Buradan f(x)'in aşağıya doğru konkav (ki bu, x-eksenine göre **"konkav"**dır) ya da yukarıya doğru konkav (ki bu da, x-eksenine göre **"konveks"**tir) olduğu yerler [a, b] aralığında belirlenir, dolayısıyla [a, b] aralığı konkav ve konveks olan alt aralıklarına parçalanır.

Buna göre f(x)'in konkav olduğu yerlerde (1.12) ve konveks olduğu yerlerde de (1.12)'deki K_n ve T_n'ler yer değiştirirlerse

$$(1.18)\quad T_0 < T_1 < \cdots < T_n < \cdots < I < \cdots < K_n < \cdots < K_1 < K_0$$

eşitsizlikleri geçerli olur.

Not 1.1. Burada şuna dikkat etmek gerekiyor: Bazı f(x) fonksiyonları için K_n ve T_n'nin ilk n değerlerinde (1.12) ya da (1.18) eşitsizlikleri bozulabilir, ama metot etkinleştiğinde yani n'nin belli bir değeri ve sonraki değerlerinde bu eşitsizlikler derhal korunur!

1.5. K_n ve T_n Arasındaki İlişki: Aritmetik Ortalama. (1.11)'deki formüllere göre

$$K_{n+1} = \frac{K_n}{2} + h_{n+1}\sum_{k=1}^{2^n} f(a+(2k-1)h_{n+1}) = \frac{K_n}{2} + h_{n+1}.\frac{T_n}{h_n} = \frac{K_n}{2} + \frac{h_{n+1}}{h_n}.T_n = \frac{K_n}{2} + \frac{1}{2}.T_n = \frac{K_n+T_n}{2}$$

eşitliklerinden

$$(1.19)\quad K_{n+1} = \frac{K_n+T_n}{2}$$

bağıntısı elde edilir. Buna **"K_n ve T_n'nin aritmetik ortalaması"** denir ve bu aritmetik ortalama K_{n+1}'i verir.

Burada şu sonuca dikkat edilmelidir: (1.11)'e göre T_n'nin alt bölme sayısı K_n'kinden 2 kat fazladır. Yani T_n, 2^{n+1} eş alt aralığa sahip iken, K_n, 2^n eş alt aralığa sahiptir. Bu sonuç ise, (1.12) ya da (1.18)'deki K_n ile T_{n-1}'in I'ya eş yaklaşımlarda bulunabileceklerini gösterir. Bu durum özellikle n'nin küçük değerlerinde açıkça farkedilir!

1.6. *Romberg*'in Orijinal Metodu

Alman matematikçi ve fizikçi ***Werner Romberg*** *"Mathematicians Fleeing from NAZI Germany"* kitabında 58 kişilik göçmen bilim adamları listesinde 26. kişidir. Münih'te matematik fizikçisi ***Arnold Sommerfeld (1868-1951)*** tarafından yetiştirildi. Norveç'e iltica ettikten sonra Nümerik Analizci olarak tanındı ve Nazi Almanyası geçmişine ait bilinen tek anısını 1998'de kitabın yazarı ***Reinhard Siegmund-Schultze***'ye şöyle anlattı:

Resim 1.2. ***Werner Romberg***, *Aralık-1988, Trondheim Üniversitesi/Norveç*. 1978'de 69 yaşındayken emekli oldu. Uzun emekliliğin tadını çıkardı. Aralık 1988'de, yaklaşık 80 yaşında olduğunda, Trondheim Üniversitesi'nde onuruna ***"İnterpolasyon, Ekstrapolasyon, Kuadratür ve Rasyonel Yaklaşıklıklar Hakkında Romberg Semineri"*** düzenlendi.

"SPD ve KPD'nin Naziler'e karşı ortak mücadelesini destekleyen SAP'a yakındım (Bkz. ***"Hitler'in 1932'deki seçim konuşması"***)*. Yaklaşık 10-20 öğrenciydik ve bu yüzden Naziler tarafından tanınıyorduk.* ***Sommerfeld*** *1932'de MÜNİH Üniversitesi'nde bir ödül yarışması organize etti ve katılmamı önerdi. Çözümü sundum ve şu yanıtı aldım: '****Atama tamamen gönderen tarafından yapıldı. Ancak, gereken olgunluğa (geistige Reife: Zihinsel Olgunlaşma) sahip olmayan (yetersiz) gönderici (Werner Romberg), ödül verilemez!****'.* ***Sommerfeld*** *onu doktora (PhD) olarak sunmamı önerdi ve acele etmemi istedi. Bu nedenle 1933'ün yazında '****Yüksek Onur (Magna Cum Laude)****' ile sınavı geçebildim.* ***Sommerfeld*** *SSCB'nden teorik fizikçilerin taleplerini duymuştu ve solcu yanılsamalarımı iyileştirmek için beni tavsiye etti.", Mathematicians Fleeing from NAZI Germany/4. Pretexts, Forms, and the Extent of Emigration and Persecution/4.D. Documents/4.D.5. Political Reasons for Emigration beyond Anti-Semitism, p. 77.*

Devamında Münih'ten SSCB'ye ve oradan da aktarmalı olarak Norveç'e göçmen olması hakkında da şunları söyler:

"1937'de SSCB'deki oturma iznim yenilenmedi, çünkü Alman pasaportum vardı. Polonya hâlâ varolduğundan (yani NAZİ Almanyası tarafından işgal edilmediğinden) beri Prag'taki akrabalarım için Varşova'ya seyahat edebilirdim. Oslo'daki Profesör ***E. A. Hylleraas****'e asistan olarak yanında çalışmayı teklif ettim. Brøgger Komitesi'nden biraz para bulmayı başardım. Böylece Sudetland'ın işgalinden sonra ama Prag'ın işgali öncesinde Oslo'ya uçabildim.", Mathematicians Fleeing from NAZI Germany/6. Alternative (Non-American) Host Countries/6.D. Documents and Problems Pertaining to the Various-Often Temporary-Host Countries outside of the United States/Norway, p. 125.*

Burada NAZİ dönemindeki ***Romberg***'i daha iyi anlayabilmek için yukarıdaki kitaba ek olarak *"Historias de Matemáticas: Nazis y Matemáticas. Crónica de una Barbarie"*, *"World War II: Organized Crime? The Rise of Nazi Germany"*, *"Kavgam"* vb. kitaplarının okunmasını tavsiye ederim. Bunlarla birlikte sitemin girişinde bir sahnesi olan *"Şeytanın Aşkı"* filmini de izlemenizi salık veririm. Çünkü ***Lida Baarová***'nın size anlatacağı anıları var!

Örneğin, ***Lida Baarová***, Berlin'den 9 Kasım 1938'de kaçarken **"Kristallnacht"** yani **"Kırık Camlar Gecesi"**ne tanık olur ve şehirden çıkışı ancak 00:01'de gerçekleşir:

Resim 1.3. *"Şeytan'ın Aşkı"* filminden **"Kristallnacht (Kırık Camlar Gecesi)"** sahnesi. Bayan ***Baarová***, işte orada, otomobilin içinde, gizli aşkı yardımcı yönetmen ***Hans Fischer***'in sağında ve Nazi liderlerinin kışkırttığı kalabalıklar etrafı yağmalarken sanki ***Kazancakis***'in *"Günaha Son Çağrı (The Last Temptation of CHRIST)"* romanındaki tüm kötülükler bir olmuş gibiydi. 9 Kasım 1938'te Berlin'de meydana gelen ve soykırıma giden bu olaya "Kristallnacht" adının verilmesi, dükkanların kırık camlarının ışıkları yansıtırken kristal gibi parlaması nedeniyle olmuştur!

Yani ***Baarová*** Berlin'den tam çıktığı anda (ki o sırada Sudet bölgesi işgal edilmişti) Büyük Önderimiz ***Atatürk***, 8:46 sonra vefat edecekti! Çekoslovakya'daki Prager Ubenzeitung'un *"Cumhurbaşkanı Kemal Atatürk, Türkler'in 'Muzaffer Atası' vefat etti!"* başlıklı bir haber geçildi.

Bir diğer yol kesişmesi şöyle oldu: ***Romberg*** ise bu olaydan 11 gün sonra, 20 Kasım 1938'de arkadaşı ***Hylleraas***'a yardım edebilmek için Brøgger Komitesi'nden aldığı para sayesinde Prag'tan Olso'ya uçar. Yani ***Baarová*** Berlin'den Prag'a kaçarken ***Romberg*** Prag'tan Oslo'ya kaçar. Bu, ***Romberg*** için dönüm noktası olurken ***Baarová*** için ise ölümcül bir hata olur. Çünkü önce Nazi Almanyası, *"Werner Romberg Türkiye'de"* mesajımdaki kapaktan görüldüğü üzere 16 Mart 1939'da Prag'ı işgal eder ve Naziler'den hiçbir destek göremezken, sonra 1945'te vatana ihanetle suçlanır. Komünist yönetim onu hapse atar ve bu sırada annesini ve kız kardeşini kaybeder; babası onu hapisten çıkarabilmek için bir bacağını feda eder. ***Baarová*** ve ailesine ilişkin soruşturmalar sırasında edindiğim izlenimim şu oldu: Komünist yönetim, sanki kendisini Yahudiler işbaşına getirmiş gibi onlara diyet borcunu ödemeye çalışıyor. Ya siz?

"Niebelungen'i oku, Ali. Yoksa dünyanın kaç bucak olduğunu anlayamazsın!"

Şimdi daha yakın bir okuma için ***Sabahattin Ali***'nin, Almanya'da öğrenciyken (1928-1930) ***Hasan İzzettin Dinamo***'ya anlattığı şu anılarına bir bakalım:

DAÜSSILA'dan

Bugün de süzerken Potsdam'ı,
Yaktı yine içimi kimsesizliğin gamı.
Gözlerim inhinasız uzayan caddelerde,
Dedim: Bu soğuk şehir nerde, İstanbul nerde?..
Ve istedim birazcık size dert yanmayı,
Hayalen memlekete doğru bir uzanmayı...

*"Ben Almanya'ya gittiğimde (Kasım sonu-1928) bütün üniversitelerde faşizm kımıltısı başlamıştı. Bütün Alman delikanlılarının alınlarında kendilerinin Töton kanından geldiklerini gösteren anlamsal yazılar görür gibi oluyordum. Niebelungen şarkıları elden ve dilden düşmüyordu. Benim Türk olduğumu bildikleri halde, 'Niebelungen destanını oku Ali, onu okumadıkça dünyanın kaç bucak olduğunu anlayamazsın!, diyorlardı'. Ben de bu bağnaz destanı okur gibi yaparak karıştırdım. Ne var ki okumadığımı çabucak anladılar ve bana gözdağı vermeye başladılar. Okula getirdiğim antifaşist birkaç kitabım yitti. İlkin bir tesadüf sandım, sonra sınıftaki bağnaz Nazi delikanlılarının işi olduğunu anladım. Ne okuduğumu iyice kontrol altına almışlardı. **Heine**'nin şiirleri, **Goethe**'nin Faust'u da yitti. Artık evimden dışarı kitap çıkaramıyordum. '**Schalom Asok**'ın Sintflut adlı ünlü romanını okumayacaksın, yoksa, sen de gizli Yahudilerden misin? diyorlardı'.*

***Dinamo**, Almanya'daki komünist ya da sosyal demokrat arkadaşlarımı düşünüyorum. Bunlar, Spartakistler'in en son kuşaklarıydı. Faşizmle korkunç bir biçimde boğuşuyorlardı. Her gün birinden bir ikisi yitiyordu. Okulumuzun içinde Hitlerciler yuvalanmıştı. Bütün üniversitelerde ve yüksek okullarda bu can alıcı örgütler kurulmuştu; öğrencileri türlü usullerle kışkırtıyorlar, komünist, sosyal demokrat ya da herhangi bir biçimde Naziliğe karşı olanları açığa çıkarıyor, sonra fena halde dövüyor, aşağılıyor, paçavra haline getiriyor, böylece ya okuldan kaçırıyor ya da bir kuytulukta öldürüyorlardı. Bu Nazi yandaşlarının en çok diş biledikleri kişi ben olmuştum. Şundan ki, aşağılanan öğrenciler zamanla hep benim çevremde toplanmışlardı. Türk oluşum, düşmanlarımı durduruyordu. Eğer **Hitler**'in orduları Türkiye'ye girseydi o zaman benim başım da belaya girebilirdi. Şimdi eski müttefik bir memleketin gençlerinden olmam bana biraz olsun dokunulmazlık veriyordu. Çevreme sığınan sosyal demokratlar da zamanla azaldı, hele Yahudiler hiç kalmadı. O zaman tehlikenin benim başımda döndüğünü anladım. Bir gün hasımlarımdan habersiz trene atladığım gibi Türkiye'nin yolunu tuttum, yoksa biraz daha gecikseydim Spartakist olarak ben de yaşamımı yitirebilirdim (Mart ortası-1930).",* *Rasih Nuri İleri: 40'lı Yıllar-2: 1944 TKP DAVASI/TKP Aydınlar ve Anılar, H. İ. Dinamo, TÜSTAV Yayınları, Mayıs 2003*.

İnanır mısınız bu hikâyenin devamı için linkteki kitabı internette, kitap satıcılarında ve artık nerede varsa her yerde aradım ama bulamadım. Ama bu kadarının bile, ***Sabahattin Ali***'nin Nazi Almanyası'nda neler yaşadığını anlatmaya yeterlidir (**Y.N.** YKY'den çıkan *"A'dan Z'ye Sabahattin Ali"* kitabında da bundan fazlasının olduğunu düşünmüyorum. Yukarıdaki belli belirsiz tarihleri bu kitaptan aldım. Yani ***Sabahattin Ali***'nin Almanya'da geçirdiği 1928-1930 yılları karanlıkta kalmış gözükür. Sadece bazı anılar ve tahminler mevcuttur). Ona göre, eğer **"Türk"** olmasaymış başına çok feci olaylar gelecekmiş ve bu, onun kurtuluş bileti olmuş (Bkz. *"Son Osmanlı"*daki Yandım Ali'nin Yavuz zırhlısına atanmasından sonra Alman subayının söylediklerine). Fakat ***Sabahattin Ali***, bu anıları ***Hasan İzzettin Dinamo***'ya çok geç bir zamanda anlatmış, dolayısıyla karıştırmış ya da ***Hasan İzzettin Dinamo***, bu anıları toplarken kronolojiye dikkat etmemiş ve hepsini bir araya getirirken çorba yapmış olabilir ([4]). Çünkü bu konuda bildiğim bir şey varsa o da, Almanlar'ın 1920'lerin sonunda bir düzine sol fraksiyonun önderliğinde hayatlarından oldukça mutlu olduklarıdır. Şu farkla ki: 1929'da tüm dünyayı, özellikle Almanya'yı kasıp kavuran **"Büyük Bunalım"**ı sadece birkaç kişi tahmin edebiliyordu ve ***Hitler*** dipnot iken

---

([4]) Bu konuda biz, *"Treblinka'nın Korkunç İvan'ı"* belgeselinde şunu gördük ki Nazi Almanyası'ndan 45 yıl sonra ***John Demjanjuk***'u mahkemede suçlayan Yahudiler'de ağır bunama ve psikolojik travmalar nedeniyle halüsinasyonlar görüldü. İşte bunu ispatlayan tek kişi, ***Yoram Sheftel*** oldu!

Sheftelları arayıp bulmak ve korumak gerekiyor!

Sheftel, tıpkı ***Hitler***'in I. Dünya Savaşı'ndaki Bölük Komutanı'na ya da Mısır Piramitleri'nde çalışırken tanıdığım Yahudi araştırmacılara benzer. *"Kötülüğün Yükselişi"*nde anlatıldığına göre, Haziran 1918/Belçika'da ***Hitler***'in bölük komutanı, *"Bunu başarırsan Demir Haç'ı hak edeceksin"* der ama ***Hitler*** bu emri yerine getirmesine rağmen Demir Haç'ı alamaz. Çünkü o sırada bu mümkün olamaz.

Bunun üzerine aralarında şöyle bir diyalog geçer:

Hitler: *"Ne de olsa siz bir Yahudisiniz"*

Bölük Komutanı: *"Bununla ne demek istedin?"*

Hitler: *"Sizlere her zaman karşı oldum. Biri onlara karşı güvenebileceğimizi söylediğinde, sizi göstereceğim efendim."*

İşte şimdi İsrail'de topa tutulan ***Sheftel*** böyle birisidir. ***Hitler***'in komutanının yüzüğündeki Davut yıldızının boynundaki kolyesinde olmasına şaşırmamalı. Çünkü Davut yıldızının onlar için anlamı çok büyüktür. Bendeki anlamını ise *"Genelleştirilmiş Napolyon Teoremi"*nde görebilirsiniz. Yani benim yaptığım şey, Napolyon Üçgeni'ne bir eşkenar üçgen ekleyerek 6 köşeli yıldıza (Davut Yıldızı) ya da düzgün 6-gene tamamlamak oldu. Bunun dışında, İmparator için araştırmamı derinleştirdiğim zaman, takım üçgenlerinin ağırlık merkezlerinin doğrusal yani aynı doğru üzerinde olduğunu ve eşit aralıklarla sıralandığını keşfetmiştim. Şimdi bu araştırmamı tam 15 yıl önceki haliyle *"Ben de oradadaydım!"* sayfasında görebilirsiniz. Bana göre bu çalışmaların yeri ***Gaspard Monge***'un 1799 basımlı (yani ***Napolyon*** ile birlikte çıktığı 1798'deki Mısır Seferi anısına basılmıştır. Bunu kitabın kapağındaki **"Prix Du Lycée Napoléon (Napolyon Lisesi Ödülleri)"** ve basım tarihi olarak **"AN VII (Cumhuriyet'in 7. Yılı)"**ndan açıkça görebilirsiniz) *"Tasarı Geometrisi (Géométrie Descriptive)"*dir ki işin tarihçesini bilenler bunun böyle olduğunu derhal anlayacaktır ya da siz, buna ***Monge***'un eksik kalan çalışması gözüyle bakabilirsiniz ki Büyük Piramit'e ilk gittiğimde (***Monge***'dan 206 yıl (1798-2004) sonra) yaptığım şey, bu eksik çalışmayı tamamlamak oldu!

***Napolyon*'un Mısır Seferi**

Bilindiği üzere ***Napolyon***, 1798'de Mısır Seferi'ne çıkarken hem 50,000 kişilik ordusuyla Askeri Sefere hem de ansiklopedik görev üstlenecek 150 kişilik bilim adamlarıyla Bilimsel Sefere çıkıyordu. Bunların içinde ***Napolyon***, ***Costaz***, ***Fourier***, ***Malus*** ve ***Monge*** vd.'den oluşan 12 üye matematikçi vardı (Bkz. *"Institut d'Égypte"*). Yani ***Napolyon*** hem ordunun hem de matematikçilerin başıydı. ***Monge*** sefer boyunca ***Napolyon***'un adeta gölgesi gibiydi, ama ***Napolyon***'un da matematikte en çok ihtiyaç duyduğu kişi o idi. Yani ***Napolyon*** nereye gitse ***Monge*** da oradaydı. Şimdi bu sağaltıcı ilişkiyi anlamanız mümkün olmayabilir ama, o sırada ***Napolyon***'un bir General olduğuna dikkat eder ve kazandığı zaferlerin çok kişinin başını döndürdüğünü düşünürseniz, belki bu sağaltıcı ilişkiyi anlayabilirsiniz. Yani ***Monge*** adeta büyülenmiş şekilde ***Napolyon***'u takip ediyordu. Benim çarpıldığım an, *"13 Vendémiaire"* olayında oldu. Cumhuriyet takvimine göre 4. yılın Vendémiaire ayının 13'ünde ama miladi takvime göre 5 Ekim 1795'te meydana gelen savaşta, 25,000 kişilik Fransız Kraliyet Kuvveti ***Napolyon***'un akıllı stratejisi karşısında 5'te 1 oranındaki Fransız Cumhuriyet Kuvveti karşısında tamamen dağıldı. Paris sokakları bütün gece ***Napolyon***'un topçularının sesleriyle inledi ve bir daha böyle bir olaya tanık olmadı. Yani bugünkü Sarı Yelekliler'in protestosu bunun yanında sinek vızıltısı gibi kalır!

bir gecede kahraman oldu. Ama ***Hitler***'in Almanya'nın üzerine çökmesi, 30 Ocak 1933'te Başbakan olmasıyla başlar (Bkz. "*Ciddiye alınmıyordu: **Hitler** 1933'te iktidara nasıl geldi?*"). İşte bundan önce ***Hitler***'in, dolayısıyla Naziler'in esamesi okunmaz! Ayrıca yukarıdaki alıntıda altını çizdiğim yer son derece dikkat çekicidir: "Hitler'in Orduları" ifadesine göre ya ***Sabahattin Ali*** bir avuç kabadayı olan SA'dan çok korkmuş (bkz. "1920'ler Almanyası", 5:57-6:10), dolayısıyla abartmış ya da ***Sabahattin Ali***'nin Almanya'daki anıları toplanırken heyecan katsın diye bir abartmada bulunulmuştur (Bkz. "*Sabahattin Ali neden öldürüldü?*").

Şimdi, ***Romberg***'in orijinal makalesini internette boşuna aramayın; çünkü bulamazsınız. Orijinale en yakın makale, ***Byrnjulf Owren***'in "*Werner Romberg: Vereinfachte numerische Integration*" makalesidir. Ama bunda da sadece özetin özeti geçilmiştir (ki biz, buna ***"Tanıtım Makalesi"*** diyelim). Bu makaledeki detayları "*History of Algorithms from Pebble to the Microchip by Jean Luc Chabert*" kitabının 451-453. sayfalarında görebilirsiniz ve daha uzak bir okuma için ***J. Dutka***'nın "*Richardson Extrapolation and Romberg Integration, Historia Mathematica, 11 (1984), 3-21*" kitabına bakabilirsiniz.

Şu halde ***Romberg***'in orijinal metodunu kimse anlatmadığına göre, yukarıdaki çalışmama göre ben anlatayım: ***Romberg***'in, Tröndheim'dayken 14 Şubat 1955'te verdiği metot aslında ilk kez ***Euler*** tarafından ortaya atılan ama farkedilemeyen (bkz. "*How Euler did it?*", Sayfa 7-8) ve 1997'de de ***Fabrice Bellard***'ın bir formül keşfetmesiyle iyice anlaşılan BBP Serileri'ne benzer (ki bunun nedeni, ***Romberg***'in metodundaki algoritmaların eski yani ilkel olmasıdır). Şöyle ki ***Jean Luc Chabert***'in "*History of Algorithms from Pebble to the Microchip by Jean Luc Chabert*" kitabının 451-453. sayfalarında verilenlere göre, $a \le x \le b$ aralığını 8n'ye bölersek $h = \frac{b-a}{8n}$ farkına göre $k = 1,2,\cdots,8n-1$ için $f(a+kh)$ fonksiyonuyla şekildeki yamuğun alanı,

$$(1.20)\quad T_1 = 8h\sum_{m=0}^{n-1} f_{8m} = 8hn\frac{\sum_{m=0}^{n-1} f_{8m}}{n} = (b-a)\overline{\sum_{m=0}^{n-1} f_{8m}}$$

olur. Burada üstü çizgiyle gösterilen toplam, aritmetik ortalamadır ve aralığın uzunluğu, 8h'dir.

Şimdi herbir aralığı ikiye bölersek yeni bölme noktalarından geçen yamukların alanlarının toplamı,

$$(1.21)\quad U_1 = 8h\sum_{m=0}^{n-1} f_{8m+4} = 8hn\frac{\sum_{m=0}^{n-1} f_{8m+4}}{n} = (b-a)\overline{\sum_{m=0}^{n-1} f_{8m+4}}$$

olur.

Yeniden ikiye bölersek:

$$(1.22)\quad U_2 = 8h\sum_{m=0}^{n-1}(f_{8m+2}+f_{8m+6}) = 8hn\frac{\sum_{m=0}^{n-1}(f_{8m+2}+f_{8m+6})}{n} = (b-a)\overline{\sum_{m=0}^{n-1}(f_{8m+2}+f_{8m+6})}$$

ve sonunda

$$(1.23)\quad U_4 = 8h\sum_{m=0}^{n-1}(f_{8m+1}+f_{8m+3}+f_{8m+5}+f_{8m+7}) = 8hn\frac{\sum_{m=0}^{n-1}(f_{8m+1}+f_{8m+3}+f_{8m+5}+f_{8m+7})}{n} = (b-a)\overline{\sum_{m=0}^{n-1}(f_{8m+1}+f_{8m+3}+f_{8m+5}+f_{8m+7})}.$$

Buna göre alt aralıkların uzunlukları 4h, 2h ve h olmak üzere

$$(1.24)\quad T_2 = \overline{T_1+U_1}, T_4 = \overline{T_2+U_2}, T_8 = \overline{T_4+U_4}$$

yaklaşıklıkları elde edilir.

Romberg, bu yaklaşıklıkları $i = 1,2,4$ için

$$(1.25)\quad \begin{cases} S_{2i} = T_{2i} + \dfrac{T_{2i}-T_i}{2^2-1}, \\ V_{2i} = U_{2i} + \dfrac{U_{2i}-U_i}{2^2-1} \end{cases}$$

ve bunları da $j = 2,4$ için

$$(1.26)\quad \begin{cases} R_{2j} = S_{2j} + \dfrac{S_{2j}-S_j}{2^4-1}, \\ W_{2j} = V_{2i} + \dfrac{V_{2i}-V_i}{2^4-1} \end{cases}$$

ve son olarak bunları da $k = 4$ için

$$(1.27)\quad \begin{cases} Q_8 = R_8 + \dfrac{R_8-R_4}{2^6-1}, \\ X_8 = W_8 + \dfrac{W_8-W_4}{2^6-1} \end{cases}$$

iterasyonlarında kullanır. Bunlar tıpkı ***Huygens***'i takip eden ***Jacques Frederic Saigey***'in 1856 ve 1859'da verdiği algoritmalardaki gibidir (Bkz. (2.1)'e).

Romberg bundan sonra hiçbir şey söylemez! Ama pekâlâ ***Romberg***'in bıraktığı yerden,

$$(1.28)\quad Y_8 = \frac{Q_8 + X_8}{2}$$

aritmetik ortalama ile

$$(1.29)\quad Z_8 = \frac{Q_8 + 2X_8}{2}$$

Snellius algoritmasını verebilirim. Bunlar ***Romberg***'in tablosu, dolayısıyla Richardson ekstrapolasyonu için başat uygulamalardır (Bkz. 2.1.1'e).

1.6.1. Romberg Metodu'nun Deşifrasyonu

Hemen bir özet (abstract) geçmem gerekirse ***Romberg***'in orijinal metodu şu idi: ***Romberg***, 14 Şubat 1955'te (1.20)'deki ilk T_1 trapez yaklaşıklılığı ve (1.21)-(1.23)'teki U_1, U_2, U_4 orta nokta yaklaşıklıklarını (1.24)'teki aritmetik ortalamaya tabii tutarak T_2, T_4, T_8 trapez yaklaşıklıklarını buluyor ve bunları (1.25)-(1.27)'deki ekstrapolasyonla hızlandırıyordu!

Kabul etmek gerekir ki bu metot günümüzde çok ilkel kalmakta, dolayısıyla kullanımdan kalkmış durumdadır. Ama ***Romberg***'in düşüncesinin 1. sınıf olduğu açıktır! Çünkü bu düşünceyi anlayabilmeniz için **"geistige Reife: Zihinsel Olgunlaşma"**ya sahip olmanız gerekir. Bu, ***Romberg***'in 1932'de Münih Üniversitesi'nin açmış olduğu ödül yarışmasında aldığı yanıttır. Yani ***Romberg*** kibarca reddedilmiştir. Ama Başkan ***Sommerfeld*** bir ışık görmüş olmalı ki ***Romberg***'ten aynı çalışmayı doktora (PHD) olarak değerlendirmesini ve bunun için acele etmesini ister. ***Romberg Sommerfeld***'in nasihatını dinler ve 26.07.1933'te "*Kanal Işınlarının Kutuplaşması Hakkında (Zur Polarisation des Kanalstrahllichtes)*" çalışmasını doktora tezi olarak sunar ([5]).

Şu halde ***Romberg***'in (1.20)-(1.24)'teki yaklaşıklıkları solda (siyah renkli olanlar) ve (1.11)'deki yaklaşıklıklarımız sağda (kırmızı renkli olanlar) olmak üzere bu yaklaşıklıkları taraf tarafa toplarsak,

$$(1.30)\quad \begin{cases} f_0 = T_1 = K_0 \Rightarrow f_0 = K_0 \\ f_4 = U_1 = T_0 \Rightarrow f_4 = T_0 \\ \dfrac{f_2 + f_6}{2} = U_2 = T_1 \Rightarrow f_2 + f_6 = 2T_1 \\ \dfrac{f_1 + f_3 + f_5 + f_7}{4} = U_4 = T_2 \Rightarrow f_1 + f_3 + f_5 + f_7 = 4T_2 \\ \hline \displaystyle\sum_{m=0}^{7} f_m = \underbrace{K_0 + T_0}_{=2K_1} + 2T_1 + 4T_2 = \underbrace{2K_1 + 2T_1}_{=4K_2} + 4T_2 = 4K_2 + 4T_2 = 8K_3 \end{cases}$$

sonuçlarına göre

$$(1.31)\quad \begin{cases} T_1 = \dfrac{1}{1}\displaystyle\sum_{m=0}^{0} f_{8m} = f_0 = K_0, & U_1 = \dfrac{1}{1}\displaystyle\sum_{m=0}^{0} f_{8m+4} = f_4 = T_0, \\ T_2 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{m=0}^{1} f_{4m} = K_1, & U_2 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{m=0}^{1} f_{4m+2} = T_1, \\ T_4 = \dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{m=0}^{3} f_{2m} = K_2, & U_4 = \dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{m=0}^{3} f_{2m+1} = T_2, \\ T_8 = \dfrac{1}{8}\displaystyle\sum_{m=0}^{7} f_{m} = K_3, & U_8 = \dfrac{1}{8}\displaystyle\sum_{m=0}^{7} f_{m+\frac{1}{2}} = T_3 \end{cases}$$

ya da kısaca, $i = 1,2,3,4$ için

$$(1.32)\quad T_{2^{i-1}} = K_{i-1}, U_{2^{i-1}} = T_{i-1}$$

bağıntılarının geçerli olduklarını görürüz.

Bu durumda (1.24)'e göre (1.19)'u gerçekleyen

$$(1.33)\quad T_{2^i} = \overline{T_{2^{i-1}} + U_{2^{i-1}}} = \frac{T_{2^{i-1}} + U_{2^{i-1}}}{2}$$

aritmetik ortalaması mevcut olur. Yani (1.25)-(1.29) bağıntıları açık hale gelir!

İspat. Şimdi (1.31)'deki yaklaşıklıkları genel olarak $n = 1,2,4,8$ için

$$(1.34)\quad T_n = \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} f_{\frac{8}{n}m} \left(= \overline{\sum_{m=0}^{n-1} f_{\frac{8}{n}m}} \right), U_n = \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} f_{\frac{8}{n}m+\frac{4}{n}} \left(= \overline{\sum_{m=0}^{n-1} f_{\frac{8}{n}m+\frac{4}{n}}} \right)$$

formülleriyle verebiliriz.

([5]) Bu tez hakkında bilgi almak için "*Chemisches Zentralblatt, Band I, Nr. 4, 24.01.1934*"teki S. 507'ye (ki PDF'de 15. Sayfa) ve "*Degradierte Doktoren: die Aberkennung der Doktorwürde an der Ludwig-Maximilians-Universität München während der Zeit des Nationalsozialismus*"a bakarken, sunulduğu yer için "*Ludwig-Maximilians Münih Üniversitesi-1933*"e bakabilirsiniz.

Burada **Romberg**'in (1.55)'teki örneğine göre $h=\frac{b-a}{8}=\frac{1-0}{8}=\frac{1}{8}$ farkı ve $p=\frac{8}{n}$ dersek,

$$(1.35)\quad ph=\frac{8}{n}.\frac{b-a}{8}=\frac{8}{n}.\frac{1}{8}=\frac{1}{n}$$

dönüşümüne göre (1.34) formülleri

$$(1.36)\quad \begin{cases} T_{\frac{8}{p}}=ph\sum_{m=0}^{\frac{8}{p}-1} f_{pm}\,, \\ U_{\frac{8}{p}}=ph\sum_{m=0}^{\frac{8}{p}-1} f_{p\left(m+\frac{1}{2}\right)} \end{cases}$$

şekline girer.

Bunlara eğer $i=0,1,2,3$ için

$$(1.37)\quad p=2^i$$

şeklinde bir ikinci dönüşüm yaparsak,

$$(1.38)\quad ph=2^i.\frac{b-a}{8}=\frac{b-a}{2^{3-i}}=h_{3-i}$$

farkına göre (1.36)'daki formülleri

$$(1.39)\quad \begin{cases} T_{2^{3-i}}=h_{3-i}\sum_{m=0}^{2^{3-i}-1} f_{2^i m}\,, \\ U_{2^{3-i}}=h_{3-i}\sum_{m=0}^{2^{3-i}-1} f_{2^i\left(m+\frac{1}{2}\right)} \end{cases}$$

şekline getirmiş oluruz.

İşte bu formüllerde son olarak $j=0,1,2,3$ için

$$(1.40)\quad i=3-j$$

dönüşümünü gözönüne alırsak (1.39)'dan şu formüllere ulaşmış oluruz:

$$(1.41)\quad \begin{cases} T_{2^j}=h_j\sum_{m=0}^{2^j-1} f_{2^{3-j}m}\,, \\ U_{2^j}=h_j\sum_{m=0}^{2^j-1} f_{2^{3-j}\left(m+\frac{1}{2}\right)}\,. \end{cases}$$

Burada toplam içlerindeki fonksiyonlar $f_k=f(a+kh)$ tanımına göre

$$(1.42)\quad \begin{cases} f_{2^{3-j}m}=f(a+2^{3-j}mh)=f\left(a+2^{3-j}m.\frac{1}{8}\right)=f\left(a+2^{3-j}m.\frac{b-a}{8}\right)=f\left(a+m.\frac{b-a}{2^j}\right)=f(a+mh_j)=f_m, \\ f_{2^{3-j}\left(m+\frac{1}{2}\right)}=f\left(a+2^{3-j}\left(m+\frac{1}{2}\right)h\right)=f\left(a+2^{3-j}\left(m+\frac{1}{2}\right).\frac{1}{8}\right)=f\left(a+2^{3-j}\left(m+\frac{1}{2}\right).\frac{b-a}{8}\right)=f\left(a+\left(m+\frac{1}{2}\right).\frac{b-a}{2^j}\right)=f\left(a+\left(m+\frac{1}{2}\right)h_j\right)=f_{m+\frac{1}{2}} \end{cases}$$

olduklarından (1.41)'den

$$(1.43)\quad T_{2^j}=h_j\sum_{m=0}^{2^j-1} f_m\,,\ U_{2^j}=h_j\sum_{m=0}^{2^j-1} f_{m+\frac{1}{2}}$$

formüllerini bulmuş oluruz!

İşte bu son formüller **Romberg**'in 1960'larda görev yaptığı NTNU'daki (ki o sırada NTH idi) 1994'ten beri Matematik Bölümü'nde görev yapan ***Prof. Byrnjulf Owren*** tarafından "*Werner Romberg: Vereinfachte numerische Integration*" makalesinde şu şekilde verilmiştir: ***Owren***'in bildirdiğine göre ***Romberg***, 14 Şubat 1955'te Tröndheim'dayken $h=\frac{b-a}{n}$ ve $f_0=\frac{f(a)+f(b)}{2}$ başlangıç değeri ve $0<k$ için

$$(1.44)\quad T_n=h.\sum_{k=0}^{n-1} f_k\,,\ f_k=f(a+kh),\ U_n=h.\sum_{k=0}^{n-1} f_{k+\frac{1}{2}}\,,\ f_{k+\frac{1}{2}}=f\left(a+\left(k+\frac{1}{2}\right)h\right)$$

bağıntılarından hareketle

$$(1.45)\quad T_{2n} = \frac{T_n + U_n}{2}$$

sonucunu verdi!

Fakat bu tam olarak böyle değil, yani yukarıda bildirdiğim şekilde ***Romberg***'in formüllerinin ispatının sonucunda bu formüllere ulaşılmaktadır.

Şimdi son olarak (1.43)'teki 2. formülden orta nokta formülü için

$$(1.46)\quad U_{2^j} = h_j \sum_{m=0}^{2^j-1} f_{m+\frac{1}{2}} = h_j \sum_{m=0}^{2^j-1} f\left(a+\left(m+\frac{1}{2}\right)h_j\right) = h_j \sum_{m=1}^{2^j} f\left(a+\left(m-1+\frac{1}{2}\right)h_j\right) = h_j \sum_{m=1}^{2^j} f\left(a+(2m-1)h_{j+1}\right) = T_j$$

çakışması gerçekleşirken bunu (1.45)'teki aritmetik ortalamada yerine koyarsak,

$$(1.47)\quad T_{2^{j+1}} = \frac{T_{2^j}+U_{2^j}}{2} = \frac{T_{2^j}}{2}+\frac{U_{2^j}}{2} = \frac{T_{2^j}}{2}+\frac{1}{2}.h_j \sum_{m=1}^{2^j} f\left(a+(2m-1)h_{j+1}\right) = \frac{T_{2^j}}{2}+h_{j+1}\sum_{m=1}^{2^j} f\left(a+(2m-1)h_{j+1}\right) = K_{j+1}$$

şeklinde trapez formülleri çakışır. Yani (1.44)'teki formüller (1.11)'dekilerle çakışmış ve böylece (1.32)'de iddia ettiğimiz eşitlikler gerçekleşmiş oldu!

***Fujino*'nun Röportajından Bir Kesit**

Seiji Fujino (Hiroşima Üniversitesi, Bilgi Mühendisliği Bölümü), ***Romberg*** ile röportaj yapmasına neden olan 1996'nın Haziran ayında Nagoya Üniversitesi profesörlerinden ***Mitsui Enomito***'dan şu e-postayı alır: *"Norveç'in Tröndheim şehrinde yaşayan bir tanıdığımdan gelen e-postaya göre, Romberg İntegrali'ni bulan **W. Romberg** şu anda Almanya'nın Heidelberg şehrindeymiş ve onun meşhur tezinin Tröndheim dergisinde yayınlanmasının sebebi Alman Sosyal Demokrat Partisi'ne üye olduğu için Nazi Almanyası döneminde Norveç'e kaçmasıymış."*

İşte ***Fujino*** bu e-postayı okur okumaz soluğu hemen Heidelberg'de alır ve başlar ***Romberg*** ile röportaj yapmaya. ***Fujino*** 17 Ağustos 1996'da ***Romberg*** ile röportaj yaparken profesörün kişiliğine, geçmişine, anı ve fotoğraflarına odaklanır. ***Fujino***'nun bildirdiğine göre 87 yaşında olmasına rağmen ***Romberg***'in eli ayağı tutuyormuş ve bende saklı olan bu röportajda ***Romberg***'in ***Fujino*** ile harika bir sohbet çıkardığını; ***Fujino***'nun, aklına ne gelirse sorduğunu ve ***Romberg***'in de bunlara seve seve yanıt verdiğini görüyorum. Örneğin, ***Fujino***'nun en çok merek ettiği konu, ***Romberg***'in, adıyla anılan metodu nasıl bulduğuna ilişkindir. ***Romberg*** bu soruya bile hiç kaçamak yapmadan olduğu gibi anlatıyor. Fakat metodunun deşifresi, daha doğrusu modern şeklini ***Romberg*** hiçbir zaman anlatmadı. Onu geçmişin anısına ben, yukarıda anlattım ve en açık şekliyle gösterdim. Aslında ***Fujino*** bunu da ***Romberg***'e sorsaymış daha iyi olurmuş. Çünkü ***Romberg***'in metodu günümüzde çok ilkel kalmakta ve bu yüzden anlaşılması güç hale gelmiştir. Yani metodu ***Romberg***'in ölümünden 16 yıl sonra anlatmak bana kısmet oldu!

1.6.2. Notasyon Sorunu. Burada biraz durup düşünmek gerekiyor. Çünkü ***Romberg***, yukarıda görüldüğü üzere, trapez yaklaşıklıklarını ve bunların toplandığı (1.44)'teki ilk formülde T'yi **"Trapez"** kelimesinin baş harfi olarak alarak T_n'yi yazdıktan sonra, alfabetik sıraya göre ondan sonra gelen U_n'yi yazmıştır ve bu da ***Romberg***'in orta noktalardan elde ettiği yaklaşıklıklarda, yani (1.44)'teki ikinci formülde kullanılmıştır (ki (1.45)'teki aritmetik ortalamada her ikisi de kullanılmıştır). Yani ***Romberg***'in Şekil 1.1'de geometrik anlam ifade eden notasyonumuzdaki kirişler (f(x)'in sekant doğrusu) için K_n'yi ve teğetler (f(x)'in tanjant doğrusu) için T_n'yi gösteren bir anlayış içinde olmadığını tespit ettim. Kaldı ki bu çalışmaya ilk çalışmaya başladığım zaman ben de ***Romberg*** gibi T_n'yi A_n ile ve K_n'yi B_n ile gösteriyor ve bunlarla konveks f(x) eğrisi üzerinde çalışıyordum (Bkz. "*Romberg İntegrali Kronolojim 1*"). Ama sonra T_n'nin invaryant özelliği ve metodun en etkili kullanım şekli aklıma gelince derhal bu alfabetik notasyon yazımından vazgeçtim ve şekilde doğru parçaları f(x) eğrisi için ne anlam ifade ediyorsa ona göre çalışmaya başladım. Çünkü f(x) ne olursa olsun (ister konveks olsun ister konkav olsun) bu şekilde çalışmak daha kolaydır. Yani f(x) konkav (veya konkav olduğu yerleri varsa) (1.12) ya da konveks (veya konveks olduğu yerleri varsa) (1.18)'deki eşitsizlikler geçerli olacaktır ama (1.11) değişmeyecektir. İşte bu yüzden A_n ve B_n yerine T_n ve K_n'yi yazdım!

Şimdi trapez yaklaşıklıkları için günümüzde kullanılan (1.11)'deki ikinci formülden ya da (1.47)'deki trapez formülünden farklı yeni bir formül tanımlayacağım. İlginç olan şu ki, bu projeye başladığımdan beri Bilgisayar programlarında trapez için herkesin kullandığı bu trapez formülü yerine hep aşağıdaki (1.50) formülünü kullandım!

1.6.3. K_n'nin K_0'a İndirgenmesi. Şimdi az önce sözüne ettiğim yeni tanım nedeniyle K_n'nin K_0'a indirgenmesini adım adım yapalım. İlkin $n = 1$ alırsak (1.11)'deki trapez formülünden $h_1 = \frac{h_0}{2}$ için triviyal (apaçık) olarak,

$$(1.48)\quad K_1 = \frac{K_0}{2} + h_1 \sum_{k=1}^{2^{1-1}} f\left(a+(2k-1)h_1\right) = \frac{K_0}{2} + h_1 f(a+h_1) = \frac{K_0}{2} + \frac{h_0}{2} f(a+h_1) = \frac{K_0}{2} + \frac{T_0}{2} = \frac{K_0+T_0}{2}$$

eşitliğini elde ederiz. Yani $n = 0$ için (1.19)'daki aritmetik ortalama geçerli olur.

İkinci olarak $n = 2$ için (1.11)'den,

$$K_2 = \frac{K_1}{2} + h_2 \sum_{k=1}^{2} f\left(a+(2k-1)h_2\right) = \frac{K_1}{2} + h_2\big(f(a+h_2)+f(a+3h_2)\big)$$

ve burada (1.9)'dan K_1'i yerine koyarsak,

$$K_2 = \frac{K_1}{2} + h_2\big(f(a+h_2)+f(a+3h_2)\big) = \frac{\frac{K_0}{2}+h_1 f(a+h_1)}{2} + h_2\big(f(a+h_2)+f(a+3h_2)\big) = \frac{K_0}{2^2} + \frac{h_1}{2} f(a+h_1) + h_2\big(f(a+h_2)+f(a+3h_2)\big)$$

$$= \frac{K_0}{2^2} + h_2 f(a+2h_2) + h_2\big(f(a+h_2)+f(a+3h_2)\big) = \frac{K_0}{2^2} + h_2\big(f(a+h_2)+f(a+2h_2)+f(a+3h_2)\big) = \frac{K_0}{2^2} + h_2\sum_{k=1}^{3} f(a+kh_2) = \frac{K_0}{2^2} + h_2\sum_{k=1}^{2^2-1} f(a+kh_2)$$

eşitliklerinden

$$(1.49)\quad K_2=\frac{K_0}{2^2}+h_2\sum_{k=1}^{2^2-1} f(a+kh_2)$$

sonucunu elde eder ve işleme bu şekilde devam ettiğimiz takdirde de MEM gereğince K_n'nin K_0'a göre genel olarak şu şekilde indirgendiğini görürüz:

$$(1.50)\quad K_n=\frac{K_0}{2^n}+h_n\sum_{k=1}^{2^n-1} f(a+kh_n).$$

Şimdi de T_n'yi adım adım T_0'a indirgemek istersek, (1.4) ve (1.10)'a göre,

$$T_1+\frac{T_0}{2}=h_1\big(f(a+h_2)+f(a+3h_2)\big)+\frac{h_0 f(a+h_1)}{2}=h_1\big(f(a+h_2)+f(a+3h_2)\big)+h_1 f(a+2h_2)=h_1\sum_{k=1}^{2^2-1} f(a+kh_2)$$

eşitliklerinden

$$(1.51)\quad \sum_{k=1}^{2}\frac{T_{2-k}}{2^k}=h_2\sum_{k=1}^{2^2-1} f(a+kh_2)$$

sonucunu elde etmiş oluruz ki MEM gereğince genel olarak,

$$(1.52)\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{T_{n-k}}{2^k}=h_n\sum_{k=1}^{2^n-1} f(a+kh_n)$$

eşitliğini elde ederiz!

Şu halde (1.52)'yi (1.50)'de yerine koyarsak,

$$(1.53)\quad K_n=\frac{K_0}{2^n}+\sum_{k=1}^{n}\frac{T_{n-k}}{2^k}$$

şeklindeki genel indirgeme bağıntısını elde ederiz!

Sözkonusu bu son bağıntı doğrudan (1.19)'dan da elde edilebilir. Neden?

Çünkü (1.19)'dan

$$(1.54)\quad \begin{cases} K_n=\dfrac{K_{n-1}+T_{n-1}}{2}=\dfrac{\dfrac{K_{n-2}+T_{n-2}}{2}+T_{n-1}}{2}=\dfrac{K_{n-2}}{2^2}+\dfrac{T_{n-2}}{2^2}+\dfrac{T_{n-1}}{2}=\dfrac{K_{n-2}}{2^2}+\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\frac{T_{n-k}}{2^k}, \\ =\dfrac{\dfrac{K_{n-3}+T_{n-3}}{2}}{2^2}+\dfrac{T_{n-2}}{2^2}+\dfrac{T_{n-1}}{2}=\dfrac{K_{n-3}}{2^3}+\dfrac{T_{n-3}}{2^3}+\dfrac{T_{n-2}}{2^2}+\dfrac{T_{n-1}}{2}=\dfrac{K_{n-3}}{2^3}+\displaystyle\sum_{k=1}^{3}\frac{T_{n-k}}{2^k}, \\ \vdots \\ =\dfrac{K_{n-n}}{2^n}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{T_{n-k}}{2^k}=\dfrac{K_0}{2^n}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{T_{n-k}}{2^k} \end{cases}$$

şeklinde yine (1.53)'ü elde ederiz!

NAZi Zaman Kapsülü Bulundu!

Ben tam 18.11.2016'nın ilk saatlerinde yatacakken YAHOO'da ne haberler var diye bir bakayım dedim. Orada "*Explorers Discovered A Nazi Time Capsule, But What Missing From It?*" ilk haber olarak geçiyordu ve ne olduğunu merak ettim. Hemen linke tıkladım ve siteme koyduğum "*Nazi Zaman Kapsülü bulundu!*" genişçe haberinden de görüldüğü üzere 1934 tarihli zaman kapsülünden ***Hitler***'in 2 ciltlik orijinal ***"Mein Kampf (Kavgam)"*** kitabını görünce şöyle demiştim: "*Vaaay, hem çift kitap, hem de orijinal*". Bunu o sırada ***Romberg***'in algoritmasının çifte sınırlı olmasına yormuştum (ki günümüzde bu kullanılmaz). Burada orijinallik çok önemlidir. Çünkü ***Romberg***'in algoritması öyle her yerde yayınlanmaz; onu Norveççe yazan tarihi bir makaleden ([6]) aldım (Bkz. "*Werner Romberg: Vereinfachte numerische Integration*"). Yani ***Romberg***'in algoritmasının çift sınırlı olduğunu görmüştüm. Eğer ***Owren***'in makalesi elimde olmasaydı, ben de bu gerçeği göremeyecektim. ***Romberg*** ile çakışmamızı ([7]) ve 1.6.3'ü akşam eve gelince çözdüm!

([6]) ***Werner Romberg*** 1938'te Oslo'daki arkadaşı ***Hylleraas***'ın asistanı olarak çalışmak için Prag'a kaçmasına rağmen gerekli izinlere sahip değildir. Bu yüzden 20 Kasım 1938'de de Prag'tan Oslo'ya uçar. Bunun bir diğer ama en önemli nedeni, ***Hitler***'in Prag ile birlikte tüm Çekoslovakya'yı 15 Mart 1939'da işgal etmiş olmasıdır. ***Romberg*** herhalde bu işgalin olacağını daha önceden öngörüyordu (Bkz. "*Hitler ve Göring PRAG'ta*"). ***Romberg*** 1949'da Tröndheim'daki Norveç Teknoloji Enstitüsü'ne katılır ve hayatının büyük bölümünü burada geçirir. İşte Norveçliler, ***Romberg***'e bu yüzden ilgi gösterirler!

([7]) Burada 1.6.1'i kitabımdakine yakın tuttum. Yani orijinalde dolaylı ispat vardı (bkz. "*Romberg İntegrali Kronolojim 1*" ve "*Romberg İntegrali Kronolojim 2*"deki 1.4'e) ve ben de burada ***Romberg***'in ne yaptığını herkesin görmesi için dolaylı ispat vermek yerine doğrudan ispatla "*Bizi Hatırla*" filmindeki gibi hem ***Romberg***'i andım, hem de onun çalışmasını size en açık

1.6.4. *Romberg*'in Orijinal Makalesinin Peşinde!

Yukarıda gördüğünüz gibi ***Romberg***'deki trapez metodunu ilk kez bu makalede deşifre ettim (Bkz. 1.6.1). Ama orijinal makaleyi bulana kadar da bundan emin değildim. Yani ben, sadece ***Byrnjulf Owren***'in "*Werner Romberg: Vereinfachte numerische Integration*" makalesine ve ***Jean Luc Chabert***'in "*History of Algorithms from Pebble to the Microchip by Jean Luc Chabert/14.6 Romberg's Integration Method S. 451-453*" kitabına göre bu deşifrasyonu çıkartmıştım, o kadar. İşte bu yüzden ***Romberg***'in metodunu burada deşifre ettiğime göre orijinal makaleye ihtiyacım yoktu. Ancak yine de kafalarda herhangi bir kuşku kalmasın diye ***Romberg***'in orijinal makalesini her yerde harıl harıl aradım!

Araştırmalarıma göre ***Romberg***'in orijinal makalesi "*Det Kongelige Norske Videnskabers Selskab (The Royal Norwegian Society of Sciences: Norveç Kraliyet Bilim Derneği)*"nde yoktu. Orada sadece ***Brynjulf Owren***'in "*Werner Romberg: Vereinfachte numerische Integration; DKNVS Forhandlinger 1955*" adlı makalesi vardı (**Y.N. *DKNVS***, Norveç Kralı ***Harald V*** tarafından 1760'ta Trondheim'da kurulmuş olup kâr amacı gütmeyen bir kuruluştur). Onların ellerinde kalan eski dergiler 1774-1920 yıllarına ait olup sınırlı sayıdadır. Yani bunlar sıralı değil, yalnızca ellerinde kalanlardır. Eski sayıların başta amazon olmak üzere pek çok yerde ticareti yapılıyor. Oralara da baktım ve 1955 sayısını bulamadım (ki olsa paraya kıyardım). İnanır mısınız ***Romberg***'in orijinal makalesi için bakmadığım yer kalmadı ve sonunda şu muhtemel sonuçlara ulaştım:

1. NTNU'da,
2. Heidelberg Üniversitesi Kütüphanesi'nin 495101141 no'lu kataloğunda,
3. ResearchGate'teki "*Vereinfachte numerische Integration*" adlı dosyasında.

Bunlardan ilkindeki mevcut durumu yukarıda açıkladım ve üçüncüsüne ancak **"Not a researcher"** ile üye olup 2 kez e-posta göndermeme rağmen dosyayı elinde tutan kişi bana geri dönüş yapmadı (**Y.N.** Onların elinde böyle bir dosya yoktu. Çünkü ben 3. maddede geçen dosyayı istediğimde, bana o dosyayla ilgisi olmayan bir başka kaynak önerildi. Bkz. 30.05.2017). İkincisinde ise üçüncüsündeki gibi kütüphaneye bağlı bir üniversiteye öğrenci olmanız ya da ilişkili olmanızı şart koşuyordu ve DigiKat'tan yaptığım araştırmaya göre bu makalenin kartını göremedim. Yani bu makale orada dijital olarak değil, fiziksel olarak mevcut idi (Bkz. 17.12.2018. Bu e-postada kütüphaneye gelmem ve ***Romberg***'in makalesini orada araştırmam isteniyor. Eğer Almanya'da değilsem bu makaleyi uluslararası bir kütüphaneden de araştırabileceğimi ama bu işlemin pahalı olduğu söyleniyor. Son paragrafta ise bir diğer ihtimal olarak, makalenin belki küresel ölçekte bir kütüphanede bulunabileceği belirtiliyor). Bu ise oraya girmekten başka bir çare bırakmıyordu. Denedim, Almanya'da bir yakını olup Heidelberg Üniversitesi'ne ulaşabilecek bir öğretmen arkadaşım ve öğrencim var mı diye araştırdım. Sonuç olumsuz idi!

1.6.4.1. *Romberg*'in Orijinal Makalesi ve Sonuçları

Özetle tüm girişimlerime rağmen ***Romberg*** ile aynı kaderi paylaşmak zorunda kaldım: Tröndheim (Trøndhjem (8)). Yani son çare olarak NTNU'da bu makalenin adını yazdığım zaman karşıma ***Brynjulf Owren*** çıkıyordu, ona yönlendiriliyordum. ***Owren***'e 23.12.2018, 04:10 (Tröndheim'da 02:10)'da bir e-posta yolladım (Bkz. 23.12.2018 (9)) ve 09:11 (Tröndheim'da 07:11)'de yıldırım hızıyla bana yanıt gönderdiğini gördüm (ki şu şansa bakın ki o sırada tüm işlerimi yani ***"Romberg İntegrali"*** adlı araştırma kitabımı henüz bitirmiştim). ***Owren***, makalenin ekte olduğunu söyleyerek en iyi dileklerini iletiyordu bana. Gerçekten de eke baktığımda ***Romberg***'in 14 Şubat 1955 tarihli "***DET KONGELIGE NORSKE VIDENSKABERS SELSKABS FORHANDLINGER Bind 28, Nr. 7, 1955***"de 517.61 (517.2) kaydıyla yayımlanan "***Vereinfachte numerische Integration von Werner Romberg***" adlı makalesini gördüm. Bu makale sanki bana bir yeni yıl armağanı gibiydi ve onu ekten alır almaz hemen kitabımın Bölüm 1'ine, buradaysa 1.6.1'e baktım ve her 2 metni karşılaştırdığımda hiçbir fark göremedim. Yani ***Romberg***'inki eskiydi ve benimki yeniydi (modern) ama sonuçta her ikisi de aynı şeyleri söylüyordu!

Buna göre şu sonuçlar çıktı:

1. "***Romberg İntegrasyonu 2016-2020***" adlı kitabımın Bölüm 1'inde ya da 1.6.1'de (ki bunlar ilk ve tektir) gerçekten de nokta atışı bir çalışma çıkartmışım!
2. ***Jean Luc Chabert***, "*History of Algorithms from Pebble to the Microchip by Jean Luc Chabert/14.6 Romberg's Integration Method S. 451-453*" kitabının 451-453. sayfalarında ***Romberg***'in orijinal makalesindeki trapez metoduyla ilgili bölümleri Almanca'dan İngilizce'ye 1-1 çeviri yapmıştır. Zaten orijinal olduğu ***Jean Luc Chabert***'in atladığı yerlerde "[…]" bırakmasından anlaşılıyordu!
3. ***Romberg***'in metodunu deşifre etmekten başka, onu modernleştirdiğimi ve tüm yönleriyle ele alarak zenginleştirdiğimi gördüm. Ve böylece, ***Romberg***'in orijinal makalesine neden ihtiyacım olmadığını ispatlamış oldum!
4. Bu makaleyi e-postamdan 23.12.2018, 19:03'te aldım ve ilk 3 maddedeki incelemelerim sırasında bazı metinsel ve matematiksel hatalar dikkatimi çekti. Hiç unutmam, 23.12.2018, 19:03'ten Noel demeden, 24.12.2018, 11:00'e kadar aralıksız bu makaleyle uğraştım ve 25.12.2018, 23:47'de mükemmel bir kopyasını çıkarttım. Buna göre "***Vereinfachte Numerische Integration von Werner Romberg***" adlı kopya dosyası orijinaldeki metinsel ve matematiksel hatalardan tamamen arındırılmış, renklendirilmiş, MS-Office 2016 ile mükemmel şekilde tablolandırılmış, kaynakların ve daha birkaç yerin linkleri verilmiş ama tüm bu düzenlemeler aslına sadık kalınarak yapılmıştır!

Özetle, ***Romberg***'in metodunu orijinal makalesine bakmadan deşifre edebildiğime göre, kitabımın Bölüm 1'indeki çalışmalara hiç dokunmadan, "***Romberg Metodu'nun Deşifrasyonu ya da Modernizasyonu***" adlı çalışmamın altına bir not çıkartarak ***Romberg***'in orijinal makalesi hakkında bir değerlendirmede bulundum!

şekliyle göstermiş oldum. Bu, hiçbir kaynakta göremeyeceğiniz çalışmadır, dolayısıyla ilk gösterimdir. Anladığım kadarıyla, zamanında ***Romberg***'in metodunu parça parça anlayabilenler, metodu açıkça anlatacakları ve modernize edecekleri yerde, metot üzerinde yeni bir gelişme var mı diye araştırmışlar ve böylece ***Romberg***'in metodu günümüzde anlaşılması güç bir noktaya taşınmıştır!

(8) Bu, Danca söylenişidir ve Viking kralının şehri olan Trøndelag'a başkentlik yaptığı için doğru gözükür. Bu konuda Google'da **"Trøndhjem"** yazdığınız zaman tarihi kayıtlara da ulaşabilirsiniz. Fakat Norveçliler, buna **"Trondhjem (Trondheim)"** der. İnanılır gibi değil: Ben, ***Romberg***'i 2016'dan beri, farkında olmadan, Tröndheim ile birlikte anardım (Bkz. "***Vereinfachte Numerische Integration von Werner Romberg***" makalesinin sonuna (ki orijinalde farklıdır). Bu dosyanın 25.12.2018 tarihine ait olduğunu Özellikler'den kontrol edebilirsiniz). Kaldı ki Norveççe'den hiç anlamam; onu Almanca'dan anlamaya çalışırım. Yani nasıl oldu bilmiyorum ama bana doğru gelen telaffuz bu idi!

(9) Oradaki ***Romberg*** hakkındaki doktora tezi ifadem, sadece beyaz bir yalandı. Çünkü amacım, eğer elinde bu makale varsa hem konunun önemine dikkat çekmek, hem de makaleyi bir an önce bana yollamasından başka bir şey değildi. Yani bu son başvurumda hayır yanıtını almayı göze alamadım! Bununla birlikte, ***"Romberg İntegrali 2016-2020"*** adlı kitabımdaki çalışmalarda başta ***Owren***'in makalesi olmak üzere ***Tore Havi***'nin makalesi ve daha birçok Tröndheim çıkışlı makaleden de yararlandım. Yani Tröndheim olmadan ***Romberg*** anlaşılamaz!

Fujino Faktörü

Bu arada ***Romberg***'in orijinal makalesini araştırırken, ki bu tam bir tarama idi, Japon matematikçi ***Seiji Fujino***'nun *"**Romberg İntegrasyonunun Mucidi Werner Romberg ile Bir Röportaj**"* adlı 4 sayfalık Japonca bir dosya da ağıma takıldı. Hiç unutmam, bir gün Öğretmenler Odası'nda ***Fujino***'nun bu röportajını nasıl Türkçe'ye çevirebiliriz diye araştırma yaparken bir öğretmen arkadaş, *"boşuna uğraşıyorsun!"* demişti. Haklıydı, çünkü bu tür çalışmalar buraya gitmezdi. Ama bence, araştırma kitabımın önemi bilseydi destek olurdu, diye düşünüyordum!

Her neyse, ben bu dosyayı Türkçe'ye çevirtmeyi kafama koymuştum ve ilk çeviri teklifinde metnin Çince olduğunu söylenerek benden 3033 TL istendi. Bundan sonrası tam bir komedi idi: Bu teklifi teneffüsteyken Öğretmenler Odası'nda (otururken cep telefonumdan bir ses gelmesi üzerine) e-posta olarak almıştım ve ben de *"bu nasıl olur; adamın adı Japonca!"* diyerek sesimi biraz yükselttiğimde etraftakiler *"ne oluyor?"* diye bakınmaya başladılar. Sonra dersim Yabancı Dil sınıfına olduğu için bu durumu onlara da bildirdim. Orada biri Japonca'dan anlayan 2 öğrenci çıktı. Japonca'dan anladığını söyleyen öğrenci (ki hakikaten Japon'a benziyordu), kendi imkânlarıyla Japonca öğrenmeye çalıştığını söylediğinde gözlerim yaşardı. Çünkü temelde aynı şeyi yapıyorduk. Bu 2 öğrencinin bana anlattıklarına göre, tercüme büroları, bu yolla fiyat şişiriyorlarmış. İşte bu nedenle hafta sonu durumuma uygun bir tercüme bürosu araştırdıktan sonra en sonunda Protranslate adlı tercüme bürosunda karar kıldım. Onlara öğretmen olduğumu ve bu çeviriyi bir araştırma projesi için yaptırmak istediğimi söyledim. Sağolsunlar onlar da, uygun bir fiyatla anılan Japonca metni Türkçe'ye çevirdiler ve böylece Romberg Metodu için elimde tam bir set oluştu. Buradan Protranslate Tercüme Hizmetleri'nde çalışanlara teşekkürü bir borç bilir, çalışmalarında başarılar dilerim!

1.7. İnanılmazın Araştırmasında: *Romberg*'in Örneğindeki Alt ve Üst Sınırların En Sade Hali, Türetilmiş Örnekleri ve En İyi Ekstrapolasyon

Romberg, 14.02.1955'te "*Vereinfachte numerische Integration (Basitleştirilmiş Nümerik İntegral)*" adlı tezinde 1'in alt sınırı olan K_n ve üst sınırı olan T_n için teorik bir çalışmada bulunmadı ve bunların yakınsaklığını hızlandırabilmek için Richardson ekstrapolasyonunu kullandı. Oysa bu yaklaşıklıklara ait en iyi ekstrapolasyon, Richardson ekstrapolasyonu değil, ilk algoritması ***Snellius*** tarafından 1621'de verilen ve 2002'de keşfettiğim Snellius ekstrapolasyonu idi. Yani kendisi bundan haberdar değildi ama İmza 2.1'de bildirdiğim üzere bundan çok mutlu olduğunu söylemişti!

Resim 1.4. Sağdan sola doğru, ***Tor Evjen***'in ve ***Thomas Hysing***'in NUSSE'nin çevresinde akın etmesine neden olan öğretim görevlisi ***Ole Amble***. Sırtı dönük kişi ise muhtemelen ***Kjell Kveim***'dır, Oslo-1954. Fotoğraf: ***Sverre A. Børretzen***/*Norsk Teknisk Museum.*

1.7.1. Alt Sınır K_n'nin En Sade Hali

14.12.2019, 23:34.

Romberg, anılan tezinde uygulamasına örnek olarak,

$$(1.55)\quad I = \int_0^1 \frac{\pi}{2}\mathrm{Cos}\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx = 1$$

integralini seçti ve bu integralin sonucunu hedefleyerek 1'in sağ tarafına **"angenähert (approximated): Yaklaşılan"** yazdı. Bu kelimeden sonra virgül koyarak hemen hesaplamalara girişti: Önce integral içindeki fonksiyon için $F_0, F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7$'yi hesapladı ve sonra bunları trapez yaklaşıklıklarında (bkz. (1.20)-(1.24)) ve ***Ole Amble***'nin Metodu'nda kullandı.

Burada hemen bir parantez açmam gerekiyor: Soldaki fotoğrafın sol tarafındaki kişi, Norveç dâhisi ***Ole Amble***'dir ve herkesin baktığı şey ise, ***NUSSE***'nin kontrol panelidir. ***NUSSE***, günümüz bilgisayarının kurucusu sayılan Alman dahisi ***Konrad ZUSE***'nin adının Norveç'teki ilk bilgisayara verilen isim idi (ki bu isim Almanca'daki *"ZUSE"*'nin Norveççe'deki karşılığı idi ve *"N"* harfi *"Norsk (Kuzeyli, Norveçli)"*'un baş harfinden geliyordu).

Romberg, 2 farklı metottan elde ettiği bu yaklaşıklıklara ([10]) (2.2)'deki ekstrapolasyonu uyguladığı zaman (ki trapez ve orta nokta yaklaşıklıklarına uygulanması (1.25)-(1.27)'dedir) bunların hızla 1'e yakınsadıklarını gördü. Bu, Nümerik İntegral'de bir devrim idi ve sonradan bu devrimin adına ***"Romberg İntegrali"*** denildi!

Şimdi bu kısa girişten sonra ***Romberg***'in (1.55)'teki örneğini yeni çıkarımım olan (1.50)'deki indirgeme bağıntısına göre hesaplayayım!

Romberg'in örneğinde $[0,1]$ aralığında integrallenen $f(x) = \frac{\pi}{2}\mathrm{Cos}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ fonksiyonuna göre (1.1)'den $h_0 = b - a = 1 - 0 = 1$ için

$$K_0 = h_0.\frac{f(a)+f(b)}{2} = (1-0).\frac{\frac{\pi}{2}\mathrm{Cos}\left(\frac{\pi}{2}.0\right)+\frac{\pi}{2}\mathrm{Cos}\left(\frac{\pi}{2}.1\right)}{2} = \frac{\frac{\pi}{2}\mathrm{Cos}0+\frac{\pi}{2}\mathrm{Cos}\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\frac{\pi}{2}.1+\frac{\pi}{2}.0}{2} = \frac{\pi}{4}$$

([10]) ***Ole Amble***'nin yaklaşıklıkları trapez yaklaşıklıklarına göre daha iyi idi. Çünkü ***Ole Amble***'nin yaklaşıklıkları, ***Romberg***'in trapez yaklaşıklıklarından (2.2)'deki ekstrapolasyona göre $k = 1$ ile 1 adım önde idi. Bu durumu "*Vereinfachte numerische Integration (Basitleştirilmiş Nümerik İntegral)*" tezinin 3. sayfasında ***Ole Amble***'nin kavuniçi renkli tablosunun ilk sütunundaki yaklaşıklıkların ***Romberg***'in mavi renkli tablosundaki 2. sütundakilerine hemen hemen eşdeğer olmasıyla açıkça görebilirsiniz. Ama ***Romberg***'e göre (2.2) nedeniyle buna gerek yoktu!

eşitliklerinden elde edilen

$$(1.56)\quad K_0 = \frac{\pi}{4}$$

başlangıç değerine ve $h_n = \frac{b-a}{2^n} = \frac{1-0}{2^n} = \frac{1}{2^n}$'ye göre

$$K_n = \frac{K_0}{2^n} + h_n \sum_{k=1}^{2^n-1} f(a+kh_n) = \frac{\frac{\pi}{4}}{2^n} + \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{\pi}{2}\mathrm{Cos}\left[\frac{\pi}{2}\left(0+k.\frac{1}{2^n}\right)\right] = \frac{\pi}{2^{n+2}} + \frac{\pi}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{2^n-1}\mathrm{Cos}\left(k.\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \frac{\pi}{2^{n+1}}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{2^n-1}\mathrm{Cos}\left(k.\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\right)$$

eşitliklerinden trapez yaklaşıklılığını şu şekilde elde etmiş oluruz:

$$(1.57)\quad K_n = \frac{\pi}{2^{n+1}}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{2^n-1}\mathrm{Cos}\left(k.\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\right).$$

Fakat bu son eşitlikteki toplam ***Lagrange***'nin özdeşliğine göre (bkz. "*Lagrange's trigonometric identities*"deki 2. özdeşlik. Bu ***Lagrange*** tarafından verilen özdeşliktir. Bkz. Soru 9 ve ispatına),

$$(1.58)\quad \sum_{k=1}^{2^n-1}\mathrm{Cos}\left(k.\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{Sin}\left[(2^{n+1}-1)\frac{\pi}{2^{n+2}}\right]}{2\mathrm{Sin}\frac{\pi}{2^{n+2}}}$$

dir.

Şu halde (1.58)'i (1.57)'de yerine koyar ve gerekli hesapları yaparsak,

$$K_n = \frac{\pi}{2^{n+1}}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{2^n-1}\mathrm{Cos}\left(k.\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\right) = \frac{\pi}{2^{n+1}}\left(\frac{1}{2}+-\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{Sin}\left[(2^{n+1}-1)\frac{\pi}{2^{n+2}}\right]}{2\mathrm{Sin}\frac{\pi}{2^{n+2}}}\right) = \frac{\pi}{2^{n+2}}.\frac{\mathrm{Sin}\left[(2^{n+1}-1)\frac{\pi}{2^{n+2}}\right]}{\mathrm{Sin}\frac{\pi}{2^{n+2}}}$$

eşitliklerinden K_n trapez yaklaşıklılığını

$$(1.59)\quad K_n = \frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}\mathrm{Sin}\left[(2^{n+1}-1)\frac{\pi}{2^{n+2}}\right]}{\mathrm{Sin}\frac{\pi}{2^{n+2}}}$$

şeklinde sadeleştirmiş oluruz.

Ancak burada da

$$\mathrm{Sin}\left[(2^{n+1}-1)\frac{\pi}{2^{n+2}}\right] = \mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) = \mathrm{Sin}\frac{\pi}{2}.\mathrm{Cos}\frac{\pi}{2^{n+2}} - \mathrm{Sin}\frac{\pi}{2^{n+2}}.\mathrm{Cos}\frac{\pi}{2} = 1.\mathrm{Cos}\frac{\pi}{2^{n+2}} - \mathrm{Sin}\frac{\pi}{2^{n+2}}.0 = \mathrm{Cos}\frac{\pi}{2^{n+2}}$$

açılımına göre

$$(1.60)\quad \mathrm{Sin}\left[(2^{n+1}-1)\frac{\pi}{2^{n+2}}\right] = \mathrm{Cos}\frac{\pi}{2^{n+2}}$$

olduğundan, (1.59)'dan

$$K_n = \frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}\mathrm{Sin}\left[(2^{n+1}-1)\frac{\pi}{2^{n+2}}\right]}{\mathrm{Sin}\frac{\pi}{2^{n+2}}} = \frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}\mathrm{Cos}\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\mathrm{Sin}\frac{\pi}{2^{n+2}}} = \frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\mathrm{Tan}\frac{\pi}{2^{n+2}}}$$

eşitliklerine göre ***Romberg***'in örneğini trapez yaklaşıklılığına göre en sade olarak şöyle bulmuş oluruz (ki bunu (1.11)'deki geleneksel 2. formülden elde etmeniz mümkün değildir):

$$(1.61)\quad K_n = \frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\mathrm{Tan}\frac{\pi}{2^{n+2}}}.$$

Romberg, (1.55)'teki İntegrali Nasıl Çıkardı?

Romberg'in bu soruyu hazırlaması bizim profesörlerinkinden farklı olmasa gerek. Yani ***Romberg*** (1.55)'teki integrali büyük bir olasılıkla şöyle çıkardı: Önce trigonometrik fonksiyonlarda temel integral alma kuralına göre

$$(1.62)\quad \int_0^a \mathrm{Cos}x dx = \mathrm{Sin}x|_0^a = \mathrm{Sin}a = 1$$

olduğunu düşündü. Sonra eğer $a = \frac{\pi}{2}$'yi alırsam integralin üst sınırı $\frac{\pi}{2}$ olur ancak bunu 1 yapmak için $x \to \frac{\pi}{2}x$ dönüşümünü ve ondan sonra da

$$(1.63)\quad \int_0^1 \text{Cos}\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx = \frac{2}{\pi}\text{Sin}\left(\frac{\pi}{2}x\right)|_0^1 \Rightarrow I = \int_0^1 \frac{\pi}{2}\text{Cos}\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx = \text{Sin}\left(\frac{\pi}{2}x\right)|_0^1 = 1$$

dönüşümlerini yapmam gerekir, diye düşündü!

(1.61)'in Açılımı. (1.61)'deki $\text{Tan}\frac{\pi}{2^{n+2}}$'nin açılımı, DPTAlbum1-eBook4'teki S. 14-16'daki Örnek 2'ye göre,

$$(1.64)\quad f_n(1) = \sqrt{2 + f_{n-1}(1)},\ \ f_0(1) = 0$$

için

$$(1.65)\quad \text{Tan}\frac{\pi}{2^{n+2}} = \frac{b_n(1)}{2^n} = \sqrt{\frac{2 - f_{n-1}(1)}{2 + f_{n-1}(1)}}$$

ile tamamen belirlidir!

Bu durumda (1.65)'i (1.61)'de yerine koyarsak,

$$K_n = \frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\text{Tan}\frac{\pi}{2^{n+2}}} = \frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{b_n(1)}{2^n}} = \frac{\frac{\pi}{4}}{b_n(1)}$$

eşitliklerine göre

$$(1.66)\quad K_n = \frac{\frac{\pi}{4}}{b_n(1)} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

sonucunu elde ederiz. Yani ***Romberg***'in yaptığı iş, aslında 4000 yıllık Π'nin Geometrik Dönemi'nde (M.Ö. 2000'de Susa tableti, M.Ö. 3. yy.'da ***Arşimet*** ve 16-17. yy.'da ***Vietœ***, ***Ludolf van Ceulen***, ***Snellius***, ***Huygens*** vd.) yapılan hesaplamalardan farklı değilmiş! Fakat ***Romberg***, π'yi 1'i elde etmek için kullanır!

Bu konuda "*Arşimet, Huygens, Richardson ve Romberg, 2000*" kitabının yazarı ***Ole Østerby***, ***Romberg*** için şöyle der (ki bu kitap yayınlanmadı):

"*… tam olarak **Huygens**'in yaptığı operasyondur, fakat farklı bir motivasyondan. Yani geometrik bir seriyi toplamaktan başka bir şey yapmaz. Bu nedenle, hesaplamalara bakarak kolayca inanan bir kimseye karşın, **Huygens**'in Richardson ekstrapolasyonunu keşfetmediğini söylemenin adil olduğunu düşünüyorum!*"

1.7.2. Üst Sınır T_n'nin En Sade Hali

08.01.2020, 14:34.

Bunun için (1.19)'da (1.61)'i kullanırsak

$$T_n = 2K_{n+1} - K_n = 2.\frac{\frac{\pi}{2^{n+3}}}{\text{Tan}\frac{\pi}{2^{n+3}}} - \frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\text{Tan}\frac{\pi}{2^{n+2}}} = \frac{\pi}{2^{n+2}}.\left(\frac{1}{\text{Tan}\frac{\pi}{2^{n+3}}} - \frac{1}{\text{Tan}\frac{\pi}{2^{n+2}}}\right) = \frac{\pi}{2^{n+2}}.\frac{1}{\text{Sin}\frac{\pi}{2^{n+2}}} = \frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\text{Sin}\frac{\pi}{2^{n+2}}}$$

eşitliklerine göre T_n'yi şu şekilde bulmuş oluruz:

$$(1.67)\quad T_n = \frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\text{Sin}\frac{\pi}{2^{n+2}}}.$$

Not 1.2. Burada (1.67)'nin elde edilmesinde $\frac{\pi}{2^{n+2}} =: x$ dersek,

$$\frac{1}{\text{Tan}\frac{x}{2}} - \frac{1}{\text{Tanx}} = \frac{1}{\text{Tan}\frac{x}{2}} - \frac{1}{\frac{2\text{Tan}\frac{x}{2}}{1-\text{Tan}^2\frac{x}{2}}} = \frac{1}{\text{Tan}\frac{x}{2}} - \frac{1-\text{Tan}^2\frac{x}{2}}{2\text{Tan}\frac{x}{2}} = \frac{2-1+\text{Tan}^2\frac{x}{2}}{2\text{Tan}\frac{x}{2}} = \frac{1+\text{Tan}^2\frac{x}{2}}{2\text{Tan}\frac{x}{2}} = \frac{\frac{1}{\text{Cos}^2\frac{x}{2}}}{2\text{Tan}\frac{x}{2}} = \frac{1}{\text{Cos}^2\frac{x}{2}}.\frac{\text{Cos}\frac{x}{2}}{2\text{Sin}\frac{x}{2}} = \frac{1}{\text{Cos}\frac{x}{2}}.\frac{1}{2\text{Sin}\frac{x}{2}} = \frac{1}{2\text{Sin}\frac{x}{2}\text{Cos}\frac{x}{2}} = \frac{1}{\text{Sinx}}$$

eşitlikleri nedeniyle

$$(1.68)\quad \frac{1}{\text{Tan}\frac{x}{2}} - \frac{1}{\text{Tanx}} = \frac{1}{\text{Sinx}}$$

trigonometrik özdeşliğinin kullanılmış olduğuna dikkat ediniz!

Şu halde her n doğal sayısı için

$$(1.69)\quad \text{Sin}\frac{\pi}{2^{n+2}} < \frac{\pi}{2^{n+2}} < \text{Tan}\frac{\pi}{2^{n+2}}$$

temel eşitsizlikleri geçerli olduğundan

$$K_n = \frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\operatorname{Tan}\frac{\pi}{2^{n+2}}} < 1 < \frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\operatorname{Sin}\frac{\pi}{2^{n+2}}} = T_n$$

eşitsizliklerine göre

$$(1.70)\quad K_n < 1 < T_n$$

yakınsamaları gerçekleşir. ***Romberg***, Tablo 2.1'in ilk sütunundaki yaklaşıklıkları bu şekilde verdi ama bunları (1.12)'deki eşitsizliklerde verdiğim gibi teorik olarak incelemedi! Ayrıca bunların limitleri "***Trigonometrik Fonksiyonların Limitleri***"nden bildiğimiz üzere $K_n \xrightarrow{n\to\infty} 1 \xleftarrow{\infty\leftarrow n} T_n$'dir.

1.7.3. *Romberg*'den Türetilmiş Örnekler

28.01.2020, 13:52-14:33.

Örnek 1 (*Romberg*'in Örneği). ***Romberg***'in (1.55)'te geçen örneğinin

$$(1.71)\quad I_1 = \int_0^1 \frac{\pi}{2}\operatorname{Cos}\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx = 1$$

ve buna ilişkin sınırların (1.61)&(1.67)'den

$$(1.72)\quad K_n(I_1) = \frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\operatorname{Tan}\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)} < 1 < T_n(I_1) = \frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\operatorname{Sin}\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}$$

olduğunu biliyoruz.

Şimdi bu örnekten hareketle başka örnekler elde etmeye çalışalım!

Not 1.3 (*Romberg*'in Örneğinin Dualitesi). Çok ilginçtir, ***Romberg***, (1.71)'deki örneği verebildiği gibi şu örneği de verebilirdi:

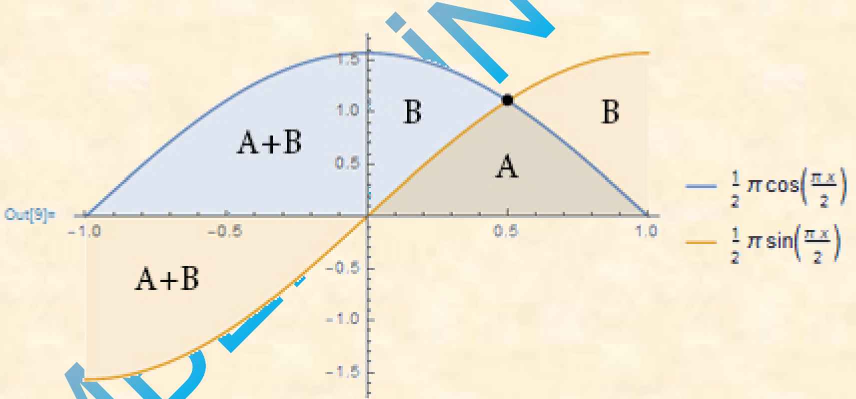
$$(1.73)\quad J_1 = \int_0^1 \frac{\pi}{2}\operatorname{Sin}\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx = \int_{-1}^0 \frac{\pi}{2}\operatorname{Cos}\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx = 1$$

Burada integrallerin aynı olduklarını değişken dönüşümüyle kolaylıkla görebilirsiniz. Yani ilkinde x yerine $x-1$ koyarsanız ikincisini ya da ikincisinde x yerine $x+1$ koyarsanız ilkini elde edersiniz.

Fakat bundan daha önemli sonuç, aşağıdaki grafikte görüldüğü üzere (1.71) ve (1.73)'teki ilk integraldeki fonksiyonların birbirine dik (ortogonal) olacak şekilde her 2 integralin de aynı sonucu vermesidir:

```
In[9]:= Plot[{π/2 Cos[π/2 x], π/2 Sin[π/2 x]}, {x, -1, 1}, Epilog → {PointSize[0.02], Point[{{1/2, π/(2√2)}}]}, PlotLegends → "Expressions", Filling → Axis]
```

Out[9]=



Şekil 1.2. Şekildeki fonksiyonların grafikleri kesim noktasındaki $x = \frac{1}{2}$ doğrusuna göre I. bölgede simetriktir!

Şekildeki fonksiyonlar tanımlı aralıkta birbirine diktir. Çünkü,

$$(1.74)\quad \left\langle \frac{\pi}{2}\operatorname{Cos}\left(\frac{\pi}{2}x\right), \frac{\pi}{2}\operatorname{Sin}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right\rangle = \int_{-1}^1 \frac{\pi}{2}\operatorname{Cos}\left(\frac{\pi}{2}x\right).\frac{\pi}{2}\operatorname{Sin}\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx = \frac{\pi^2}{8}\int_{-1}^1 \operatorname{Sin}(\pi x)dx = -\frac{\pi}{8}\operatorname{Cos}(\pi x)\Big|_{-1}^{1} = -\frac{\pi}{8}(\operatorname{Cos}\pi - \operatorname{Cos}(-\pi)) = -\frac{\pi}{8}(\operatorname{Cos}\pi - \operatorname{Cos}\pi) = 0$$

dır.

Bu sonuçla birlikte, I. bölgedeki her 2 fonksiyonun $x = \frac{1}{2}$ doğrusunda ayrıldıkları parçaları simetriktir. Çünkü her 2 fonksiyonun kesim noktası altındaki parçaları $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ için $\frac{\pi}{2}\operatorname{Cos}\left(\frac{\pi}{2}(1-x)\right) = \frac{\pi}{2}\operatorname{Sin}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ ve kesim noktası üzerindeki parçaları $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ için $\frac{\pi}{2}\operatorname{Cos}\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \frac{\pi}{2}\operatorname{Sin}\left(\frac{\pi}{2}(1-x)\right)$ olduğundan $x = \frac{1}{2}$ doğrusuna göre simetriktir. Buna göre şekildeki I_1, mavi renkli bölgeyi ve J_1, sarı renkli bölgeyi göstermek üzere $I_1 = A + B = J_1$ eşitliği mevcut olur.

Diğer taraftan, (1.73)'teki integralleri için K_n ve T_n'yi hesaplarsak, "*Lagrange's trigonometric identities*"deki 1. özdeşliğe göre,

$$(1.75)\quad K_n(J_1) = K_n(I_1), T_n(J_1) = T_n(I_1)$$

eşitlikleri geçerli olur yani (1.72)'deki sonuçlar elde edilir.

Örnek 2. Eğer Şekil 1.2'deki ilk integrali (mavi renkli olan)

$$(1.76)\quad L_1 = \int_{-1}^{1} \mathrm{Cos}\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = \frac{4}{\pi}$$

şeklinde gözönüne alır ve bundaki K_n ve T_n için "*Lagrange's trigonometric identities*"deki her 2 özdeşliği birden kullanırsak,

$$(1.77)\quad K_n(L_1) = \frac{\mathrm{Cot}\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{2^{n-1}} < \frac{4}{\pi} < T_n(L_1) = \frac{\mathrm{Csc}\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{2^{n-1}}$$

sonuçları ve bunları da (1.72)'ye göre yazarsak,

$$(1.78)\quad K_n(I_1) = \frac{\pi}{4}K_{n+1}(L_1), T_n(I_1) = \frac{\pi}{4}T_{n+1}(L_1)$$

eşitlikleri geçerli olur.

Örnek 3 (Genelleştirilmiş Romberg Örneği). Örnek 1'deki integralin genel şekli şöyledir: m pozitif tamsayısı için

$$(1.79)\quad I_m = \int_{0}^{1} \frac{\pi}{2^m}\mathrm{Cos}\left(\frac{\pi}{2^m}x\right) dx = \mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{2^m}\right)$$

genel haldeki integrali mevcuttur.

Eğer bu integraldeki K_n ve T_n'yi hesaplarsak (1.72)'nin I_m ile genişletilmiş şekli olan şu eşitsizlikler elde edilir (ki bu durumda açılar 2^m'ye bölünür):

$$(1.80)\quad K_n(I_m) = \frac{\frac{\pi}{2^{m+n+1}}}{\mathrm{Tan}\left(\frac{\pi}{2^{m+n+1}}\right)}.\mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{2^m}\right) < \mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{2^m}\right) < T_n(I_m) = \frac{\frac{\pi}{2^{m+n+1}}}{\mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{2^{m+n+1}}\right)}.\mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{2^m}\right).$$

Buna göre eğer $m = 1$ alırsak (1.79)'dan ***Romberg***'in örneğini elde eder ve K_n ve T_n yaklaşıklıklarını (1.61)&(1.67)'deki hesapları yapmadan (1.80)'den doğrudan elde etmiş oluruz!

Örnek 4 (Genelleştirilmiş Romberg Örneğinin Dualitesi). Aynı şekilde, (1.73)'teki genelleştirirsek,

$$(1.81)\quad J_m = \int_{0}^{1} \frac{\pi}{2^m}\mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{2^m}x\right) dx = 2I_{m+1}^2$$

integralini verebiliriz!

Eğer bu integraldeki K_n ve T_n'yi hesaplarsak (ki bunun için yine "*Lagrange's trigonometric identities*"deki 1. özdeşliği kullanıyoruz) ve bunları (1.79)&(1.80)'e göre yazarsak,

$$(1.82)\quad K_n(J_m) = \frac{2I_{m+1}^2}{I_m}K_n(I_m) < 2I_{m+1}^2 < T_n(J_m) = \frac{2I_{m+1}^2}{I_m}T_n(I_m)$$

sonuçları geçerli olur.

Burada $I_m = J_m = 2I_{m+1}^2$, dolayısıyla $K_n(I_m) = K_n(J_m)$ ve $T_n(I_m) = T_n(J_m)$ eşitliklerinin yalnızca $m = 1$ için gerçekleştiğine dikkat ediniz!

Not 1.4 (π İçin Bir Rica). π için (1.80)'den şu yakınsamalar mevcut olur:

$$(1.83)\quad 2^m K_n(I_m) \xrightarrow{m\to\infty} \pi < 2^m I_m = 2^m \mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{2^m}\right) \xrightarrow{m\to\infty} \pi < 2^m T_n(I_m) \xrightarrow{m\to\infty} \pi.$$

Tarihi bilgilerimize göre $2^m I_m$ çokgeniyle π için ilk formülü veren kişi, Fransız matematikçi ***Vieta***'dır (Bkz. DPTAlbüm-eBook4'teki Örnek 2'deki alt sınır onunkidir). ***Vieta*** çok yönlü bir matematikçidir. O matematik ve astronomi hakkında çalışmalar yaptı. Bunun için EKLER'de ona bir saygı ziyaretinde bulunduğumu görebilirsiniz (Bkz. 4.6.1.1'e). Orada ***Vieta***'nın Gregoryen takvimi hakkında 1600'de sıcağı sıcağına yaptığı çalışmalardan Meton çevrimiyle ilgili bazı sonuçlarını ve π'nin 9 ondalığını doğru veren sonuçlarını verdim. Ünlü İngiliz matematikçi ***Lord Turnbull***, π için ilk gerçek formülün 1593'te ***Vieta***'nın verdiği bu formül olduğunu söyler ve bu tarihten sonra Avrupa'da π salgını başlar. Hollandalı 1593'te ***Adriaan van Roomen*** ve Leydenli Krallar; 1596 ve 1615'te ***Ludolf van Ceulen*** ve 1621'de ***Willebrord Snellius*** ve 1654'te ***Christiaan Huygens Vieta***'nın formülüyle ve bunu geliştirerek diğer formüllerle π için çalışmalarda bulundular ve her seferinde π'nin doğru basamak sayısını artırdılar.

Bunlardan ***Ludolf van Ceulen***'in, π'nin 35 ondalığını bulabilmek için 14 yılını harcadığını biliyor muydunuz? Ya onun hesabını tamamlayanın ***Snellius*** olduğunu?

1.7.4. *Romberg*'in Örneği İçin En İyi Ekstrapolasyon: Snellius Ekstrapolasyonu

08.01.2020, 16:00.

Öncelikle 2002'deki keşfim olan Snellius ektrapolasyonunu tanıyalım!

Resim 1.5. Amerika'da ilk kez 16 Şubat 1968'te renkli olarak yayımlanan ama Türkiye'de 1970'lerde siyah-beyaz olarak izlenen "*21. Bölüm: NAZİ (Patterns of Forces)*"de ***Kaptan Kirk*** ve ***Mr. Spock*** kayıp Federasyon Kültür Gözlemcisi ***John Gill***'i ararlar ama kendilerini Nazi Almanyası'nı örnekleyen bir gezegende ve ***John Gill***'i de orada ***Hitler***'in yerine geçmiş olarak bulurlar. Dizinin sonunda **"Mutlak Güç"** hakkında söylenenlerin her zaman geçerli olabileceğine vurgu yapılmaktadır. Diziyi ölümsüz yapan şey de bu!

Snellius Ekstrapolasyonu, 1621-2002. ***Snellius***'un 1621'de keşfettiği (2.12)'deki M_7, dolayısıyla (2.24)'ün genelleştirilmiş şekli şöyledir: $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için (2.5)'ten

$$(1.84)\quad E_{n,0}(K) = K_n = \frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\operatorname{Tan}\frac{\pi}{2^{n+2}}}, E_{n,0}(T) = T_n = \frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\operatorname{Sin}\frac{\pi}{2^{n+2}}}$$

başlangıç değerlerine ve (2.43)'ten

$$(1.85)\quad \begin{cases} E_{n,k+1}(K^{-1}) = \dfrac{4^{k+1}E_{n+1,k}(K^{-1}) - E_{n,k}(K^{-1})}{4^{k+1}-1} + O(h_n^{2k+4}), \\ E_{n,k+1}(T^{-1}) = \dfrac{4^{k+1}E_{n+1,k}(T^{-1}) - E_{n,k}(T^{-1})}{4^{k+1}-1} + O(h_n^{2k+4}) \end{cases}$$

ekstrapolasyona göre

$$(1.86)\quad S_{n,k}(T^{-1}, K^{-1}) = \frac{2^{2k+3}(2^{2k+4}-1)B_{2k+4}E_{n,k}(T^{-1}) - (k+2)E_{n,k}(K^{-1})}{2^{2k+3}(2^{2k+4}-1)B_{2k+4} - (k+2)} + O(h_n^{2k+4})$$

dir. Burada B_{2k+4}'ler Bernoulli sayılarıdır!

Hemen kısa bir tarihçesine girecek olursam; ***Snellius***, 1621'de (2.12)'deki M_7 ve M_8'i keşfederken, ***Huygens*** ise, 1654'te (2.23)'teki algoritmayı keşfetmişlerdir. Bana göre her ikisi de ***Kardinal Nikolas***'tan gelen ve ***Snellius***'un türettiği (2.14)'teki M_8 algoritmasından hareketle keşfetmişlerdir bu algoritmaları. Bunlar, Nümerik Analiz'de bilinen ilk algoritmalar ya da ekstrapolasyonlardır ve bu kişiler de, Nümerik Analiz'in kurucuları olarak kabul edilirler. Fakat onların takipçileri arasında şöyle bir gerçek vardır: 2.1'de kısa bir tarihçesini verdiğim (2.2) ekstrapolasyonu esas formuna ulaşana kadar birçok matematikçi katkıda bulunur ve hiç kimseye mâl edilemezken, (1.86)'daki Snellius ekstrapolasyonunu, "21.rar"daki çalışmalarımdan görüldüğü üzere, yalnızca ***Snellius***'un M_7 algoritmasından hareketle tek kalemde, 10.09.2002, 01:45-27.10.2002, 05:40 tarihleri arasında genelleştirdim. Bu, Snellius Esktrapolasyonu'nun 1. versiyonu idi. Daha sonra bunun 3 versiyonunu daha vererek Snellius Ekstrapolasyonu'nu en yetkin şekilde ifade ettim!

Şimdi geçmişi canlandırmak adına (1.86)'da $k = 0$ alırsak,

$$S_{n,0}(T,K) = \frac{2^3(2^4-1)B_4E_{n,0}(T) - 2E_{n,0}(K)}{2^3(2^4-1)B_4 - 2} = \frac{8.15.\left(-\frac{1}{30}\right).T_n - 2K_n}{8.15.\left(-\frac{1}{30}\right) - 2} = \frac{2T_n + K_n}{3}$$

eşitliklerinden derhal (2.24) yani Snellius algoritması elde edilir:

$$(1.87)\quad S_{n,0}(T,K) = \frac{2T_n + K_n}{3}.$$

Burada şuna dikkat etmek gerekiyor: Snellius ekstrapolasyonu, (1.69) nedeniyle 22.7.2002 tarihli "***Arşimet'in Metodu M.V.***" albümümdeki DPTAlbum1-eBook4 dosyasında örnekleri görülen çokgensel algoritmaları için geçerli olan özel bir ekstrapolasyondur!

Şu halde (1.71)'deki $T_n = \frac{\pi}{\pi_{n+2}}$ ve $K_n = \frac{\pi}{\Pi_{n+2}}$ yaklaşıklıklarına göre (1.85)'teki E-ekstrapolasyonu lineer olduğundan,

$$(1.88)\quad \begin{cases} E_{n,k}(K^{-1}) = E_{n,k}\left(\frac{\Pi_{n+2}}{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}E_{n+2,k}(\Pi), \\ E_{n,k}(T^{-1}) = E_{n,k}\left(\frac{\pi_{n+2}}{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}E_{n+2,k}(\pi) \end{cases}$$

eşitlikleri nedeniyle (1.86)'daki Snellius ekstrapolasyonunu şu şekilde yazabiliriz:

$$(1.89)\quad S_{n,k}(T^{-1},K^{-1}) = \frac{S_{n+2,k}(\pi,\Pi)}{\pi}.$$

Burada sözkonusu DPTAlbum1-eBook4 dosyasındaki tüm örneklerde geçerli olan ekstrapolasyonlar, $E_{n+2,k}(\pi)$ ve $E_{n+2,k}(\Pi)$ temel ekstrapolasyonlarıdır ve bunları taban kabul eden $S_{n+2,k}(\pi,\Pi)$ Snellius ekstrapolasyonudur. Fakat $S_{n+2,k}(\pi,\Pi)$'nin konveks f(x)'e göre yazılmış olduğuna dikkat ediniz (Bkz. "*Romberg İntegrali Kronolojim 1*").

Yavaş Yakınsamanın Dayanılmaz Ağırlığı

Genel olarak her n doğal sayısı için $\pi_{n+2} = 2^{n+2}\mathrm{Sin}\frac{\pi}{2^{n+2}}$ ve $\Pi_{n+2} = 2^{n+2}\mathrm{Tan}\frac{\pi}{2^{n+2}}$ çokgensel yaklaşıklıkları için

$$(1.90)\quad E_{n+2,k}(\pi) < \pi < S_{n+2,k}(\pi,\Pi) \lesssim E_{n+2,k+1}(\Pi) < E_{n+2,k}(\Pi)$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Fakat n'nin küçük değerlerinde $S_{n+2,k}(\pi,\Pi)$'nin π'ye yakınsaması, $E_{n+2,k}(\pi)$ ile hemen hemen aynı olur. Yani $E_{n+2,k}(\Pi)$, π'ye son derece kötü yakınsar!

Bu tıpkı,

$$(1.91)\quad \frac{\pi}{4} = \mathrm{Tan}^{-1}(1) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

alterne serisindeki gibidir (**Y.N. *Leibnitz***, bu seriyi 1674'te keşfetti ve 1682'de yayımladı. Bkz. "*De vera proportione circuli ad quadratum circumscriptum in numeris rationalibus*"). Çünkü bu seri o kadar kötü yakınsar ki $n = 1{,}000{,}000$ için mutlak hata 2.5×10^{-7}'dir. Yani bu seriyle $n = 1{,}000{,}000$ için π'nin sadece 6 ondalığını doğru olarak görürsünüz! Demek ki π için ters tanjant özdeşliklerindeki yakınsama durumu neyse Snellius ekstrapolasyonunda da, dolayısıyla ***Snellius***'un zamanında da aynı durum geçerliymiş. Ama ***Snellius***'un zamanında ne yakınsak diziler ve ne de seriler biliniyordu. Tarihi bilgilerimize göre $\pi_{n+2} = 2^{n+2}\mathrm{Sin}\frac{\pi}{2^{n+2}}$ çokgensel yaklaşılıklığıyla ilk uğraşan kişi, Fransız matematikçi ***Vieta*** idi. O, 1593'te DPTAlbum1-eBook4'teki Örnek 2'deki alt sınırla ya da π_{n+2} ile π'nin 9 ondalığını buldu!

Şimdi (1.88) ve (1.89)'a göre Snellius ekstrapolasyonundaki,

$$(1.92)\quad \begin{cases} E_{n,k}^{-1}(K^{-1}) = \dfrac{\pi}{E_{n+2,k}(\Pi)} \\ E_{n,k}^{-1}(T^{-1}) = \dfrac{\pi}{E_{n+2,k}(\pi)} \end{cases} \Rightarrow S_{n,k}^{-1}(T^{-1},K^{-1}) = \frac{\pi}{S_{n+2,k}(\pi,\Pi)}$$

yakınsaklığını hızlandırabilmemiz için (1.83)'teki gibi n'nin büyük değerlerinde çalışmamız gerekiyor (Bkz. Not 1.4). Örneğin $n = 20$ için şu tabloyu verebilirim:

k	$\frac{\pi}{E_{n+2,k}(\pi)} - 1$	$\frac{\pi}{E_{n+2,k}(\Pi)} - 1$	$\frac{\pi}{S_{n+2,k}(\pi,\Pi)} - 1$
0	9.35037×10^{-14}	-1.87007×10^{-13}	-1.57373×10^{-26}
1	6.5572×10^{-28}	1.04915×10^{-26}	-2.10213×10^{-40}
2	5.47431×10^{-43}	-1.48901×10^{-40}	-1.68326×10^{-55}
3	6.66495×10^{-59}	5.2893×10^{-55}	-2.05806×10^{-71}
4	1.32783×10^{-75}	-4.69777×10^{-70}	-4.08519×10^{-88}
5	4.66337×10^{-93}	1.04311×10^{-85}	$-1.43003 \times 10^{-105}$
⋮	⋮	⋮	⋮

Tablo 1.1. Bu tabloda (1.90) mükemmel şekilde çalışır. Çünkü son 2 sütuna dikkat ederseniz $S_{n+2,k}(\pi,\Pi) \lesssim E_{n+2,k+1}(\Pi)$ eşliklerini çaprazlamada açık bir şekilde görebilirsiniz!

Bu tabloda görüldüğü üzere ekstrapolasyonik yaklaşıklıklar için (1.90) açık şekilde çalışır ve $S_{n+2,k}(\pi,\Pi)$'deki yavaş yakınsama sorununu da çözmüş olduk! Fakat bu durum ***Romberg***'in mavi renkli tablosundaki yaklaşıklıklar için geçerli değildir. Çünkü o, (1.84)'teki yaklaşıklıkları $n = 0,1,2,3$ için kullanır. Yani bu yaklaşıklıklara göre $S_{n+2,k}(\pi,\Pi)$'deki yakınsaklık bozulduğu için bir işe yaramaz!

Sonuç olarak tarihi bilgilerimizi kontrol edersek ***İnanılmazın Araştırmasında*** (***In Search of Incredible***) şu sonuçların çıktığını görürüz: ***Romberg***, tezini 14 Şubat 1955'te DKNVS'ye sunarken acele ettiği için pek çok gerçeğin farkında değildi. Çünkü ***Romberg***, her şeyden önce K_n ve T_n'nin (1.61) ve (1.67)'deki gibi olduklarını bilmiyordu. Bunların farkında olsa bile, bu sefer K_n ve T_n'nin çokgensel algoritmalar olduğunun farkında olması ve (1.86)'daki Snellius ekstrapolasyonunu da bilmesi gerekiyordu. Hadi diyelim ki bunu da bilmiş olsaydı, bu sefer de Snellius ekstrapolasyonunun (1.55)'teki örnek için n'nin küçük değerlerinde yavaş yakınsama yaptığını bilmesi ve yukarıdaki çözümü üretmesi gerekirdi. Açıkçası bunlar ***Romberg*** için imkânsız şeyler idi ve bu, ancak Resim 1.5'teki ***Kaptan Kirk*** ve ***Mr. Spock***'ta olduğu gibi ütopik bir ortamın içinde olmayı gerektirir!

Şimdi bu bölümü kapatmadan önce harddiskimin azizliğine uğrayıp bu bölümdeki bilgilerin yer aldığı dosyanın nasıl kaybolduğunu ama bir şans eseri tekrar nasıl elde ettiğime ilişkin başımdan geçen talihsiz bir olayı aktarmama izin veriniz. Bu arada, şimdilerde artık bu tür talihsiz olayların önüne geçen Microsoft'un Onedrive programını kullanılmanızı hararetle tavsiye ederim. Çünkü bilgisayarınızdaki harddisk çökmesi, virüs nedeniyle çalıştığınız dosya/larınızın bozulması, Windows'taki sistem dosyalarının bozulmasıyla sisteme erişimin engellenmesi vb. gibi durumlarda Onedrive uygulaması gerçekten de işe yarar. Şimdiye kadar Windows XP'de cebirsel denklemlerin genel çözümünü veren 80 sayfalık külliyat niteliğindeki dosyamı ve 2013'te de okuldaki bilgisayar sınıfındaki öğrencilerin kullandığı bir bilgisayara (ki bu kazara oldu. Yani öğrencilerin kullandıkları bilgisayarları temiz zannediyordum) flash belleği takmam suretiyle, bilgisayardaki bir virüsün ***Arşimet***'in son derece önemli bir çalışmasını içeren dosyamı kaybettim. Tabii ki her seferinde başımdan aşağıya kaynar sular dökülmüş gibi hissettim kendimi. Bu nedenle, bana göre, Microsoft'un Onedrive uygulaması bir devrimdir!

Resim 1.6. ***Mr. Bean***'in *"Whistler's Mother"* tablosundaki kadının başına hapşırıp bozduktan sonra bulduğu çözüm. Gayet hoş olmuş!

1.8. Beklenmedik Bir Sürpriz!

İşin kötüsü ne idi biliyor musunuz? Yeni taşındığım muhitteki zırt pırt kesilen elektrikler yüzünden harddiskim (3 TB SEAGATE) çöktü (ki çöktüğü Windows 10'un Denetleme ve diğer programlar tarafından görülmüyordu. Bu durum harddiskin çok ağır çalışması nedeniyle kasayı 24.12.2016'da götürdüğüm bilgisayarcıda anlaşıldı) ve 21.12.2016, 17:47 itibariyle harddiskimden harici harddiskime (1 TB HP) tüm dosyalarımı aktarırken 73 saat 40 dakika çalıştığım A4 formatındaki 24 sayfalık "***Romberg Metodu ve Ötesi***" adlı dosyamı aktaramadım. Çünkü harddisk çökmüş ve kırılma tam da son olarak çalıştığım bu dosyanın üzerinden bir fay hattı gibi geçiyordu. Bu yüzden bu dosyayı ne açabiliyor (ki MS WORD'de açmaya çalıştığım zaman Satır 0-Sütun 0'da XML hatası görülüyordu), ne kopyalayabiliyor (ki % 60'ına kadar kopyalanıyor ama orada takılıyordu) ve ne de taşıyabiliyordum (sadece dosyanın özelliklerine bakabiliyordum); tam da makalemi tamamlamışken. Bu dosyanın ilk 10 sayfasında metodu anlatmış ve son 14 sayfasında da E-ATA 1 Algoritmaları'ndan transfer ettiğim birkaç ekstrapolasyonu yazmıştım. İşte böyle bir durumda harddiskin çökmesi, ***Mr. Bean***'in 1871 tarihli *"Whistler's Mother"* yağlıboyalı tablosunu berbat etmesi gibi bir şeydi. Böyle bir şeyin insana nasıl acı verdiğini Los Angeles Müzesi Kuratörü ***David Langley***'in, *"Tanrım, tanrım, tanrım… (O JESUS, O God…)"* demesinden anlayabilirsiniz!

Bu nedenle okulda hemen bu dosyadaki çalışma başlıklarını bir kâğıda yazarak ne yaptığımı görmeye, dolayısıyla oradan yeniden bu dosyayı geri çağırabilir miyim, diye bir deneme bile yaptım. Ama panik halinde yaptığım bu denemede pek de başarılı değildim. Daha doğrusu, başlıkları doğru bir şekilde ortaya koysam bile, içeriğe geçtiğimde elim ayağım dolaşıyordu. Yani bir dosyayı kaybetmek ve onu yerine koyamamak, sizi bir yerde çok feci sinirlendiriyor ve işe baştan başlamak çok ağır geliyor. İşte asıl çöküşü burada yaşadım. Örneğin, 2002-2003'teki E-ATA 1 Algoritmaları'na bu çalışma nedeniyle 2016'da geri döndüğümde resmen zır cahil kalmıştım!

Fakat şanslı olduğum bir nokta vardı ki, son kaydetme tarihi 01.12.2016, 17:35 ve toplam çalışma süresi 26:59:00 olan 16 sayfalık eskiz çalışmasını okulda da çalışırım hesabıyla daha önceden cep telefonuma kaydetmişim (ki bu dosya cep telefonunda ağır yükleniyordu, dolayısıyla okulda bir ara bu dosyaya bakarken, *"Keşke bu dosyayı DOCX değil, PDF formatında yükleseydim!"* diye hayıflanmış, kendi kendime kızmıştım. Bkz. "*Romberg İntegrasyonu Kronolojim 1*") ve okulda bu dosyayı görünce tüm üzüntüm gitti, yeniden çalışma kararı aldım. Ancak onca harcanan zamanı ve bir o kadar emeğimin boşa geçtiğini görünce üzülmemek elde değildi. Bu yüzden 1 hafta boyunca moral olarak çökmüştüm ve dosyayı kurtarmanın yollarını arıyordum. Ancak Microsoft, bu tür durumlarda dosyayı kurtarmanın imkânsız olduğunu söylüyordu sitesinde!

Özetle, bu dosyayı kurtarmak için yapılacak herhangi bir işlem kalmadığına göre, ben de cep telefonumdaki dosyadan bu sefer daha iyi bir çalışma çıkartacağıma dair inançla yeniden çalışmaya başladım ve gördüğünüz gibi ***Mr. Bean***'in berbat ettiği tablo daha da mükemmel oldu (!)

Derya PAMUKTULUM

§2. Romberg Metodu'ndaki Algoritmalar İçin Ekstrapolasyonlar

2.1. Richardson Ekstrapolasyonu. Bu ekstrapolasyonun tarihi oldukça geniştir. Tarihi bilgilerimize göre bu ekstrapolasyonu ilk kez 1654'te ***Huygens*** başlatmıştır. Kronolojiye göre ondan sonra ***Takebe*** gelir.

Bir Japon Mucizesi: *Takebe Katahiro*

Japon matematikçi ***Takebe Katahiro (Kenkō)*** 1710'da, muhtemelen 1695'ten önce, (2.2)'yi kullanarak π'nin 41 ondalığını hesapladı (Bkz. "*The early history of convergence acceleration methods*"). Sözkonusu ***Takabe***'nin elyazması ve linkteki makale daha yeni neşredilmiş olup, bunlardan çıkan sonuca göre ***Huygens***'in algoritmasını ilk kez genelleştiren, dolayısıyla (2.2)'yi ilk keşfeden kişi, ***Takebe*** olmuştur. Ünlü bir Samuray ailesinden gelen ***Takebe***, kılıcında usta olduğu kadar matematikte de usta idi. Matematikteki ustası ***Seki Kowa*** ile birlikte Şogun Hükümeti'nde aileleri aynı ranka sahipti: 300 Koku (300 kişilik bir köyün toprak ağası). Babası ***Takebe Naotsune***, Şogun Hükümeti'nde bir Yuhitsu (Sekreter) idi…

Türk-Japon İlişkileri

Bizim Japonlar ile ilk temasımız ***Meiji*** döneminde başladı. Ama bu ilk temasla başlayan ilişkimiz, Japonlar'ın Amerika ve İngiltere ile olan müttefikliği nedeniyle emperyalist bir ilişki idi. Yani Japonya emperyalist bir İmparatorluktu ve bize Avrupa'nın baktığı gibi **"Hasta Adam"** gözüyle bakıyordu. İşin kötüsü, Osmanlı Devlet adamları da bu durumu kabullenmişler ve o şekilde hareket ediyorlardı. Bu nedenle Türk-Japon ilişkileri esaslı olarak ilk kez ***II. Abdülhamit*** döneminde değil, ***Atatürk*** döneminde başlar (Bkz. "*ARŞİV BELGELERİNE GÖRE ATATÜRK DÖNEMİ TÜRK-JAPON İLİŞKİLERİ (1923-1938)*"). Bu durum Lozan Antlaşması sırasında açıkça görülmektedir.

İnkılap Tarihi derslerimizden bildiğimiz üzere, Lozan Antlaşması 24 Temmuz 1923'te TBMM ile İngiltere, Fransa, İtalya, Japonya, Romanya ve Yunanistan temsilcileri arasında imzalanmıştır. İngiliz gazeteci ***G. Ellison***, Lozan Palas'ta Japon bayrağının dalgalandığını görünce şaşırır ve ***İnönü***'ye *"Japonya'nın burada ne işi var?"* diye sormaktan kendini alamaz. Ama ***G. Ellison***'un sorusunun yanıtı kapitülasyonlar meselesinde ortaya çıkar: Japon baştemsilcisi ***Baron Hayaşi***, ***İsmet Paşa***'nın kapitülasyonların kaldırılmasında ısrar etmesine karşı çıkar ve ***Meiji*** yönetiminden örnek vererek kapitülasyonların sürüncemede bırakılmasını ister. ***İsmet Paşa*** ise, Osmanlı döneminin hukuki ıslahatlarının yarım asırdır devam ettiğini ve hukuk ıslahatı konusunda, yapılan gerçek işlerin, söylenen sözlerden daha önemli olduğunu vurgulayarak ***Baron Hayaşi***'ye kısa ama net bir yanıt verir (Bkz. "*Sevr Antlaşması: Madde 136*"). Ancak bu yanıta rağmen Lozan Konferansı 4 Şubat 1923'te yarıda kesilir ve görüşmelere 2 aya yakın bir süre ara verilir.

İsmet Paşa şöyle anlatır: *"(**Lord Curzon**'a) Kapitülasyonlar senin için hayati bir mesele midir, tarzında konuştum. Saatlerce süren bu mücadeleye hakiki bir çekişme ve boğuşma denebilir. Toplantı böyle bir hava içinde geçti. Biz nihayete kadar noktai nazarımızda ısrar ettik. Fakat onlar aralarında daha evvel karar vermişler. Hiçbir değişiklik yapmak niyetinde değiller. Hazırladıkları muahede projesini menfi şekli ile bize behemehal kabul ettirmek isteğinde oldukları anlaşılıyordu, görülüyordu. Nihayet hiçbir neticeye varamadık ve biz salonu terk ettik!"*, *Lozan Antlaşması Kesintisi Sırasında İnönü ve Lord Curzon*.

Görüldüğü üzere Japonya, Versay Antlaşması'ndan sonra **"Büyük Devletler"** denilen emperyalist güçlerden biri olmuştu ve Türkiye ile ilgili bu büyük konferansa ilgisiz kalamadı. Fakat ne zaman ki Lozan Antlaşması'nı imzaladık, işte o zaman Japonya bizi adam yerine koymaya yani Eşitlik ilkesine göre hareket etmeye başladı. Bunu ***Atatürk***'ün Japon Büyükelçisi'ne gönderdiği yanıtta açıkça görebilirsiniz!

Emperyalizmin Gölgesinde Kültürel İşbirliği Yapmak Mümkün Mü?

Cumhurbaşkanımız ***Recep Tayyip Erdoğan***, dün TANAP'ın Avrupa bağlantısının açılması vesilesiyle şu mesajı gönderdi: "*Bize bir adım atana, biz koşarak gittik!*".

Ben bu mesajı dün televizyonda canlı bağlantıda duydum ve şaşırdım. Çünkü RİK 2'de ve buradaki bazı çalışmalarımda görüldüğü üzere 2002'de ne idiysem şimdi de oyum. Yani duruşumu hiç değiştirmedim ve böylece geçmişte yaptıklarım gelecekte yapacaklarımın teminatı oldu. Bu, ***Robert Bosch***'un ilkesine sözüne benzer ama ondan daha garantilidir!

Bu konuda Ertuğrul fırkateyni kazası vesilesiyle Türk-Japon Dostluğu'nun 125. Yıldönümü'ndeki Cumhurbaşkanımız ***Erdoğan***'ın şu sözleri son derece dikkat çekicidir: *"Bildiğiniz gibi Türk-Japon ilişkilerinde Ertuğrul Firkateyni son derece özel bir yer tutuyor. Şu anda bulunduğumuz mekân çok çok anlamlı. Az önce gelirken dostum **Abe**'ye onu da hatırlattım. Zira şu mekân bildiğiniz gibi **Sultan II. Abdülhamid**'in bir mirasıdır. Ve 125 yıl önce **II. Abdülhamid Han** Japon İmparatoru **Meiji**'ye hediyelerini ve iyi niyet mesajlarını götüren Ertuğrul fırkateyni dönüş yolunda geçirdiği bir kaza sonucu battı. Eğer içeri girdiğinizde hazırlanan sergiyi de gördü iseniz o sergide de bunlar resmedilmiştir. Bölge halkı denizcilerimizi kurtarmak için hayatlarını hiçe sayarak büyük çaba sarf ettiler. Zaten özet filmde de bunu izledik. Tamamı inanıyorum ki sunuma arz edildiğinde bunun çok daha farklı olduğunu göreceğiz ve Türk-Japon ilişkilerinin nereye dayandığını görme anlamında inanıyorum ki yeni bir tarihi birlikte yazacağız. Ve 125 yıldır şehitlerimizin aziz hatıralarına sahip çıkarak gerçekten çok farklı, çok müstesna duruş sergilediler. Bu bakımdan bunu çok önemsiyoruz. Ben, bu vesileyle tüm Japon halkına şahsım, milletim adına teşekkür ediyorum. Türk Japon dostluğunu perçinleyen bir diğer olay ise 1985 yılında gerçekleşen tahliye hadisesidir. THY 1985 yılında İran-Irak savaşının en sıkıntılı günlerde Tahran'da mahsur kalan 215 Japon vatandaşını tahliye ederek Japon halkına vefa borcunu ödemeye çalışmıştır.*

*Bugün değerli dostum ile bu değerli temayı işleyen ve ana tema olarak Türk-Japon dostluğunu konu alan Ertuğrul 1890 filmi ile ilgili hazırlanan 30 dakikalık tanıtımı izledik. Bu vesileyle bu projede hayata geçmesi için çaba sarf eden ve emeği gecen herkesi tebrik ediyorum. Değerli misafirimizi 2 gün sonra G20 Zirvesi için bu kez Antalya'da konuk edecek olmamız bizim için ayrıca bir memnuniyet vesilesidir. Başbakan **Abe**'nin bu ziyaretini iki halk arasındaki kadim dostluk ve dayanışma bağlarını daha da pekiştireceğine inanıyorum"*, *Erdoğan ve Abe "Ertuğrul 1890" filminin tanıtımını izledi*.

Şimdi Japonya'da "*2019 Türk Kültür Yılı*" kutlanıyormuş ve bu etkinliğe Japon Prensesi ***Akiko Mikasa*** ile birlikte Japon iş dünyasından çok sayıda kişi katılmış. Onların 2019'da yürüttükleri bu kültürel faaliyet için ben de 2018'de şu çalışmaları yapmıştım:

2018 Türk-Japon Dostluğu İçin Katkılarım

Öncelikle ***Takabe***'nin algoritmasını sırf Türk-Japon Dostluğu nedeniyle incelerken, Richardson ekstrapolasyonunu kullandığı için ***Takabe***'nin algoritmasının Batı tarafından yok sayılmış olduğuna şahit oldum. ***Takabe***, aslında algoritmasında ustası ***Seki Kowa***'nın algoritmasını kullanarak yeni bir çıkarımda bulunmuş ve Richardson ekstrapolasyonunu keşfetmişti. Ama ***Seki Kowa*** da ***Alexander Aitken*** tarafından tarih sahnesinden silinmişti. Tüm bunları bildiren ***Naoki Osada***'nın "*The early history of convergence acceleration methods*" makalesi ise halen Batı literatüründe geçmez, yok kabul edilir! (**Y.N.** Anılan makale ***Springer***'de ücretli olarak satıldığı için 19.06.2018, 20:51'de "*The early history of convergence acceleration methods*" linkinden almıştım. Dolayısıyla bu makaleyi şimdi, 1 ya da 2 sayfalık tanıtım makalesi hariç, bulmanız mümkün değildir. İşin kötüsü, ***Osada***, kendi web sitesinde de bu makaleyi yayımlamaz!)

Buna göre "***Romberg İntegrali 2016-2020***" adlı kitabımda Türk-Japon Dostluğu hatırına 2018 yazında yaptığım çalışmalar, dolayısıyla katkılarım şunlardır:

1. Burada olduğu gibi kitabımın Bölüm 3'ünü "***Bir Japon Mucizesi: Takebe***" başlığıyla açtım.
2. ***Takebe***'nin "***Taisei Sankei***"deki hesabını "***3.3.1.4.1.1. Çokgensel Algoritmalar/3.3.1.4.1.1.1. Takebe'nin Algoritması***"nda inceledim. Orada ***Takebe*** için 2002'den kalma DPTAlbum1-eBook4'deki S. 14-16'daki Örnek 2'deki π_n alt sınırıyla tekrar hesap yaptım ve ***Takebe***'nin π'nin 41 ondalığını bulmasına ilişkin sonuçları Tablo 3.20'de karşılaştırmalı olarak verdim. İşte bu karşılaştırmalı tabloya göre ***Takabe***'nin, Richardson ekstrapolasyonunu kullanmış olduğu sonucu çıktı ya da onaylamış oldum. Yani ***Takebe***, (2.2)'deki ekstrapolasyonu ***Lewis Fry Richardson***'dan 232 yıl (1695-1927) önce vermiştir!
3. Bununla da yetinmedim; Türk-Japon Dostluğu'nu başlatan İmparator ***Meiji*** ve eşi ***Şöken***'den portrelerini kullanarak bu bölümün çeşitli yerlerinde söz ettim (Bkz. EBA'daki Modern Japonya'nın kurucusu ***Meiji***'ye ait "*Japonya'nın Ortaya Çıkışı ve Güçler Dengesine Etkisi*" başlıklı dersimize. Bu derse bakıp ***Meiji***'ye öykünenlerin, ***Atatürk***'ü anmaması düşünülemez. Çünkü ***Atatürk***'ün yaptığı devrimler ***Meiji***'ninkinden farklı değildi. Bu nedenle Japonlar O'na "*Meiji de bizim Atatürk'ümüz*" derler!)
4. "***§4. UYGULAMALAR/4.4. Genelleştirilmiş Seki-Takebe Ekstrapolasyonu Hakkında***"daki "***4.4.1. Takebe'nin Algoritması***"nda (2.2)'deki ekstrapolasyonun ***Takebe***'nin olduğunu ispatladım ve sonra ***Takebe***'nin farkların oranıyla ilgili çıkarımından hareketle bir ikinci ekstrapolasyon tanımladım ve "***4.4.2. Genelleştirilmiş Seki-Takebe Ekstrapolasyonları***"nda da 4 farklı yeni ekstrapolasyon verdim. Bunun hemen altına ayrı bir sayfa açarak "***İTHAF***" bölümünde bizim üniversitemizde bir dönem görev yapan ve şimdi ebediyete göçmüş ***Masatoşi İkeda***'yı andım! (**Y.N.** Bizdeki adıyla ***Gündüz İkeda***'yı üniversitedeyken nadiren de olsa görürdüm. Fakat tam ***Seiji Fujino***'nun ***Romberg*** ile yaptığı röportajının Türkçe'ye çevirisi için ona başvuracaktım ki ***Romberg***'ten 4 gün sonra ebediyete göçmüş olduğunu gördüm)

Doğu'daki bu gelişmeye karşılık Batı'da ise ***Huygens***'i takip eden ***Jacques Frederic Saigey***, 1856 ve 1859'da,

$$(2.1)\quad \begin{cases} A'_n = A_{2n} + \dfrac{A_{2n} - A_n}{3}, \\ A''_n = A'_{2n} + \dfrac{A'_{2n} - A'_n}{15}, \\ A'''_n = A''_{2n} + \dfrac{A''_{2n} - A''_n}{63} \end{cases}$$

gerçek iteratif algoritmalarını günümüzde kullanılan eliminasyon sistemine göre ispatlı bir şekilde verdi (Bkz. "*Richardson Extrapolation and Romberg Integration, Historia Mathematica, 11 (1984), 3-21/The Work of Saigey*", "*Extrapolation algorithms and Padé approximations: A Historical Survey/1.2. Richardson's Process, p. 3*" vb.). Ancak ***Saigey*** bundan sonraki algoritmaları vermek yerine işin kolayına kaçtı ([11]). 1900'de ***W. F. Sheppard***, Simpson 3-8 Kuralı, Boole Kuralı, Weddle Kuralı vb.'nin yamuk kuralındaki yaklaşıklıkların farklı integral aralıklarında bir lineer kombinasyonu olduğunu tespit eder ve Euler-Mclaurin formülündeki eliminasyonda $1 = r_0 < r_1 < r_2 < \cdots$ için $h_n = r_n.h$ ile daha iyi bir yaklaşıklık üretir. 1903'te ***R. M. Milne***, π için ***Huygens***'in (2.23)'teki fikrini ***Saigey***'in denklemlerinde determinantlar kullanarak geliştirdi. İronik olarak, bu sonuçlardan bazıları sonraki yazarlar tarafından yeniden keşfedildi. ***Lewis Fry Richardson***, ilki 1910'da ve ikincisi 1927'de olmak üzere bu ekstrapolasyonu ilk adımda h^2 katsayılarına göre yeniden düzenledi ve buna "***h^2-ekstrapolasyonu***" ve ikinci adımdakine ise "***h^4-ekstrapolasyonu***" adını verdi. Onu destekleyen, daha doğrusu bu ekstrapolasyonu onun adına kotarmaya çalışan vatandaşı ***J.A. Gaunt***, bu konuda şunları yazar: "*h'nin 4. kuvvetinin ötesine genişletmede önemli bir zorluk olmayacaktır; ama öyle bir inceliğin pratik değeri az olurdu (!) (… there would be no essential difficulty in extending the expansion beyond the fourth power of h; but such a refinement would have little practical value (!))*". İşte bu açıklama ***Richardson***'un, neden bu ekstrapolasyona o adı verdiğini açıklar. Çünkü ***Richardson*** ve ***Gaunt***'un bu ekstrapolasyon hakkında yaptıkları çalışma ***Saigey***'inkinden farklı değildi (Bkz. "*The Collected Papers of Lewis Fry Richardson, Vol. I/The deferred approach to the limit, p. 36-37, Ordinary differential equations, p. 37-41*". Siz, bu kitaptaki "***1927:1 The Deferred Approach To The Limit. Part I-Single Lattice***" bölümüne bakacaksınız). 1936'da ise ***K. Kommerel***, ***Huygens***'in orijinal fikrinden hareketle ***Saigey***'in denklemlerinden ***Milne***'nin prosedürüne eşdeğer bir yaklaşıklıklar dizisi elde eder ve π için kullandığı tabloyla Romberg şemasının gerçek kâşifi olarak anılabilinir. 1955'te ***Romberg***, ilkin trapez yaklaşıklıkları için tekrarlı olarak bir eliminasyon kullandı ve bunu ***Lothar Collatz***'ın "*Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, 1951*" kitabına teklif etti ([12]).

Table of approximated values by increasing order

Interval length	Remainder of order: h^2	h^4	h^6	h^8
$8h$	$T_1 = 0.78539\ 8163$			
	$U_1 = 1.11072\ 0735$			
	0.948059449			
$4h$	$T_2 = 0.94085\ 9449$	$S_2 = 1.00227\ 9878$		
	$U_2 = 1.02617\ 2153$	$V_2 = 0.99798\ 9293$		
		1.000134585		
$2h$	$T_4 = 0.98711\ 5801$	$S_4 = 1.00013\ 4584$	$R_4 = 0.99999\ 1566$	
	$U_4 = 1.00645\ 4543$	$V_4 = 0.99988\ 2006$	$W_4 = 1.00000\ 8187$	
h	$T_8 = 0.99678\ 5172$	$S_8 = 1.00000\ 8296$	$R_8 = 0.99999\ 9876$	$Q_8 = 1.00000\ 0008$
	U_8=1.001608189	V_8=0.999992738	W_8=1.000000120	X_8=0.999999992

* For example, L. Collatz, *Numerische Behandlung vor Differentielgleichungen*, Springer, 1951, p. 6, equation (1.7)

Tablo 2.1. ***Romberg***'in (1.55)'teki integraline ait alt ve üst sınır yaklaşımları, *Dr. Lothar Collatz: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, 1951*. Bu tablonun ilk sütunundaki değerler I'ya E'siz doğal yaklaşımlar yani (1.11)'deki yaklaşıklıklar olup 2, 3 ve 4. sütundaki değerler E'li yaklaşımlardır (ki tablodaki kırmızı renkli veriler, ***Jean Luc Chabert***'in kitabının 454. sayfasındaki tablosundaki hatalı verilerini ve önem vermediği en alt satırdaki ek verileri gösterir).

Prosedür ***Eduard L. Stiefel***'in sentezleri ve 1961'de ***Friedrich L. Bauer***'in hata analizinden sonra en geniş şekliyle bilinir oldu. Fakat ***Romberg***, 1955'te (2.2)'yi nümerik integraller için kullanınca birden kıyamet koptu. Çünkü (2.2) ya çokgen algoritmalarında π için kullanılıyordu ya da diferansiyel denklemlerin çözümlerinde!

Çok ilginçtir, ***Romberg***'in (2.2)'yi kullanması tıpkı ***Saigey***'deki gibi ilkel idi. Çünkü onun bu ekstrapolasyon için orijinal kullanımını (1.25)-(1.27)'de açık bir şekilde görmekteyiz. Fakat ***Jean Pierre Laurent***, 1963'te bu ilkel iteratif kullanımı en mükemmel şekle sokarak,

$$(2.2)\quad E_{n+1,k} = \frac{4^k E_{n+1,k-1} - E_{n,k-1}}{4^k - 1} + O\left(h_n^{2k+2}\right)$$

iterasyonuyla Romberg Metodu'nun dünya genişliğinde bilinmesine neden oldu!

Burada başlangıç değerleri (1.11)'e göre (ki bu, onların ilkel tanımlamasıdır. Doğrusu (2.5)'tedir),

([11]) ***Saigey***'e hak vermemek mümkün değil; çünkü 4. algoritmaya karşılık gelen h^8 için ispat oldukça ağırlaşıyordu ve yukarıdaki algoritmalara ait kesirlerin paydalarında ardışık tek sayıların çarpım dizisi olarak yanlış bir varsayımda bulundu. Fakat mühendis ve geometrici ***Guerin***, bu diziyi Mersenne asal formülündeki $p = 2n$ için $M_{2n} = 2^{2n} - 1$ şeklinde olduğunu gösterip düzeltti (Bkz. "*The History of Extrapolation Methods in Numeric Analysis/2. From Archimedes to Richardson, p. 5*").

([12]) Bu kitabı sırf merakımı gidermek için KISSLY'den 6 $'a satın aldım. Yani kitap okumak bile parayla. Çünkü bu kitabı internetten bedavaya bulmanız mümkün değil. Fakat KISSLY'nin bana verdiği kitap 1955 basımı çıktı, iyi mi! Ama bu da ***Romberg***'in içinde bulunduğu durumu anlatmaya yeterlidir. Özetle, ***Romberg*** nerde ise ben de ordayım!

$$(2.3)\quad E_{n,0} = K_n, T_n$$

olmak üzere Tablo 2.1'deki ***Romberg***'in örneği için

$$(2.4)\quad K_n = E_{n,0}(K) < E_{n,1}(T) < E_{n,2}(K) < E_{n,3}(T) < \cdots < I < \cdots < E_{n,3}(K) < E_{n,2}(T) < E_{n,1}(K) < E_{n,0}(T) = T_n$$

sıralaması geçerli olur!

Dijital Çağ'ın Başlangıcında Romberg Metodu

Burada hemen *"Bu metot **Romberg**'ten önce neden görülemedi?"* sorusu için ***Jean Luc Chabert*** gibi hemen kısa bir algoritmalar tarihçesine girecek olursam; ***Jean Pierre Laurent***, (2.2)'yi verdiğinde tarihler, 1963'ü gösteriyordu ve ilk bilgisayar 1947'de IBM'in ENIAC'iyle çoktan yapılmıştı bile! ***D. F. Ferguson***, 1947'de bir hesap makinesiyle π'nin 809 ondalığını hesapladı ve 1949'da da ENIAC ile π'nin 2038 ondalığı hesaplandı. Bu son hesapta ***Machin***'in 1706'da keşfettiği ve yakınsaklığı son derece hızlı olan $\frac{\pi}{4} = 4\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{5} - \mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{239}$ ünlü formülü kullanıldı. Rivayete göre ***Machin***, bu formülle 1 saat içinde π'nin 100 ondalığını topladı (!). Yani ***Romberg*** ve ardılları tam da dijital çağın başlangıcında (2.2)'yi vermişlerdi ve bu formül nümerik integralde çığır açıyordu. Çünkü diğer metotlar bunun yanında nal topluyordu!

2.1.1. Richardson Ekstrapolasyonu Uygulamaları. Bu ekstrapolasyona ait 2 başat uygulama vardır.

2.1.1.1. Aritmetik Ortalama. Bu metot gerek (1.24), (1.33) ya da (1.45)'te görüldüğü üzere ***Romberg***'in asıl metodu, gerekse makalemizde (1.19)'da görüldüğü üzere Romberg metodunun geometrik yorumunun bir sonucudur.

Şu halde genel olarak (2.3)'e göre başlangıç değerleri,

$$(2.5)\quad E_{n,0}(K) = K_n, E_{n,0}(T) = T_n$$

olmak üzere (2.2)'den

$$(2.6)\quad \begin{cases} E_{n+1,k+1}(K) = \dfrac{4^{k+1}E_{n+1,k}(K) - E_{n,k}(K)}{4^{k+1}-1}, \\ E_{n+1,k+1}(T) = \dfrac{4^{k+1}E_{n+1,k}(T) - E_{n,k}(T)}{4^{k+1}-1} \end{cases}$$

ekstrapolasyonik yaklaşıklıkları,

$$(2.7)\quad E_{n+1,k+1}(K) = \frac{E_{n,k+1}(K) + E_{n,k+1}(T)}{2}$$

aritmetik ortalamasını gerçekler.

İspat. 1. Yol: İspat (2.6)'dakilerle MEM'e dayanır. Bu yüzden (2.7)'yi doğru olarak kabul eder ve (2.6)'daki K'ye ait ilk iterasyonda (2.7)'yi kullanırsak,

$$E_{n+1,k+1}(K) = \frac{4^{k+1}E_{n+1,k}(K) - E_{n,k}(K)}{4^{k+1}-1} = \frac{4^{k+1}\dfrac{E_{n,k}(K) + E_{n,k}(T)}{2} - \dfrac{E_{n-1,k}(K) + E_{n-1,k}(T)}{2}}{4^{k+1}-1} = \frac{\dfrac{4^{k+1}E_{n,k}(K) - E_{n-1,k}(K)}{4^{k+1}-1} + \dfrac{4^{k+1}E_{n,k}(T) - E_{n-1,k}(T)}{4^{k+1}-1}}{2}$$
$$= \frac{E_{n,k+1}(K) + E_{n,k+1}(T)}{2}$$

eşitliklerinden

$$(2.8)\quad E_{n+1,k+1}(K) = \frac{E_{n,k+1}(K) + E_{n,k+1}(T)}{2}$$

aritmetik ortalamayı yani (2.7)'yi bulmuş oluruz. Kaldı ki bu ispat aynı şekilde adım adım yapılarak MEM gereğince de bulunabilinir.

2. Yol: Bu, ispattan çok (2.7)'nin doğrulanmasıdır. Yani (2.6)'daki T'ye ait iterasyona göre,

$$E_{n,k+1}(T) = \frac{4^{k+1}E_{n,k}(T) - E_{n-1,k}(T)}{4^{k+1}-1} = \frac{4^{k+1}\left(2E_{n+1,k}(K) - E_{n,k}(K)\right) - \left(2E_{n,k}(K) - E_{n-1,k}(K)\right)}{4^{k+1}-1} = 2.\frac{4^{k+1}E_{n+1,k}(K) - E_{n,k}(K)}{4^{k+1}-1} - \frac{4^{k+1}E_{n,k}(K) - E_{n-1,k}(K)}{4^{k+1}-1}$$
$$= E_{n+1,k+1}(K) - E_{n,k+1}(K)$$

eşitliklerinden

$$(2.9)\quad E_{n+1,k+1}(K) = \frac{E_{n,k+1}(K) + E_{n,k+1}(T)}{2}$$

ile yine (2.7) elde edilir.

Sonuç 2.1. Burada Tablo 2.1'nin ilk sütunundaki veriler (1.31)'den bulunduktan sonra, bu veriler arasında (1.33) ya da (1.45) nedeniyle,

$$(2.10)\quad \begin{cases} T_2 = \dfrac{T_1 + U_1}{2}, & T_8 = \dfrac{T_4 + U_4}{2}, \\ T_4 = \dfrac{T_2 + U_2}{2}, & T_{16} = \dfrac{T_8 + U_8}{2} \end{cases}$$

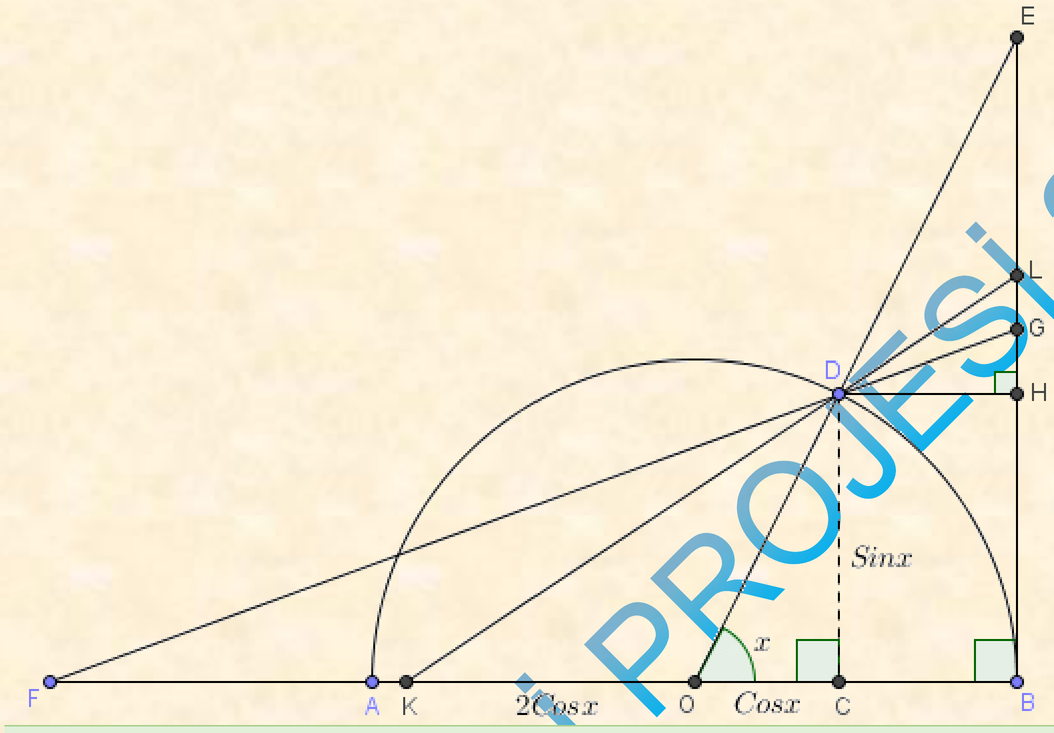
aritmetik ortalamalarının mevcut olduğunu biliyoruz.

Fakat aynı bağıntı (2.7) nedeniyle,

$$(2.11)\quad \begin{cases} S_4 = \dfrac{S_2 + V_2}{2}, & R_8 = \dfrac{R_4 + W_4}{2}, \quad P_{16} = \dfrac{Q_8 + X_8}{2} \\ S_8 = \dfrac{S_4 + V_4}{2}, & R_{16} = \dfrac{R_8 + W_8}{2}, \\ S_{16} = \dfrac{S_8 + V_8}{2}, & \end{cases}$$

iterasyonlarında da mevcuttur!

2.1.1.2. Snellius Algoritması. ***Snellius***, ***Ludolf Van Ceulen***'in π için verdiği 1596 ve 1610'daki 20 ve 32 ondalıklı yaklaşıklıkları daha kısa yoldan bulabilmek için ***Arşimet***'in çalışmasından hareketle geometriksel gözlemlere başladı. Fakat ***Snellius***, bunlara **"Teorem"** demek yerine ***Arşimet***'te olduğu gibi **"Önerme (Propositio)"** dedi ve ispatlarını yaptı. Daha sonra bu gözlemlerin doğru ve tam bir ispatı ***Huygens***'in eline geçti. ***Huygens***, bu ispatları inceledi ve yeni bir geometrik çalışmayla, yani



Şekil 2.1. ***Huygens***'in topladığı çalışma, *"De Circuli Magnitudine Inventa THEOR. 13-PROPOS. 16, S. 29-31"*.

şekline göre $\forall x \in \mathbb{R}$ için geçerli olan

$$(2.12)\quad M_8 = \frac{3\text{Sinx}}{2 + \text{Cosx}} < x < \frac{2\text{Sinx} + \text{Tanx}}{3} = M_7$$

algoritmalarını verdi. Bunlardan M_7'yi 1621'de ***Snellius*** ve M_8'i 1458'de [***Kardinal Nikola***](#) vermiştir ([13]) (Bkz. *"Approximations of π & Squaring The Circle"*, Sayfa 331). Fakat ***Snellius***, M_7'yi ***"Yansıma Kanunu"*** ile aynı yıl keşfetmesine rağmen bu kanunu yayınlamadı. Çünkü Yansıma Kanunu daha önceden 984'te İranlı matematikçi ***İbn Sahl*** tarafından keşfedilmişti. ***Snellius***'un yayınlamadığı bu kanun ve yukarıdaki çalışma daha sonra ***Huygens*** tarafından yayımlandı!

Şimdi ***Huygens***'in çalışmasına bakarsak; O merkezli ve [AB] çaplı birim çemberde, çemberin çapı $|AF| = 1$ br yani yarıçap kadar uzatılıyor. Daha sonra çember üzerinde herhangi bir D noktası alınıyor ve bu noktadan O ve F'den birer doğru geçiriliyor. Bu doğruların B'deki teğetle kesim noktaları E ve G'dir. Burada H noktası, [CD]'nin [BE] teğet parçası üzerindeki dik izdüşümü olarak alınmıştır.

Şu halde FCD ve FBG dik üçgenlerindeki benzerlikten,

$$\frac{|FC|}{|FB|} = \frac{|CD|}{|BG|} \Rightarrow \frac{2 + \text{Cosx}}{3} = \frac{\text{Sinx}}{|BG|} \Rightarrow |BG| = \frac{3\text{Sinx}}{2 + \text{Cosx}}$$

eşitliklerine göre

$$(2.13)\quad |BG| = \frac{3\text{Sinx}}{2 + \text{Cosx}}$$

ile M_8'i bulmuş oluruz.

Burada yeni olan M_7'dir. Peki, ***Snellius***, bunu nasıl keşfetti? Çünkü ***Huygens***'in yukarıdaki açıklaması bana danışıklıdövüş gibi geldi!

Bu konuda 22.7.2002'deki ***"Arşimet'in Metodu M.V."*** albümümde üzerinde durmamıştım ama Snellius Ekstrapolasyonu'nu keşfettikten sonra, aynı genelleştirmenin M_8 için de geçerli olup olmadığına ilişkin bir araştırma yaparken tekrar karşıma çıktı ve şu çözüm aklıma gelmişti (ki bu, ***Kardinal***'in ekstrapolasyonunun çıkış yeridir):

$$(2.14)\quad M_7 = M_8^{-1}((\text{Cosx})^{-1}, (\text{Sinx})^{-1}).$$

([13]) ***Kusalı Nikola*** çok ilginç bir kişiliktir. Kendisi bir Kardinal'dir ama matematiğe ve tarihe meraklıdır.

Demek ki ***Kardinal***'in ekstrapolasyonunun orijinini veren bu bağıntıya göre,

$$M_8^{-1}((Cosx)^{-1},(Sinx)^{-1}) = \left(\frac{3(Sinx)^{-1}}{2+(Cosx)^{-1}}\right)^{-1} = \left(\frac{3.\frac{1}{Sinx}}{2+\frac{1}{Cosx}}\right)^{-1} = \left(\frac{\frac{3}{Sinx}}{\frac{2Cosx+1}{Cosx}}\right)^{-1} = \left(\frac{3Cotx}{2Cosx+1}\right)^{-1} = \frac{(2Cosx+1)Tanx}{3} = \frac{2Sinx+Tanx}{3} = M_7$$

dir. Burada ***Snellius***'un algoritmasının orijinal şekli, kırmızı renkle vurguladığım yerdedir. Çünkü ***Snellius***, kırmızı renkle gösterdiği algoritmada x açısını 3'e böler (Bkz. "*Approximations of π & Squaring The Circle*", Sayfa 331'in sol başındaki M_7'ye).

Snellius, muhtemelen ***Kardinal***'den kalma M_8'den M_7'ye geçerken böyle bir sıçrama yaptı. Çünkü Şekil 2.1'de bunu öngörmek kolay değildir. Örneğin, şekilde A ve D'den geçen bir doğru çizerseniz, bu doğru [BE] teğet parçası üzerinde L'nin biraz altında ama ona çok yakın bir şekilde geçer. Bunu ***Huygens***'in "*De Circuli Magnitudine Inventa*" kitabındaki Teorem 8-Önerme 8'de görmek mümkündür!

Şu halde ***Snellius***'un M_7 algoritması için çemberin çapı üzerinde O'dan $|OC| = Cosx$'in 2 katı kadar uzaklıkta K noktasını gözönüne alırsak (ki K noktası çemberin dışında da olabilir. Orijinalde ***Huygens***'in şekli böyledir. Ama orada K noktası C olarak gözükür. Yani K noktasının çemberin içinde ya da dışında olması D noktasının seçimine bağlıdır) KCD ve KBL dik üçgenlerindeki benzerlikten,

$$\frac{|KC|}{|KB|} = \frac{|CD|}{|BL|} \Rightarrow \frac{3Cosx}{2Cosx+1} = \frac{Sinx}{|BL|} \Rightarrow |BL| = \frac{(2Cosx+1)Tanx}{3} = \frac{2Sinx+Tanx}{3}$$

eşitliklerine göre

$$(2.15)\quad |BL| = \frac{2Sinx+Tanx}{3}$$

ile M_7'yi buluruz.

Fakat burada ***Huygens***'e ait orijinal bir şey varsa, o da şudur:

2.1.1.2.1. Π'de Huygens Algoritması. ***Pfaff*** (***Gauss***'un öğretmeni), 1800'de Arşimet Metodu'nu genelleştiren ve dairenin içine ve dışına çizilmiş düzgün n-genlerin,

$$(2.16)\quad nSin\left(\frac{\pi}{n}\right) = a_n < \pi < b_n = nTan\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

çevreleri için

$$(2.17)\quad a_{2n} = \sqrt{a_n b_{2n}},\ b_{2n} = \frac{2a_n b_n}{a_n+b_n}$$

iteratif algoritmalarını verdi (Bkz. "*Pfaff-Borchard-Schwab Algoritması*", S. 480. Daha detaylı bilgi ***"Arşimet'in Metodu M.V."*** albümümde mevcuttur).

Sözkonusu bu algoritmalar,

$$(2.18)\quad Sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{Sinx.Tan\left(\frac{x}{2}\right)}{2},\ Cscx + Cotx = Cot\left(\frac{x}{2}\right)$$

özdeşliklerinden elde edilmektedir (ki $x = \frac{\pi}{n}$ alınacaktır).

Aynı şekilde, ***Huygens***'in algoritması da,

$$(2.19)\quad a_n < \underbrace{a_{2n} + \frac{a_{2n}-a_n}{3}}_{Huygens-1654} < \pi$$

algoritmasına karşılık gelen

$$(2.20)\quad 2Sin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{2Sin\left(\frac{x}{2}\right) - Sinx}{3} = \frac{8Sin\left(\frac{x}{2}\right) - Sinx}{3} < x$$

özdeşliğinden elde edilmektedir. Fakat bunun şekildeki gösterimi epey bir zorlamaya gider. Yani buna göre D'den geçen doğru çemberin çapını K'nin hemen biraz solunda ve [BE] teğet parçasını da L'nin hemen altında keser!

Diğer taraftan, (2.19)'da a_n alt sınırına bağımlı Huygens algoritması, b_n üst sınırı için de geçerlidir. Dolayısıyla bu algoritma Richardson ekstrapolasyonundaki ilk algoritmadır!

Şimdi Snellius algoritması ile Huygens algoritması arasındaki ilişkiye bir bakalım. Bu gösterim π'de ve ekstrapolasyonda bir ilktir!

2.1.1.2.2. Π'de Snellius-Huygens Algoritmaları Arasındaki İlişki. ***Huygens***'in (ve şimdiye kadar kimsenin) farkedemediği bu ilişki için ***Pfaff***'ın verdiği harmonik ortalama ile aritmetik ortalama arasındaki

$$(2.21)\quad HO(a_n,b_n) = b_{2n} < \frac{a_n+b_n}{2} = AO(a_n,b_n)$$

ilişkisinde b_n için (2.19)'daki gibi bir algoritma elde etmek istersek,

$$\frac{4b_{2n}-b_n}{3} < \frac{4.\frac{a_n+b_n}{2}-b_n}{3} = \frac{2a_n+b_n}{3}$$

olduğundan

$$(2.22)\quad \pi < \cdots < \underbrace{\frac{4b_{2n}-b_n}{3}}_{\text{Huygens}-1654} \lessapprox \underbrace{\frac{2a_n+b_n}{3}}_{\text{Snellius}-1621}$$

eşitsizlikleri geçerli olur. Burada dikkat edilirse ***Huygens***, adını altında andığım algoritmayı vermez. Daha doğrusu, üst sınırlar için geçerli olan bu algoritma "*Oeuvres complètes. Tome XII. Travaux de mathématiques pures 1652-1656 (1910)*" kitabının 128-129. sayfalarındaki Teorem 5-Önerme 5'te ispatsız olarak verilir. Ayrıca bu teoremin devamı olarak, 168-169. sayfalarındaki Teorem 16-Önerme 19'da üst sınırlar ile ilgili bir diğer çıkarım verilir. Fakat bu çıkarımlar sadece birer nümerik gözlemden ibarettir!

Huygens, Önerme 28 (S. 42) ve Önerme 29 (S. 43-44)'da şu bağıntıyı verir (Bkz. "*Oeuvres complètes. Tome XII. Travaux de mathématiques pures 1652-1656 (1910)*"daki Theoreme XIII-Propositionis XVI, S. 158-162. Özellikle 158 ve 159. sayfaların sonuna bakınız):

$$(2.23)\quad \underbrace{a_{2n}+\frac{1}{3}(a_{2n}-a_n)}_{\text{Huygens}-1654} < a_{2n}+\frac{1}{3}(a_{2n}-a_n)+\frac{1}{3}.\frac{(a_{2n}-a_n)^2}{2a_{2n}+a_n} = \frac{3a_{2n}^2}{2a_{2n}+a_n} < \pi < \frac{2a_{2n}+b_{2n}}{3}.$$

Şimdi Snellius algoritmasının ekstrapolasyonda nasıl geçebileceğine bir bakalım. Ama bir şans eseri daha, burada da ***Snellius-Huygens*** ikilisini birlikte anacağım!

2.1.1.2.3. Ekstrapolasyonda Snellius-Huygens Algoritmaları. Bunun için (2.6)'daki ilk iterasyonda $k=0$ alırsak (1.19)'a göre ***Huygens***'in (2.23)'teki algoritmasından,

$$E_{n+1,1}(K) = \frac{4E_{n+1,0}(K)-E_{n,0}(K)}{4-1} = \underbrace{\frac{4K_{n+1}-K_n}{3}}_{\text{Huygens}-1654} = \frac{4.\frac{K_n+T_n}{2}-K_n}{3} = \underbrace{\frac{2T_n+K_n}{3}}_{\text{Snellius}-1621}$$

eşitliklerine göre (ki altına isimlerini altına yazdığım bu algoritmalar π'de yani (2.22)'de eşit değil, yaklaşık idiler),

$$(2.24)\quad E_{n+1,1}(K) = \frac{2T_n+K_n}{3}$$

şeklinde Snellius algoritmasına ulaşmış oluruz. Fakat buradaki sınırlar π'de terslenir yani yerleri değişir. Çünkü π'de T_n daima alt sınır ve K_n de daima üst sınırdır. Bu durumda (2.24)'ün π'de de geçerli olabilmesi için, $f(x)$'in konveks olması ya da konveks olduğu parçalarının mevcut olması gerekir (Bkz. "*Romberg İntegrali Kronolojim 1*").

Tarihi bilgilerimize göre (2.24) 1911'de ***Becker*** tarafından keşfedilmiştir (Bkz. "*Survey of Extrapolation Processes In Numerical Analysis/3. Numerical integration*", p. 442, (28)). Fakat ***Becker*** (2.24)'ün Snellius algoritması olduğundan habersizdir. Bu gerçek 2002'deki Snellius Ekstrapolasyonu nedeniyle 02.11.2016, 22:54'te dikkatimi çekti ve onu (1.19)'daki aritmetik ortalama özelliğindeki gibi bir özellik olarak kazandırmak benim için büyük bir onur oldu!

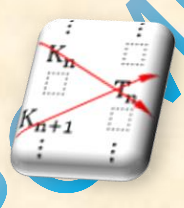
Şu halde Snellius algoritmasını ekstrapolasyona böylece kazandırdığımıza göre, bu algoritmanın bir diğer varyasyonunu için şu sonuca bir bakalım:

Sonuç 2.2. Eğer (2.24)'te (1.19)'daki aritmetik ortalama bağıntısını kullanırsak,

$$E_{n+1,1}(K) = \frac{2T_n+K_n}{3} = \frac{T_n+(T_n+K_n)}{3} = \frac{T_n+2K_{n+1}}{3}$$

eşitliklerinden şu algoritmayı elde ederiz ki bu, (2.24)'ün dualitesidir:

$$(2.25)\quad E_{n+1,1}(K) = \frac{T_n+2K_{n+1}}{3}.$$



Burada dikkat edilirse yandaki şemada (2.24) ve (2.25)'teki Snellius algoritmasının nasıl çalıştığı görülmektedir. Yani yukarıdaki ok işareti (2.24)'ü gösterir ve 2 katsayısı T_n'e gelirken, aşağıdaki ok işareti (2.25)'i gösterir ve 2 katsayısı bu sefer K_{n+1}'e gelir (ki K_{n+1} ile T_n'nin, eş sayıda eşit bölmelere sahip olduklarından, I'ya yaklaşımları hemen hemen eştir). Ancak Snellius algoritmasını bu ok işaretlerine göre nasıl alırsanız alın, her ikisi de aynı sonucu verir. Ama bunlardan değerli olanı (2.24)'tekidir. Neden?

Şimdi Snellius algoritmasından ne olacak? demeyelim; çünkü bunun da Aritmetik Ortalama'daki gibi bağıntısı vardır.

2.1.1.2.3.1. Richardson Ekstrapolasyonu'nun Snell Formu. Öncelikle Snellius algoritmasının (2.6)'daki ilk iterasyonda $k=0$ için

$$(2.26)\quad E_{n+1,1}(K) = \frac{2E_{n,0}(T)+E_{n,0}(K)}{3}$$

şeklinde olduğunu (2.24)'ten biliyoruz ve bunu eğer $k=1$ için aynı iterasyonda kullanırsak,

$$E_{n+1,2}(K) = \frac{16E_{n+1,1}(K)-E_{n,1}(K)}{15} = \frac{16.\frac{2E_{n,0}(T)+E_{n,0}(K)}{3}-\frac{2E_{n-1,0}(T)+E_{n-1,0}(K)}{3}}{15} = \frac{2.\frac{16E_{n,0}(T)-E_{n-1,0}(T)}{15}+\frac{16E_{n,0}(K)-E_{n-1,0}(K)}{15}}{3} =: \frac{2E_{n,0}^{(2)}(T)+E_{n,0}^{(2)}(K)}{3}$$

eşitliklerinden

$$(2.27)\quad E_{n+1,2}(K)=\frac{2E_{n,0}^{(2)}(T)+E_{n,0}^{(2)}(K)}{3}$$

iterasyonunu elde eder ve sonuçta bu işlemi diğer k'lar için yaparsak MEM gereğince,

$$(2.28)\quad \begin{cases} E_{n,0}^{(1)}(K)=E_{n,0}(K)=K_n, & E_{n,0}^{(k)}(K)=\dfrac{4^kE_{n,0}^{(k-1)}(K)-E_{n-1,0}^{(k-1)}(K)}{4^k-1}, \\ E_{n,0}^{(1)}(T)=E_{n,0}(T)=T_n, & E_{n,0}^{(k)}(T)=\dfrac{4^kE_{n,0}^{(k-1)}(T)-E_{n-1,0}^{(k-1)}(T)}{4^k-1} \end{cases}$$

olmak üzere

$$(2.29)\quad E_{n+1,k}(K)=\frac{2E_{n,0}^{(k)}(T)+E_{n,0}^{(k)}(K)}{3}$$

genel iterasyonunu elde etmiş oluruz. Yani Richardson ekstrapolasyonu Snell bağıntısına göre değişmedi; Snell formunda kaldı (ki bu durum Richardson ekstrapolasyonunun lineer olmasından ileri gelir. Ayrıca burada fizikçilerin jargonunu kullandım. Çünkü, onlar hep *"Snell Bağıntısı"* derler ya, ben de burada aynı jargonu kullandım).

Eğer Snell bağıntısını T_n ve K_n başlangıç değerlerine göre değil de Richardson ekstrapolasyonundaki iterasyonlara göre yazmak istersek şu sonuç çıkar:

2.1.1.2.3.2. Aritmetik Ortalama-Snellius Bağıntısı Arasındaki İlişki. Genel olarak, f(x) ne olursa olsun I'ya (2.7)'deki aritmetik ortalamadan biraz daha yakın Snell ortalaması vardır. Örneğin, Tablo 2.1'deki örneğe göre (2.24) ile (2.25)'teki Snell bağıntılarının E'ye göre genel ifadelerini gözönüne ele alırsak RİK 2'deki (2.15) ya da ters sıralamasına göre

$$(2.30)\quad E_{n+1,k+1}(K)\gtreqless I\gtreqless\frac{2E_{n,k+1}(T)+E_{n,k+1}(K)}{3}\left(=\frac{E_{n,k+1}(T)+2E_{n+1,k+1}(K)}{3}\right)$$

eşitsizlikleri geçerli olur. Bu eşitsizliklerdeki yön (küçük ya da büyük olması yönü) k değerine göre sıralı olarak değişir ve aritmetik ortalama ile Snell ortalaması I'nın ters yönlerinde kalırlar.

Çünkü,

$$E_{n+1,k+1}(K)\overset{(2.7)}{\triangleq}\frac{E_{n,k+1}(T)+E_{n,k+1}(K)}{2}\gtreqless\frac{2E_{n,k+1}(T)+E_{n,k+1}(K)}{3}\Rightarrow 3E_{n,k+1}(T)+3E_{n,k+1}(K)\gtreqless 4E_{n,k+1}(T)+2E_{n,k+1}(K)\Rightarrow E_{n,k+1}(K)\gtreqless E_{n,k+1}(T)$$

eşitsizliklerinden

$$(2.31)\quad E_{n,k+1}(K)\gtreqless E_{n,k+1}(T)$$

sonucu geçerlidir.

2.3.3. E-ATA 1 Algoritmalarının Uygulama Alanları: Genel olarak, E-ATA 1 algoritmalarının uygulama alanları, polinomal ekstrapolasyonun, örneğin Richardson ekstrapolasyonu, uygulama alanları ile aynıdır. Yani E-ATA 1 algoritmaları yalnızca yakınsak çokgen algoritmaların yakınsaklığını hızlandıran bir metot değildir; aynı zamanda yakınsak diziler, seriler ve integrallerin de yakınsaklığını hızlandıran bir metottur. Örneğin yakınsak integrallerin nümerik hesabında taban olarak Richardson ekstrapolasyonunu kullanan Romberg İntegrasyon Metodu verilebilir.

Buna göre E-ATA 1 algoritmaları şu alanlarda kullanılabilinir:

1. Çokgensel Algoritmalar,
2. Nümerik Türev,
3. Nümerik İntegral.

Alıntı 2.1. 2003'te E-ATA 1 Algoritmaları'nın 3 maddede hangi alanlarda kullanılacağını belirtmiştim (Bkz. *"ATA 1 Algoritmaları", S. 39*). İnanılır gibi değil; 14 yıl önce ama ***Romberg*** öldükten sonra, muhtemelen 2003 yazında, orada **"Romberg İntegrasyon"**ndan bahsetmişim!

2.2. E-ATA 1 Algoritmaları'ndan Transferler. Bu makaleyi yazmamın nedeni, RİK 1 ve RİK 2 ve burada Bölüm 1'de görüldüğü üzere *Romberg* ile çakışmamız idi. Fakat 2003'teki E-ATA 1 Algoritmaları bu iş için tam biçilmiş kaftandır!

Peki, E-ATA 1 Algoritmaları nereden çıktı?

Bunun hikâyesi çok uzun fakat kısaca anlatmam gerekirse, 22.07.2002'deki ***"Arşimet'in Metodu M.V."*** albümünden (ki bu albüm, A4 formatında 243 sayfalık 10 adet e-kitaptan oluşur) sonra 31.08.2002'de ***Eutokios***'un *"Daire Çevresi Ölçmesi Hakkında"* adlı yorumunu albümdeki çalışmalarla modernleştirmiştim. Fakat ben, tam albümde π'nin Geometrik Dönemi'ni (M.Ö. 20. yy-M.S. 17. yy) kapattığımı düşünürken karşıma ***Kardinal Nikola***, ***Snellius*** ve ***Huygens*** tarafından verilen ilk ekstrapolasyon formülleri çıktı. Aslında bunlardan albüm çalışmaları sırasında ***Snellius***'tan bahsetmiştim ve o yüzden albümdeki çalışmalardan sonra soluğu hemen Snellius algoritmasında aldım. Fakat bu algoritmadan ekstrapolasyon çıkartmak kolay olmadı; çünkü aşama aşama (4 versiyondur) Snellius Ekstrapolasyonu'nun gerçekte ne anlam ifade ettiğini gözlemlemeliydim. Sonra işin teorisine girdim ve Richardson ekstrapolasyonu, Snellius ekstrapolasyonu, ***Kardinal***'in ekstrapolasyonunu ve daha birçok ekstrapolasyon yazdım. İşin ilginç yanı, lineer ekstrapolasyonu çifte formda yazmıştım. Hem de 2003'te. Buna göre Richardson ekstrapolasyonu her 2 formdan da daha ilk seferinde elde edilmekte idi. Ama ben o sırada yalnızca π ile ilgilendiğim için yukarıdaki Alıntı 2.1'de görüldüğü üzere E-ATA 1 Algoritmaları'nın hangi alanlarda kullanılabileceğine ilişkin bir not bırakmıştım. Evet, orada Romberg İntegrasyonu'ndan da bahsetmişim! Ama bu notu büyük bir olasılıkla ***Werner Romberg*** öldükten sonra, 2003 yazında yazdım. Yani o sırada ***Romberg*** ile ilgilenmiyordum, dolayısıyla ***Romberg***'in öldüğünü ancak bu çalışmaya başladığım zaman 2016'da öğrendim. Aynı şekilde, Snellius Ekstrapolasyonu'nu yazarken (10.09.2002/01:45-27.10.2002/05:40) şimdiki Hollanda Kralı'nın babasının vefat etmiş olduğundan da haberim yoktu. Yine, bu üzücü olaydan haberim, bu kitabı makale aşamasında yazarken Google'da bir araştırma sırasında, *"Prens Claus Fonu"* adlı web sitesinin anasayfasının sol tarafında Prens ***Claus von Amsberg***'in *"Kültür temel ihtiyaçtır! (Culture is a basic need)"* ilgili bir sözünü görmüş ve onu daha yakından tanımak isteyince öldüğünü öğrendim!

Şimdi bu kısa bilgilendirmeden sonra E-ATA 1 Algoritmaları'ndan transferlerimize geçebiliriz.

2.2.1. Kardinal Nikola Ekstrapolasyonu, 1458-2003, 2018. Eğer (2.6)'daki ilk ekstrapolasyonda (2.7)'deki aritmetik ortalamayı kullanılırsak,

$$E_{n+1,k+1}(K)=\frac{4^{k+1}E_{n+1,k}(K)-E_{n,k}(K)}{4^{k+1}-1}=\frac{4^{k+1}.\frac{E_{n,k}(K)+E_{n,k}(T)}{2}-E_{n,k}(K)}{4^{k+1}-1}$$
$$=\frac{2^{2k+1}E_{n,k}(T)+\left(2^{2k+1}-1\right)E_{n,k}(K)}{2^{2k+2}-1}$$

eşitliklerinden

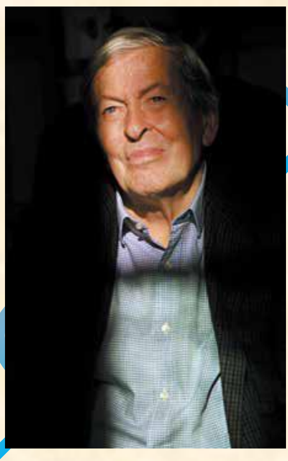
$$(2.32)\quad E_{n+1,k+1}(K)=\frac{2^{2k+1}E_{n,k}(T)+\left(2^{2k+1}-1\right)E_{n,k}(K)}{2^{2k+2}-1}+O\left(h_n^{2k+4}\right)$$

ekstrapolasyonunu elde etmiş oluruz. Bu, (2.6)'daki ilk Richardson ekstrapolasyonunun çifte sınırlı yazımıdır. Ben, bu ekstrapolasyonu sağdaki Alıntı 2.2'deki (150)'de görüldüğü üzere 2003'te keşfetmiş ama bunun ***Kardinal***'e ait olduğunu bilmiyor, ***Huygens***'e ait olduğunu zannediyordum. Fakat 20.06.2018, 06:00'da ***Kardinal***'in algoritmasından Snellius ekstrapolasyonunda olduğu gibi bir ekstrapolasyon çıkarttığımda karşıma yine bu çıktı (Bkz. ***"Romberg İntegrali 2016-2020"***, EK 4). Ama buradakinin daha kolay olduğunu söyleyebilirim. Yani ***Huygens*** (2.23)'te ***Kardinal***'in algoritmasından yeni bir çıkarımda bulunacağına, onu genelleştirseymiş (2.32)'yi görecekmiş, iyi mi!

Burada eğer $k=0$ alırsak,

$$(2.33)\quad E_{n+1,1}(K)=\frac{2T_n+K_n}{3}$$

şeklinde yine (2.24)'teki Snellius algoritmasını bulmuş oluruz!



Prens ***Claus von Amsberg*** bir keresinde dedi ki: *"Belirleyici güç; kişinin kültürü, dili ve yaşam tarzının saygı gördüğü çevrede, gelişme ve ilerlemenin yalnızca toplumun kendisi tarafından gerçekleştirebildiği büyüme farkındalığıdır. Kişinin kendi kültürü ve geleneklerine saygısı ve güveni olmaksızın ilerlemenin gerçekleşmesi zordur (Prince Claus once said, 'The decisive factor is the growing realization that development and progress can be realized only by people themselves, in an environment where there is respect for one's own culture, own language and own lifestyle. Without respect and trust in one's own culture and traditions, progress is difficult to achieve.'"), Annual Report 2018-Prince Claus Chair, S. 31".*

1.4.3. ATA 1-1-s-3 ALGORİTMALARI (Ters Trigonometrik ve Hiperbolik Fonksiyonları Veren Poligon Algoritmaları ve Tersleri için Başlangıç Değeri Hızlandırılarak Genelleştirilmiş Richardson Ekstrapolasyon Algoritması): Yine Not 3&4'teki 2. sonuçları genelleştirebiliriz. Bu durumda

$$(276)\quad C_m^{(0)}(\alpha)=y_m(\alpha),\,C_m^{(n)}(\alpha)=R_m^{(n)}(\alpha)$$

dizileri gözönüne alınırsa,

$$(277)\quad C_{tm}^{(n+s)}(\alpha)=\frac{2^{2m(n+s)}C_{(t+1)m}^{(n+s-1)}(\alpha)-C_{tm}^{(n+s-1)}(\alpha)}{2^{2m(n+s)}-1}+O\left(\left(\frac{\alpha}{2^m}\right)^{2(n+s)+2}\right)$$

olmak üzere

$$(279)\quad C_m^{(n+s)}(\alpha)\xrightarrow{n,s\to\infty}\alpha$$

yakınsamaları gerçekleşir.

Alıntı 2.3. ATA 1-1-s-3 Algoritması, 13.05.2003, 23:14, A1A, S. 51.

1.2.2.1.1. ATA 1-1-2-2-1-1 ALGORİTMASI (Ters Trigonometrik Fonksiyonları Veren Poligon Algoritmaları'nın Tersleri için Başlangıç Değeri Hızlandırılmış Snellius-Huygens Algoritması'nın 1. Formülü): $S_m^{(n)}(\alpha)$ ifadesi (25)'e göre Kosekant Serisi için $M_m^{(n)}(\alpha)$ ve Kotanjant Serisi için $N_m^{(n)}(\alpha)$ olarak gözönüne alınırsa, (125)'ten

$$(147)\quad M_m^{(0)}(\alpha)=a_m^{-1}(\alpha),\,N_m^{(0)}(\alpha)=b_m^{-1}(\alpha)$$

başlangıç değerleri için (126)'dan

$$(148)\quad \begin{aligned}M_m^{(n)}(\alpha)&=\frac{2^{2kn}M_{m+k}^{(n-1)}(\alpha)-M_m^{(n-1)}(\alpha)}{2^{2kn}-1},\\ N_m^{(n)}(\alpha)&=\frac{2^{2kn}N_{m+k}^{(n-1)}(\alpha)-N_m^{(n-1)}(\alpha)}{2^{2kn}-1}\end{aligned}$$

olmak üzere

$$(149)\quad \begin{aligned}M_m^{(n)}(\alpha)&=\alpha^{-1}+\frac{2\left(2^{2n+1}-1\right)B_{2n+2}}{2^{(k n+2m)(n+1)}(2n+2)!}\alpha^{2n+2}+O\left(\left(\frac{\alpha}{2^m}\right)^{2n+4}\right),\\ N_m^{(n)}(\alpha)&=\alpha^{-1}-\frac{2^{2n+2}B_{2n+2}}{2^{(k n+2m)(n+1)}(2n+2)!}\alpha^{2n+2}+O\left(\left(\frac{\alpha}{2^m}\right)^{2n+4}\right)\end{aligned}$$

sistemi elde edilir. Bu sistem α^{-1}'e göre çözümlenirse,

$$(150)\quad S_m^{(n)}(\alpha)=\frac{2^{2n+1}M_m^{(n)}(\alpha)+\left(2^{2n+1}-1\right)N_m^{(n)}(\alpha)}{2^{2n+2}-1}+O\left(\left(\frac{\alpha}{2^m}\right)^{2n+4}\right)$$

olarak bulunur. Bu formüle *"Ters Trigonometrik Fonksiyonları Veren Poligon Algoritmaları'nın Tersleri için Başlangıç Değeri Hızlandırılmış Snellius Algoritması'nın 1. Formülü"* denir.

Bu dizinin elemanlarının tersleri,

$$(151)\quad S_m^{-(0)}(\alpha)<S_m^{-(1)}(\alpha)<S_m^{-(2)}(\alpha)<\cdots<S_m^{-(n)}(\alpha)<\cdots<\alpha$$

şeklinde daima bir alt sınırdır ve herhangi bir m doğal sayısı için

$$(152)\quad S_m^{-(n)}(\alpha)\xrightarrow{n\to\infty}\alpha$$

olur ki, bundan dolayı bu formüle de *"Ters Trigonometrik Fonksiyonları Veren Poligon Algoritmaları'nın Tersleri için Başlangıç Değeri Hızlandırılmış Huygens Algoritması'nın 1. Formülü"* denir. O halde

$$(153)\quad H_m^{(n)}(\alpha)=S_m^{-(n)}\left(\alpha^{-1}\right)$$

eşitliği ortaya çıkar.

Alıntı 2.2. ATA 1-1-2-2-1-1 Algoritması, A1A, S. 29-31.

2.2.2. h_{mn}^{2k}-ekstrapolasyonu. $\forall m,n\in\mathbb{N},\forall k\in\mathbb{Z}^{+}$ ve $X:=K,T$ için

$$(2.34)\quad ATA_{nm,k}(X)=\frac{4^{km}ATA_{(n+1)m,k-1}(X)-ATA_{nm,k-1}(X)}{4^{km}-1}+O\left(h_{nm}^{2k+2}\right)$$

şeklinde genel bir ekstrapolasyon vardır. Bu, 14.05.2003 tarihli ***"ATA 1-1-3 Algoritmaları"***ndaki soldaki Alıntı 2.3'te geçer!

Burada m ***"Genleşme Katsayısı"*** olduğundan buna ***"Genleşme Formundaki Ekstrapolasyon"*** denir ve m katsayısı bu ekstrapolasyonlar için ayırt edici bir özelliktir. Çünkü bu takdirde ortak farkı m olan aritmetik dizi indisli $X_0,X_m,X_{2m},X_{3m},\cdots$ yaklaşıklıklarına ihtiyaç vardır. Örneğin, $m=1$ için (2.43)'teki Richardson ekstrapolasyonunda $X_0,X_1,X_2,X_3,\cdots$ yaklaşıklıkları gerekirken $m=2$ için (2.44)'teki ekstrapolasyon için $X_0,X_1,X_2,X_3,\cdots$ yaklaşıklıkları gerekir (Bkz Tablo 2.2&2.3). Yani birindeki yaklaşıklıklar diğerinde kullanılamaz!

Bu genel ekstrapolasyonun bir diğer tanımı şöyledir: Bilindiği gibi genelde h_n farkı h olarak kullanıldığından

$$\underbrace{h_{mn}^{2k}}_{\text{Özelde}}=\left(\left(\underbrace{h_n}_{=h}\right)_m\right)^{2k}=\left(h_m\right)^{2k}=\underbrace{h_m^{2k}}_{\text{Genelde}}$$

eşitlikleri nedeniyle (2.34)'e ***"h_m^{2k}-ekstrapolasyonu"*** da denilebilinir. Ancak $m = 1$ için özel bir durum vardır; çünkü bu durumda (2.43)'teki ekstrapolasyon elde edilir ki ***Lewis Fry Richardson***, buna ***"h^{2k}-ekstrapolasyonu"*** der (Bkz. *"VIII. The Deferred Approach to the Limit: Part I. Single Lattice by Lewis Fry Richardson, Part II. Interpenetrating Lattices by Arthur Gaunt"*).

Bir Anı

Falih Rıfkı, ***Mustafa Kemal***'in **"ATATÜRK"** soyadını alması nedeniyle 25 Temmuz 1934 tarihli Hakimiyet-i Milliye gazetesindeki başyazısını şöyle yazar (ki kendisinin de aynı gazetenin manşetinde ve ilk sırada **"ATAY"** soyadı aldığını görüyoruz. Onu *"Tetkik-i Mezalim Heyeti"*nde ***Halide Edip***'in sol arka tarafında sigara içerken bir kez daha görüyoruz. Bkz. 0:22'ye):

ATATÜRK

En Büyük Türk odur. ***Atatürk*** onun soyadı değildir; ***Atatürk*** onun kendisidir.

Bu ad, Türk tarihinin üstünde bir sancak gibi dalgalanacaktır; Türk tarihinin dünü, bugün gibi; yarını onun gölgesi altındadır.

Mustafa Kemalsiz Türk, Türksüz ***Mustafa Kemal*** anlaşılamaz: İkisi birbirinde buluştular; birbiri içinde sürüp gideceklerdir.

Mustafa Kemal, ona babasının taktığı Arapça bir ad, Gazi, ona ulusunun verdiği Arapça bir sandı (ünvandı). Soyunu ölümden kurtarmış olanı, soy dilinin en öz, en arı söz ile bezemek gerekti. Ata'dan Öz Türk'ten arı ne söz bulunabilir?

Türklük, tükenmez bir kaynaktır. O, bir sızıntının izinden giderek, bu kaynağın üstünde yüzlerce kat bağlayan taş toprak yığınlarını kaldırıp attı. Yaz güneşi gibi aydın, yaz aydınlığı gibi gür, içeni kandıran, dokunduğunu dirilten, bir Türk türküsünün sesi ile akan bu su, işte o kaynaktan geliyor.

Adı kendine, kendi adına kutlu olsun!

Falih Rıfkı ATAY.

İşte Alıntı 2.3'teki (277), dolayısıyla (2.34)'teki ekstrapolasyonun adı buradan gelir (ki gerçekte bu, ***Atatürk***'ün şahsında toplanmış tüm atalara yapılan bir göndermedir). Bu, 15 Temmuz 2000'de üçgenin alanı için keşfettiğim ***"ATA Formülü"*** ile birlikte ***"ATA 1 Algoritmaları"***nda Cumhuriyetimizin 80. Yıldönümünde ***ATA***'mıza verdiğim 2. armağan idi!

Eutokios'un Kesirlerine Bakmak Gerekiyor!

Şu halde (2.34)'e göre (ki bunu da "A" ile kısaltalım) ilkin, $n = 1 = k$ için

$$(2.35)\quad A_{2m,1}(X) = \frac{4^m X_{2m} - X_m}{4^m - 1}$$

ekstrapolasyonunu elde ederiz ki bu, ***Huygens***'inkinden farklıdır!

Şimdi ***Huygens***'ten kalma geleneğe göre ***Eutokios***'un kesirlerini analiz edersek; ***Huygens***, 1654'te alt sınırlar için

$$(2.36)\quad A_{2,1}(X) = \frac{4X_2 - X_1}{4-1} = \frac{4 \times \dfrac{96 \times 66}{2017\frac{1}{4}} - \dfrac{48 \times 66}{1009\frac{1}{6}}}{3} = 3\frac{6911991}{48857795} = 3.141(471612)$$

ve üst sınırlar için

$$(2.37)\quad A_{2,1}(Y) = \frac{4Y_2 - Y_1}{4-1} = \frac{4 \times \dfrac{96 \times 153}{4673\frac{1}{2}} - \dfrac{48 \times 153}{2334\frac{1}{4}}}{3} = 3\frac{12366975}{87272939} = 3.141(704578)$$

değerlerini verirken, $m = 2$ için alt sınırlar için

$$(2.38)\quad A_{4,1}(X) = \frac{4^2 X_4 - X_2}{4^2 - 1} = \frac{16 \times \dfrac{96 \times 66}{2017\frac{1}{4}} - \dfrac{24 \times 240}{1838\frac{9}{11}}}{15} = 3\frac{115450911}{816058315} = 3.141(473849)$$

ve üst sınırlar için

$$(2.39)\quad A_{4,1}(Y) = \frac{4^2 Y_4 - Y_2}{4^2 - 1} = \frac{16 \times \dfrac{96 \times 153}{4673\frac{1}{2}} - \dfrac{24 \times 153}{1162\frac{1}{2}}}{15} = 3\frac{5134773}{36219625} = 3.141(767702)$$

sonuçlarının elde edildiklerini yani ***Huygens***'inkilerle hemen hemen aynı olduklarını görürüz. Oysa bu sonuçların gerçekte 6 ama ***Arşimet***'in $\sqrt{3}$ için vermiş olduğu kesirlere göre ise minumumda 4 ama maksimumda 5 ondalıkla doğru olması gerekiyordu!

İşte 2. analizimizdeki bu sonuçlar, ilk analizimizdeki RİK 2'deki Tablo 2.2'deki sonuçları doğrular!

İkinci olarak, (2.34)'ten

$$A_{m,k+2}(X) = \frac{4^{m(k+2)}A_{2m,k+1}(X) - A_{m,k+1}(X)}{4^{m(k+2)} - 1} = \frac{4^{m(k+2)} \cdot \frac{4^{m(k+1)}A_{3m,k}(X) - A_{2m,k}(X)}{4^{m(k+1)} - 1} - \frac{4^{m(k+1)}A_{2m,k}(X) - A_{m,k}(X)}{4^{m(k+1)} - 1}}{4^{m(k+2)} - 1}$$
$$= \frac{A_{m,k}(X) - (4^m + 1)4^{m(k+1)}A_{2m,k}(X) + 4^{m(2k+3)}A_{3m,k}(X)}{(4^{m(k+1)} - 1)(4^{m(k+2)} - 1)}$$

açılımını gözönüne alırsak

> **1.3.1.2. ATA 1-1-3-1-2 ALGORİTMASI (Ters Trigonometrik ve Hiperbolik Fonksiyonları Veren Poligon Algoritmaları için Başlangıç Değeri Hızlandırılarak Genelleştirilmiş Richardson Ekstrapolasyon Algoritması'nın 1. Formülü):** (204)'den (190)'a göre,
>
> $$\text{(208)}\quad \begin{aligned} T_m^{(n)}(\alpha) &= \alpha + (-1)^n \frac{a_{n+1}}{2^{(kn+2m)(n+1)}a_0}\alpha^{2n+2} + (-1)^n \frac{(2^{2k(n+1)} - 1)a_{n+2}}{2^{(kn+2m)(n+2)+kn}(2^{2k} - 1)a_0}\alpha^{2n+4} + O\left(\left(\frac{\alpha}{2^m}\right)^{2n+6}\right), \\ T_{2m}^{(n)}(\alpha) &= \alpha + (-1)^n \frac{a_{n+1}}{2^{(kn+4m)(n+1)}a_0}\alpha^{2n+2} + (-1)^n \frac{(2^{2k(n+1)} - 1)a_{n+2}}{2^{(kn+4m)(n+2)+kn}(2^{2k} - 1)a_0}\alpha^{2n+4} + O\left(\left(\frac{\alpha}{2^m}\right)^{2n+6}\right), \\ T_{3m}^{(n)}(\alpha) &= \alpha + (-1)^n \frac{a_{n+1}}{2^{(kn+6m)(n+1)}a_0}\alpha^{2n+2} + (-1)^n \frac{(2^{2k(n+1)} - 1)a_{n+2}}{2^{(kn+6m)(n+2)+kn}(2^{2k} - 1)a_0}\alpha^{2n+4} + O\left(\left(\frac{\alpha}{2^m}\right)^{2n+6}\right) \end{aligned}$$
>
> sistemi elde edilir. Bu sistemin α'ya göre çözümü,
>
> $$\text{(209)}\quad B_m^{(n)}(\alpha) = \frac{T_m^{(n)}(\alpha) - 2^{2m(n+1)}(2^{2m} + 1)T_{2m}^{(n)}(\alpha) + 2^{2m(2n+3)}T_{3m}^{(n)}(\alpha)}{1 - 2^{2m(n+1)}(2^{2m} + 1) + 2^{2m(2n+3)}} + O\left(\left(\frac{\alpha}{2^m}\right)^{2n+6}\right)$$
>
> dır ve sonuçta herhangi bir m doğal sayısı için
>
> $$\text{(210)}\quad B_m^{(n)}(\alpha) \xrightarrow{n\to\infty} \alpha$$
>
> olur.

Alıntı 2.4. ATA 1-1-3 Algoritmaları'ndan bir örnek, A1A, S. 39-40.

alıntısındaki (209)'u şu şekilde bulmuş oluruz:

$$\text{(2.40)}\quad A_{m,k+2}(X) = \frac{A_{m,k}(X) - (4^m + 1)4^{m(k+1)}A_{2m,k}(X) + 4^{m(2k+3)}A_{3m,k}(X)}{(4^{m(k+1)} - 1)(4^{m(k+2)} - 1)} + O(h_m^{2k+6}).$$

Not 2.1. Yukarıdaki parçayla birlikte RİK 2'deki *"2.1.1.1. Eutokios'un Kesirleri Kurgu Muydu?"* adlı parçada ***Arşimet***'in *"Çember Ölçümü Hakkında"* çalışmasında ileri gittiğimi, hatta zırvaladığımı düşünenler olabilir. Fakat bu analizler ve onların ötesinde seyreden EK 1 ve EK 3'te yaptığım iş, bir arkeolog gibi ***Arşimet***'in bu çalışmasını tarihi doku içinde değerlendirmek ve derlemeler yoluyla yapılan yorumları bu esas çalışmadan ayırmaktan başka bir şey değildir. Yani geriye dönüp Yunanlılar'ın *"Arşimet Palimpsesti"* ([14]) hakkında yaptıklarını görünce *"Değer miydi?"* sorusu aklıma geliyor. Bence değmezdi. Çünkü Arşimet Palimpsesti'ndeki çalışmaların çoğu zaten derlemeler yoluyla geliyordu ve bunu bilip de Yunanlılar'ın kendilerini hırpalamasının hiçbir mantıklı tarafı yoktu!

Atatürk Hedef Alınıyor!

Çok ilginç bulgumdur: Arşimet Palimpsesti'nin satışı kitabın girişindeki *"Archimedes in America/Archimedes for Sale"* parçasında anlatılır. Orada Arşimet Palimpsesti'nin satışının 29 Ekim 1998/Perşembe günü 14:00'da (Ankara'da 21:00) başladığı geçer. ***Atatürk*** bu saatte ilk Cumhurbaşkanı seçilmesi nedeniyle Meclis'te konuşma yapıyordu (Bkz. RİK 2'deki *"Arşimet Palimpsesti'ne Bakmak Gerekiyor!"* parçasına). Çünkü ***Atatürk***, *"NUTUK 2"*'nin 815. sayfasının başında, Cumhuriyet'in 29 Ekim 1923/Salı gecesi 20:30'da ilân edildiğini ve kendisinin 20:45'te Cumhurbaşkanı olarak seçilmiş olduğunu söyler. Sonra Meclis'te kısa bir konuşma yapar (Bkz. *"NUTUK 2"*, S. 813-815). Ben bu konuşmayı okudum ve 2.5 dakika aldığını gördüm. Ama ***Atatürk***'ün kürsüye gelmesi ve bu konuşmayı vurgulu olarak, tane tane okuyarak yaptığını düşünürsek, ***Atatürk***'ün 21:00'de Meclis'te olduğunu, muhtemelen konuşmasına devam ettiğini söyleyebiliriz. ***Atatürk*** bu konuşmadan sonra yeni diş protezi taktırdığı için dinlenmek üzere köşesine çekildi. Bunun nedenini yıllar sonra şöyle açıkladı: *"Diş protezlerimi yeni takmıştım, tecrübe devresindeydi, henüz alışamamıştım, söz söylemeye başladığım vakit ıslık gibi sesler çıkıyordu veyahut ağzımdan düşüyordu, dilime dolaşıyordu, rahat konuşamıyordum, ne yapayım kısa kestim!".* Yani Christies's müzayedesinde Arşimet Palimpsesti'nin satışına sunulmaya başladığı saatte tam 75 yıl önce ***Atatürk***'ün yaptıkları bunlar idi ve öyle görünüyor ki satışa karar verenler, bizi bizden daha iyi tanıyorlarmış!

Bu konuda RİK 2'nin 11. sayfasının 4. paragrafında şunları yazmıştım: *"Arşimet Palimpsesti'nin başına gelenler belirsizdir. Anlaşılan, 1920'lerden beri adı bilinmeyen bir Fransız koleksiyoncunun elinde, en kötüsü resmen kaybolmuş ve çoğu insan tahrip edildiğini varsayıyordu. Fransız koleksiyoncu kısa süre önce satmış olabilir. Ancak kesin olarak bildiğimiz tek şey, 1998'de New York'taki Christie's müzayedesinde anonim bir satıcı adına satılması, en şiddetli şey olduğudur. Kitap 29.10.1998, 14:35*

([14]) Arşimet Palimpsesti kitabını çıkar çıkmaz (2007) Amazon'dan satın almıştım. Fakat aldığıma pek de sevinememiştim. Çünkü orada birkaç bulgu dışında benim için yeni bir şey yoktu. Ancak kitabın *"Archimedes in Syracuse (Siraküza'daki Arşimet/Who Was Archimedes (Arşimet Kimdi)?"* parçasında yetkili bir ağızdan ***Arşimet***'i çalışmalarının dışında tanımadığımızı duymak, benim için bir teselli oldu. Örneğin Resim 4.3'teki olay doğru değildir. Bu konuda 32. sayfanın sonunda şu bilgi geçer: *"We do not know how, but Archimedes (Nasıl olduğu bilinmiyor, ama Arşimet öldü)".* Aynı şekilde, ***Arşimet***'in M.Ö. 287-212'de yaşamış olduğu bilgisi de 12. yy.'daki Konstantinapolisli ***Johannes Tzetzes*** tarafından uydurulmuştu!

*EDT'de (Ankara'da 21:35) Christie's müzayedesinde isimsiz bir alıcıya 2,202,500 $'a satıldı (Bkz. "[Archimedes Palimpsest, Sale 9058]"). Fakat bu tarih tam da Cumhuriyetimizin 75. Yıldönümüne denk geliyordu. Çünkü kitabın çalınmasından Yeni Türkiye Cumhuriyeti, dolayısıyla onun kurucusu **Atatürk** sorumlu tutuluyorlardı. Acaba **Atatürk**, kendisine yöneltilen bu kinin farkında mıydı? Çünkü tarih ve saat gayet açık!"*

Resim 2.1. 1996-1999 ve 2000-2004'te Yunan Kültür Bakanı olan ***Evangelos Venizelos***.

Yunanlılar Şok Geçiriyor!

Fakat Yunanlılar'ın durumu daha acıklı idi. Bunu "*Archimedes in America/Archimedes for Sale*" parçasının 5. sayfasındaki sondan 2. paragrafından itibaren şöyle görebilirsiniz: *"Yunan Kültür Bakanı **Evangelos Venizelos**, Arşimet Palimpsesti'ni kötü bir şekilde olmasına rağmen isteyen kişilerden biri idi, ama sırf ülkesi için istedi. Çünkü Yunan kamuoyuna Arşimet Palimpsesti'ni edinmenin ahlaki, tarihi ve bilimsel bir zorunluluk olduğunu açıklamıştı. Son dakikada satın almak için bir konsorsiyum düzenledi ve New York'taki Yunanistan Başkonsolusu **Manesis**'i müzayedeye gönderdi. **Manesis** ön sıraya oturdu, bir arkadaşıyla birlikte odanın sol tarafındaydı.*

*Hemen arkasında onu hayal kırıklığına uğratmayı uman bir adam vardı: **Simon Finch**. **Simon Finch**, Londra'dan yüksek profilli bir kitap satıcısı. Eğer aklınızda gözlüklü ve tüvit (yün kumaştan yapılmış ceket) bir İngiliz beyefendi kitap satıcısı varsa tekrar düşünün. **Finch** böyle bir şey değil. Yaklaşık 45 yaşında, bir kitap adamından çok bir rock yıldızı gibi görünür ve kitapları sık sık rock yıldızlarına satar. **Finch** normalde Vivienne Westwood takım elbise ve spor tasarımcısı, anız ve darmadağınık saçlı kitap fuarlarında bulunabilen bir adam türüdür. Aslında bir çift mavi süet ayakkabısı var. **Finch** romantik ve bu yüzden kitap işinde* [15]*. Kitapların sağlayabileceği harika tarih ve üstün kalitenin birleşiminin romantik olduğunu düşünmüyorsanız, o zaman o size bunu söyler. Çünkü harika bir kitabın sayfalarını hiçbir zaman çevirmediniz. 5 dakika sonra müşterisi olabilirsiniz. **Arşimet**'in çalışmalarını içeren Palimpsestini satın almaya gittiğinde, **Finch** her zamanki gizemli havasından daha fazlasına sahipti. Kimin kimler için oynadığını bilmiyordu ve hiç kimse o kişinin Arşimet Palimpsesti için ne kadar para ödemeye hazır olduğunu bilmiyordu!*

*Saat 14:00'da Cristies's'in **Francis Wahlgren**'iyle podyumda düello başladı. Açık artırma 800,000 $ ile başladı (ki bu, rezerv fiyatı idi) ve milyon dolarlık dönüm noktasını geçti. Yunanlılar küreklerini her zaman yükselttiler-176 numara-havaya yükseldiler. **Finch**, 169 numaraya cevap verecekti. Yunanlılar telefondaydı, talimatlar alıyorlardı ve her fiyat yükseldiğinde raketlerini yükseltmeleri biraz daha uzun sürüyordu. **Finch** her seferinde yeni fiyatı üstleniyordu. Başkonsolos, podyumdan 1,900,000 dolarlık çağrıya cevap verdi. **Finch**, 2,000,000 dolarlık bir çağrıya hızlı bir şekilde cevap verdi. **Walgren**, 2,000,000 $ üzerindeki herhangi bir teklif talebine cevap vermek için Başkonsolos'a baktı. Yunanlılar telefondaydı, umutsuzca para topluyorlardı. Sonsuzluğa benzeyen şeyden sonra **Wahlgren** çekici indirdi. 'İki milyon dolar, Kürek 169' dedi. Yunanlılar başarısız oldu; kitap **Finch**'in bilinmeyen müşterisine gitmişti. Alıcının primi ile Arşimet Palimpsesti 2,200,000 dolara satıldı."*

Finch'in satın aldığı kitabın sahibi gizemli koleksiyoner, *"kitabı görünüşü için değil, içinde saklı olan **Arşimet**'in dehası için satın aldığını"* söyledi. Walters Sanat Galerisi'nin elyazmalarından sorumlu müdürü ***William Noel*** ise şu çarpıcı tespitte bulunur: *"Matematik tarihinde bilmediğiniz şeyleri öğreneceksiniz"*. Ve ***Arşimet***'in eserlerini değerlendiren ***Sör Thomas L. Heat*** ise şu genel değerlendirmede bulunur: *"Bu risaleler, istisnasız, matematik ifade gücünün birer anıtıdır. Hareket planının adım adım açıklanması, teoremlerin ustaca sıralanışı, maksatla doğrudan doğruya ilgisi olmayan her türlü ayrıntının bir kenara itilişi, bütün muhakemenin en kusursuz bir şekilde tamamlanması mükemmellik bakımından o kadar büyük bir etki bırakmaktadır ki, okuyucu o yazının karşısında derin bir saygıyla karışık bir korku duyguna kapılıyor. **Plutarchos**'un şu sözleri aynen doğrudur: **'O, Geometri'nin en güç ve karışık problemlerini en basit ve berrak teoremler halinde ifade ettiği ispatlarla çözerdi (Marcellus'un Hayatı, Bölüm 17)'**. Fakat onun, vardığı sonuçlara ulaşmak için kullandığı metot sanki bir esrar perdesiyle örtülü kalmıştır. Çünkü onun bulmuş olduğu teoremlerin, onlara son şeklini vermiş olduğu risalelerindeki muhakeme adımlarıyla keşfedilmedikleri aşikârdır. Eğer **Arşimet**'in geometrik risalelerinden başka bir şey elimizde bulunmasıydı, **Wallis**'in söylemiş olduğu gibi, onun **'kendisinden sonra gelenlerden kendi keşif metodunu esirgemek, ama buna rağmen onlara elde etmiş olduğu sonuçları kabul ettirmek istermişçesine, araştırmalarının izlerini kasten örtmüş'** olduğunu zannedecektik. Gerçekten de, yine **Wallis**'e göre, **'sadece Arşimet değil, fakat hemen hemen bütün Eski Çağ matematikçileri de, problemlerin analizinde kullandıkları metotları (böyle bir metoda sahip oldukları apaçık iken) kendilerinden sonra gelenlerden o derece saklamışlar ki, Yeni Çağ matematikçilerine, eskisini aramaktansa yeni bir tahlil metodu icat etmek daha kolay gelmiştir'**"*.

Fakat bunlar bana, pek beylik sözü gibi geldiler. Yani ***Arşimet***'e hakkını vermek gerekir ama o kadar da uçmamak gerekir. Örneğin, ***Arşimet***'in "*Çember Ölçümü Hakkında*" çalışmasını "*D. PAMUKTULUM: Daire Çevresi Ölçmesi, Önerme 3: Türk-Yunan Dostluğu 2002 İçin Yeni Bir Versiyon, 1. Albüm: Arşimet'in Metodu M.V.-Türk-Yunan Metodu Ver. 1.0, The Mathquake-2002*" dosyasında daha iyisini yaptık (ki siz bunu Arşimet Palimpsesti'ndeki çalışmaya karşılık bir teselli olarak düşünebilirsiniz) ve daha da iyisini yapabiliriz (ki bu çalışma da ileride yayımlayacağım projelerim arasındadır). Bir diğer örnek, ***Arşimet***'in **"Kaldıraç Kuvveti"**dir. Fransız mimar ***Jean Pierre Houdin*** Büyük Piramit'te 8 yıl süren araştırmalarının sonuçlarını **"1 Nisan Şakası"** gibi 1 Nisan 2007'de açıklayınca kıyamet koptu. Çünkü Büyük Piramit'in yapımında Büyük Galeri'de yük asansörünün kullanılmış olduğu ortaya çıktı. ***Houdin*'in modellemesine göre** bu yük asansörü son derece karmaşık bir palanga sistemine göre çalışıyordu (ki zaten ***Herodot***, M.Ö. 450'de "*Tarih/2. Kitap: EUTERPE/125. Parça*"sında piramitteki taşların makinelerle aşağıdan yukarıya doğru taşınmış olduğunu söylüyordu. Bkz. "*The Great Pyramid of Egypt: The New Evidence*"). Yani Eski Mısırlılar, M.Ö. 2600'de Büyük Piramit'te ***Arşimet***'in kaldıraç kuvveti kanunun ötesine geçmişlerdi. Aynı Mısırlılar, ***Arşimet***'in ***"Suyun Kaldırma Kuvveti"***ni de biliyorlardı ve Büyük Piramit'in yapımında kullanmışlardı (Bkz. "*Le Chantier Construction De La Grande Pyramide De Keops*". Bu konuda günümüzde yapılan araştırmalar daha da ilginçtir. Bkz. "*How Were The Pyramids of Egypt Really Build-Part 1&Part 2*"). Bakın burası çok önemli: Büyük Piramit'in kaplama taşlarını taşıyanların başı ***Merer***, günlüğünde 2-3 tonluk bu taşları tekne üzerinde gece-gündüz taşıdıklarını söyler. Mısırlı arkeolog ***Zahi Hawass***, "*Merer'in Günlüğü*"nün Mısır'da 21. yy.'daki en büyük keşif olarak tanımlar!

Ha bu arada unutmadan, ***Arşimet***'in bir dönem Büyük İskenderiye Kütüphanesi'nde çalıştığını ve anılan çalışmalarını orada yaptığını biliyoruz. Yani ***Arşimet***, eğer Giza Piramitleri'nde çalışmış ve bize tasarımlarını geometrik yöntemlerle anlatmış olsaydı, işte o zaman bize tam anlamıyla **"ölümsüz bir miras"** bırakmış olacaktı! Peki ***Arşimet*** bunu yapabildi mi? Yok. Yani büyük insan o dur ki Giza Piramitleri hakkında tek bir söz bile olsa (ama doğru olacak), söz söyleyebilendir!

2.3. Lineer Ekstrapolasyonlar Hakkında. Bu makalede lineer ekstrapolasyonlardan 1 tane örnek verdim; 2 tane değil. Çünkü (2.2) ya da (2.6)'daki ekstrapolasyonlar (2.34)'ten $m = 1$ için elde edilmektedirler. İşin ilginç yanı şu ki, ben, (2.34)'ü daha da genelleştirerek ***"Romberg İntegrali 2016-2020"*** adlı kitabıma yazdıktan çok sonra

[15] Siz, ***Finch***'i "9. Kapı, 1999" filmindeki ***Dean Corso***'ya benzetirseniz kesinlikle bir hata yapmış olmazsınız. Çünkü her ikisi de nadir kitap sektöründe **"akbaba"**dır. Çünkü ***Finch***, ***"Arşimet Palimpsesti"***ni kaldırırken ***Dean Corso*** da, 1780 basımlı 4 ciltlik ***"Don Kişot"***u kaldırdı. Fakat onun en büyük kaldırdığı kitap, ***Aristide Torchia***'nın ***"Gölgeler Krallığının 9. Kapısı"***dır. Rivayet edildiğine göre, bu kitabı okuyan bir kimse, Şeytan'ı kaldırabiliyormuş. Yani bu tür kitaplar açıp okunmaya gelmiyor!

2003'teki ***"E-ATA 1 Algoritmaları"***'na yeniden baktığım sırada farkettim. Yani (2.34)'ü, asimptotik hatasıyla birlikte, 2018'de yeniden keşfettiğimde 2003'teki keşfimden haberim yoktu ve onu ***E-ATA 1 Algoritmaları***'ndaki Alıntı 2.3'te tekrar görünce çok şaşırdım!

Resim 2.2. ***Lewis Fry Richardson***, Eksdalemuir Gözlemevi'ne başmetereolog olarak atandı, 1 Ağustos 1913.

Bir diğer ilginçlik şudur: Lineer ekstrapolasyonlarına ait çalışmam ***Lewis Fry Richardson***'unkiyle aynıdır. Çünkü ***Richardson***, ilkin 1910'da

$$(2.41)\quad \phi(x,h) = f(x) + h^2 f_2(x) + h^4 f_4(x) + h^6 f_6(x) + \cdots \text{ to infinity}$$

açılımına göre $\lim_{h\to 0} \phi(x,h)$ ile f(x)'e yaklaşım için bir teori ortaya atar ve 1927'de de sözkonusu bu yaklaşım için

$$(2.42)\quad f(x) = \frac{h_2^2\phi(x,h_1) - h_1^2\phi(x,h_2)}{h_2^2 - h_1^2}$$

ekstrapolasyonunu tanımlar (Bkz. "*VIII. The Deferred Approach to the Limit: Part I. Single Lattice by Lewis Fry Richardson, Part II. Interpenetrating Lattices by Arthur Gaunt*". **Y.N.** Linke tıkladığınızda sayfanın sol üst köşesindeki **"View PDF"** yazan yere tıklarsanız dosyanın rahatsız edecek şekilde yavaş indiğini görürsünüz. Ben bunun yerine, aynı yere farenin sağ tuşuyla tıklayıp **"Hedefi farklı kaydet"** diyerek dosyayı yavaş da olsa bilgisayarıma indirdim). O, bu ekstrapolasyona **"*h^2-ekstrapolasyonu*"** ve aynı eliminasyonla $f_4(x)$'ü de yok ettiği zaman elde ettiği ekstrapolasyona **"*h^4-ekstrapolasyonu*"** adını verir. Ona göre işleme bu şekilde devam edildiği takdirde aşağıdaki (2.43)'teki h^{2k}-ekstrapolasyonu elde edilir. Bununla birlikte, ***Richardson***'un ***N. Bogolouboff*** ve ***N. Kryloff***'un bir makalesine, limite kesikli yaklaşımın (The Deferred Aproach to the Limit) olduğu yerde, atıfta bulunmuş olduğunu da belirteyim. ***Richardson***, aynı kâğıtta 6. mertebeden bir özdeğer diferansiyel problemini çözebilmek için yine bu tekniği kullandı. Fakat bu ekstrapolasyon ondan önce geometrik bir seri olarak (2.2) şeklinde çoktan genelleştirilmişti bile ve günümüzdeki kullanım şekli de budur. Ancak ***Richardson***'un öncekilerden farkı, bu ekstrapolasyonu teorize etmesidir. Bu nedenle, bu ekstrapolasyon daha çok onun adına ithafen **"R"** ile gösterilir. Peki bu, ***Romberg***'in R'si de olabilir mi? Aynen öyle. Çünkü Almanlar, ***Romberg***'in bu ekstrapolasyonu bağımsız olarak yeniden keşfetmesi nedeniyle öyle anarlar!

Şu halde bu yönüyle ***Richardson***'a benzediğim söylenebilir. Çünkü nasıl ki ***Richardson***'un (2.2)'yi vermesi için 17 yıl (ki gerçekte 16 yıl. Çünkü "*VIII. The Deferred Approach to the Limit*" kitabının 299. sayfasında bu çalışmanın 14 Ekim 1926'da alındığı geçer) geçmişse, benim de E-ATA 1 Algoritmaları'ndan (ki buna ***"E-ATA Algoritmaları Ver. 1"*** diyelim) bu yana yani ***"E-ATA Algoritmaları Ver. 2"*** çalışmasına kadar 2003-2019'u baz alırsam 16 yıl süre geçti!

Bir Çocukluk Hastalığı Olarak Emperyalizm

İşte bu benzetme bize dost gibi sokulan ama ajanlık yapan İngiliz emperyalistlerine kapak olsun. Çünkü onlar bizden aldıkları bilgileri yalan yanlış şekilde aleyhimizde kullanırken (bkz. "*Atatürk, güya elyazısıyla Ayasofya'yı kapatmış (!)*"), biz, onlara burada olduğu gibi insanlık dersi veriyoruz. Onların yaptıkları adi hareketler, ***Lenin***'in Sol Komünizm için dediği gibi "*Çocukluk Hastalığı*"dır. Fakat bu çocukluk hastalığı sanki tüm İngilizlere bulaşmış gibidir. Örneğin piramitlerde çalışan ***Perring***, ***Smyth***, ***Petrie***, ***John Edgar*** vb. gibi kişiler baştacımdır. Ancak ***Smyth***'ın bende çok özel bir yeri vardır. ***Smyth***'ı burada anlatmam mümkün değil; o herkesi imrendirecek kadar çok köklü bir aileden gelir ve 10 parmağında 10 marifete sahip dört dörtlük bir bilim adamıdır. Yalnız tek bir kusuru var: İNCİL takıntılı bir Hristiyan idi ve bundan dolayı her çalışmasına İNCİL'den bir ayetle başlardı. Sanki İNCİL'den bir ayetle başlamasa çalışması eksik kalırdı. Bu konuda bizi sarsan örneği şudur: 1884 basımlı "*New Measures of the Great pyramid by A New Measurer*" adlı son kitabın sonundaki "*Hartum'dan Bir Mesaj*"ında Hezekiel 25:14'e göre Edom'a benzettiği Türk (Osmanlı) İmparatorluğu'nun çöküşünün Tanrı'nın elinden olacağını iddia eder. Oldu mu şimdi bu ***Smyth*** amca? Çünkü piramitlerde böylesine olgunluk seviyesine gelmiş bir kimse, tüm inançlarını askerlikteki gibi piramitin kapısının dışında bırakır ve öyle çalışmaya başlar. Unutmayalım ki bu piramitleri yapanlar ***Osiris***, ***İsis***, ***Horus*** vs. inanıyorlardı. O sırada baskın olan kült ya da din, Horus Kültü idi!

Fakat ben boşuna 16 yıl beklemedim; çünkü beni uyandıran ***Romberg*** idi. 02.11.2016, 22:54'te ***Romberg***'in metodunu geometrik olarak yorumladıktan sonra **E-ATA 1 Algoritmaları**'ndan bazı transferlerin sözkonusu olduğunu gördüm ve ***Snellius*** bu işte katalizör oldu. Yani bende ***Snellius***'un algoritmasını ***Romberg***'in metoduna kazandırma iştahı olmasaydı, ilkin makalelerle başlayan ve sonra kitaba dönüşen bu çalışmaları yapmam mümkün olmazdı. Bunu Hollanda Kralı ve Hollandalıların dikkatini çekmek için söylemedim; gerçekten de öyle oldu!

Şimdi (2.34)'te $m = 1$ alırsak,

$$(2.43)\quad R_{n,k}(X) = \frac{4^k R_{n+1,k-1}(X) - R_{n,k-1}(X)}{4^k - 1} + O\left(h_n^{2k+2}\right)$$

şeklinde Richardson ekstrapolasyonunu bulmuş oluruz ve bunun tablosu şu şekildedir:

$$\begin{array}{lllll} X_0 & R_{0,1} & R_{0,2} & R_{0,3} & R_{0,4} \\ X_1 & R_{1,1} & R_{1,2} & R_{1,3} & \vdots \\ X_2 & R_{2,1} & R_{2,2} & \vdots & \\ X_3 & R_{3,1} & \vdots & & \\ X_4 & \vdots & & & \\ \vdots & & & & \end{array}$$

Tablo 2.2. (2.43)'e göre yukarı sağ dik üçgen (Bkz. Romberg tabloları için "*Shanks, J. A.: Romberg Tables for Singular Integrands in: The Computer Journal 15 (4) (1972) S. 360*").

İkinci olarak (2.34)'te $m = 2$ alırsak,

$$(2.44)\quad R_{2n,k}(X) = \frac{16^k R_{2n+2,k-1}(X) - R_{2n,k-1}(X)}{16^k - 1} + O\left(h_{2n}^{2k+2}\right)$$

ekstrapolasyonunun tablosu ise şu şekilde ortaya çıkar:

$$\begin{array}{lllll} X_0 & R_{0,1} & R_{0,2} & R_{0,3} & R_{0,4} \\ X_1 & R_{1,1} & R_{1,2} & R_{1,3} & \vdots \\ X_2 & R_{2,1} & R_{2,2} & R_{2,3} & \\ X_3 & R_{3,1} & R_{3,2} & \vdots & \\ X_4 & R_{4,1} & R_{4,2} & & \\ X_5 & R_{5,1} & \vdots & & \\ X_6 & R_{6,1} & & & \\ X_7 & \vdots & & & \\ X_8 & & & & \\ \vdots & & & & \end{array}$$

Tablo 2.3. (2.44)'e göre yukarı sağ dik üçgen. (2.44)'teki iterasyon kırmızı renkli yaklaşıklıklar arasında yürür. Yani Tablo 2.2'de seri olarak yürütülen bu işlem, bu tabloda 2'şer 2'şer atlamayla gerçekleşir!

Şu halde bu tablolara göre ***Romberg***'in (1.55)'teki örneğini ele alırsak $m = 1,2,3,4,5,6,7$ için (2.34)'ten şu sonuçları elde ederiz:

k	$R_{n,k}(K) - I$	$R_{2n,k}(K) - I$	$R_{3n,k}(K) - I$	$R_{4n,k}(K) - I$	$R_{5n,k}(K) - I$	$R_{6n,k}(K) - I$	$R_{7n,k}(K) - I$	⋯
0	-0.214602	-0.214602	-0.214602	-0.214602	-0.214602	-0.214602	-0.214602	⋯
	0.446705	0.11715	0.115438	0.114834	0.121413	0.116924	0.115518	⋯
1	0.00227988	0.000563643	0.000140521	0.000035106	8.775×10^{-6}	2.19365×10^{-6}	5.48408×10^{-7}	⋯
	0.0011717	0.0011573	0.0014639	0.0015126	0.0010402	0.0010038	0.0010094	⋯
2	-8.43453×10^{-6}	-1.29787×10^{-7}	-2.02159×10^{-9}	-3.1564×10^{-11}	-4.93098×10^{-13}	-7.70431×10^{-15}	-1.20378×10^{-16}	⋯
	0.0021712	0.001759	0.0023759	0.0025003	0.0020529	0.0018958	0.0018897	⋯
3	8.14402×10^{-9}	1.95591×10^{-12}	4.76005×10^{-16}	1.16126×10^{-19}	2.83458×10^{-23}	6.92003×10^{-27}	1.68944×10^{-30}	⋯
	0.0037841	0.0038032	0.0040865	0.0036231	0.0038159	0.0041181	0.0044899	⋯
4	-1.98305×10^{-12}	-1.85987×10^{-18}	-1.76808×10^{-24}	-1.68491×10^{-30}	-1.60656×10^{-36}	-1.53206×10^{-42}	-1.46107×10^{-48}	⋯
	0.0070982	0.0073374	0.0095728	0.0117015	0.0103091	0.0078986	0.0082515	⋯
5	1.20958×10^{-16}	1.10778×10^{-25}	1.02842×10^{-34}	9.57078×10^{-44}	8.91185×10^{-53}	8.29942×10^{-62}	7.72935×10^{-71}	⋯
	0.0145	0.0187356	0.0197744	0.0161698	0.0167484	0.0166338	0.0289654	⋯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Tablo 2.4. İlk satırlardaki sonuçlar, (1.50)'ye göre $n = 0$ ve $m = 1,2,3,4,5,6,7$ için (2.34)'ten elde edilen çıktıları ve ikinci satırlardaki kırmızı renkli sonuçlar ise, bu çıktılara erişilmesinde geçen süreyi Sn cinsinden gösterirler. Her bir sütundaki sonuçlar program yeniden başlatılarak elde edilmiştir ve ilk satırdaki sonuçlar ilk yüklenme nedeniyle sonraki satırlardakilerden daha fazla süre almıştır. Tüm bu hesaplamalar ***MATHEMATICA 11***'de yapılmıştır (**Y.N.** ***MATHEMATICA 12*** 03.07.2019'da piyasaya çıkmıştır. Bilginize!).

Tablo gayet açıktır, yani (2.34)'teki kesme hatasından (büyük O sembolü içindeki farktan) Richardson ekstrapolayonundan elde edilen ilk sütundaki sonuçlar ile diğer sütundakiler arasındaki farkın olacağı açıktır. Bu durumda aklımıza şu soru geliyor: ***Romberg***, 1955'te (2.43) ile tablonun ilk sütunundaki sonuçları elde ederken, (2.44) ile ikinci sütundaki sonuçları ve genelde de (2.34) ile diğer sütunlardaki sonuçları vermesi olası mı idi?

Kesinlikle evet! Yani (2.44)'ün ve daha ötesinde (2.34)'ün 1955'te de verilebiliniyor olması, onlar için kötü şans ama bizim için iyidir. Fakat ***Romberg***'in, ***Huygens***'in (2.23)'teki algoritmasını genelleştirerek (2.2)'yi vermesi yani Richardson ekstrapolasyonunu diğerlerinden bağımsız olarak yeniden keşfetmesi, daha da ilginçtir!

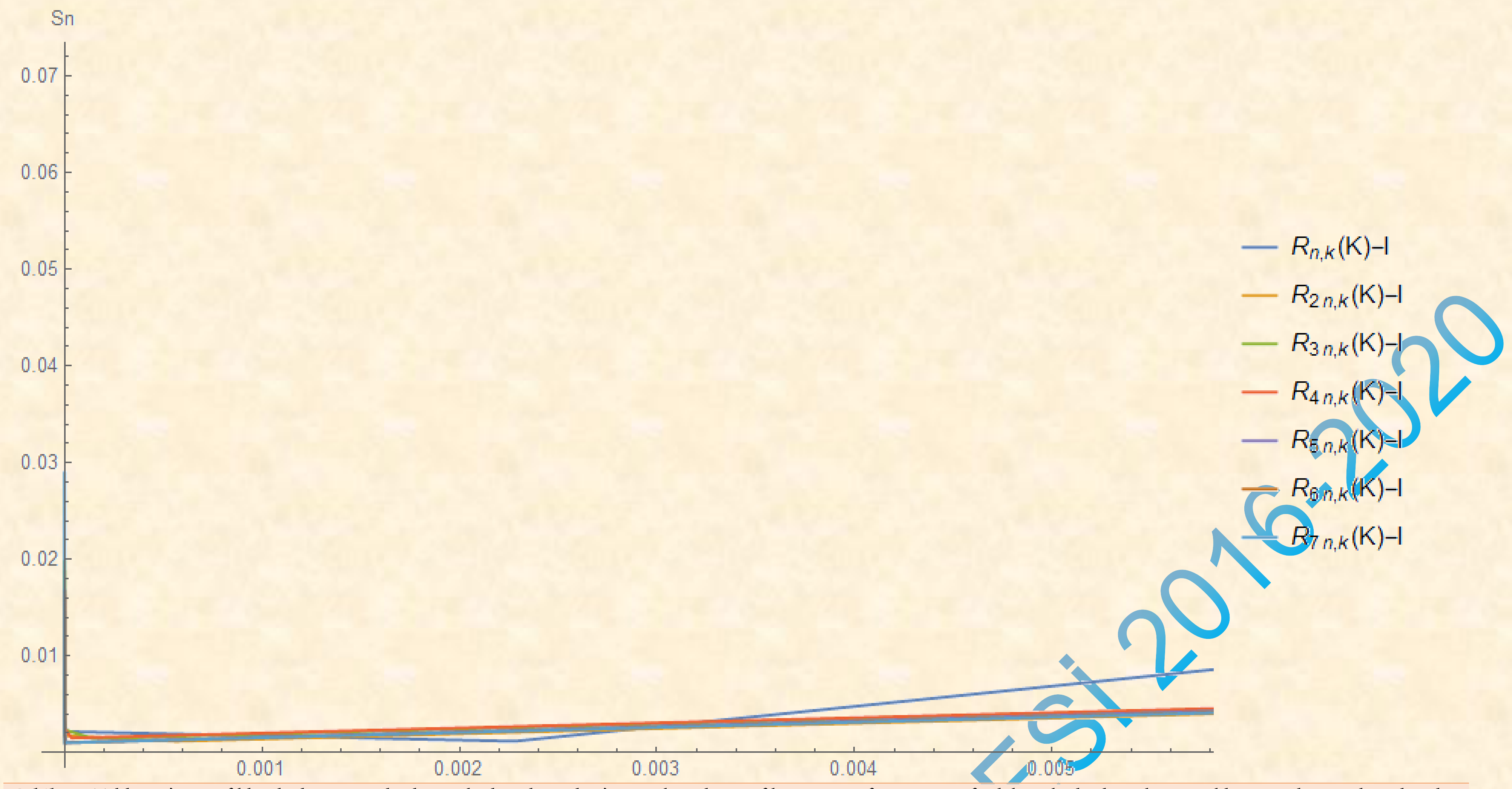
Bu konuda ***Snellius***'un, kendisini ve bu arada beni de tanıtan şu sözü dikkat çeker:

"Eskilerin icatlarına hayranlık duyan ya da yeni şeyleri araştırmaktan zevk duyan biri (Unus aliquis ex eorum numero, qui ducuntur admiratione earum rerum, quae sunt ab antiquis repertae, vel delectantur investigatione novarum)", Snellius, 1607b, S. 4.

Bir Matematik Tarihçisi Olarak Snellius ve Çalışmaları

Snellius, genellikle kendi çözümünü geliştirmeye başlamadan önce eski problemlerin tarihine çok önem verdi. Örneğin, "*Cyclometricus*"ta dairenin alanının tarihi üzerine uzun bir önsöz yazdı, Yunan katkılarına odaklandı, ama aynı zamanda ***Adrianus Romanus***, ***Franciscus Viète*** ve ***Ludolph van Ceulen***'in çalışmalarına da değindi. Kitabında kendi başarılarını ***Arşimet***'inkiler ile karşılaştırmış ve okuyucuya, ***Arşimet*** ile aynı düzgün çokgeni kullandığında, metoduyla π'nin daha fazla sayıda basamağına ulaştığını gururla söylemiştir. "*Tiphys Batavus*", Antik Çağ'daki navigasyon hakkında uzun bir önsöz içerir. Konunun yakın tarihi de sonda tartışılmıştır ve "*Eratosthenes Batavus*"ta kitap konusunun tarihine daha fazla yer ayrılmıştır. Fakat ***Snellius***, ***Ptolemy***'nin destekçisi olarak ve Hristiyanlık inancının da etkisiyle (ki kendisi tam bir Hristiyan idi ve Pieterskerk'teki Aziz Peter Kilisesi'nin tabanındaki oymalı taşın altında yatar. Bkz. *Snellius'un mezarı*), Evren'in yer merkezli (geocentric) ve Dünya'nın hareketsiz (immobile) olduğuna inanıyordu. "*Eratosthenes Batavus*"ta "*Dünya bütün Evren'in merkezinin olduğu yerde, ortasındadır*" demiştir. Hem de ***Stas***'ın öve öve bitiremediği ***Kopernik***, ***Galileo***, ***Tycho Brahe***, ***Kepler***'in çalışmaları sıcak sıcak önünde dururken!

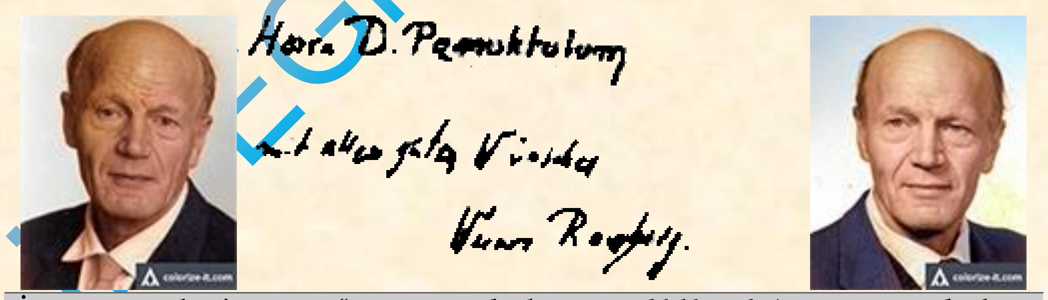
Diğer taraftan, Tablo 2.4'teki sonuçları grafikle değerlendirirsek, her bir sütundaki çıktıları Mathematica 11'de listeyerek ve bu listeleri de ListLinePlot ile grafiklediğimiz zaman şu şekille karşılaşırız:



Şekil 2.2. Tablo 2.4'ün grafiklendirilmesi. Bunlardan en hızlısı, düşeyde 0'a en yakın olan grafiktir. Bu, grafiğin sağ tarafındaki etiketlerde turkuaz renkle gösterilen en altta olanıdır.

Bu şekilde Tablo 2.4'teki her bir sütundaki sonuçlar yatay eksende noktalar olarak ama ListLinePlot ile bu noktaların birbirine bağlanmasıyla kesikli doğrular ve düşeyde ise bu sonuçlara erişilmesinde geçen süre Saniye cinsinden gösterilmiştir. Fakat bu sonuçlar hızla 0'a yakınsadıklarından her bir grafikte yalnızca 2 nokta ve diğerleri 0'a çok yakın olduklarından düşey eksen üzerindeki 0'da yığılmış olarak görünürler. İşte bu grafikler içinde mavi renkli $R_{n,k}(K) - I$'nın grafiği diğerlerinin üzerinde sanki üvey evlatmış gibi ayrı görünür. Bu, $R_{n,k}(K) - I$'nın 0'a yakınsamasının diğerlerine göre zayıf olduğunu gösterir. Bu sonuçla birlikte, $R_{2n,k}(K) - I$, $R_{3n,k}(K) - I$, $R_{4n,k}(K) - I$, $R_{5n,k}(K) - I$, $R_{6n,k}(K) - I$ ve $R_{7n,k}(K) - I$'nın grafiklerinin tek bir doğruymuş gibi görünmesinin nedeni (ki bunların 0'a yakınsama hızları arasındaki farkı, düşey eksendeki 0'a en yakın olan 3. noktalardan kolaylıkla anlayabilirsiniz. Eğer bu grafiği yeterince büyütürseniz en alttaki grafiğin yani 0'a en yakın olan grafiğin $R_{7n,k}(K) - I$ olduğunu görürsünüz. Bu, Tablo 2.4'teki en hızlı ekstrapolasyondur), bunların 0'a yakınsamasının $R_{n,k}(K) - I$'dan daha iyi olduklarını gösterir. İşte bu sonuçla ***Romberg***'in 1955'te kullandığı $R_{n,k}(K)$'nin tam anlamıyla tarih olduğunu görüyoruz. Buna neden olan şey, 2003'te (2.34)'teki 2. genel ekstrapolasyon formülünü keşfetmemdir. Ben bu formülü 2018'de değil, Alıntı 2.3'teki (277)'de görüldüğü üzere 14.05.2003'te keşfettim!

Çok ilginçtir, ***Romberg***, 2002'de Snellius Ekstrapolasyonu'nu keşfetmiş olduğumu duymuş (ki o sırada bu çalışmayı web sitemden yayımlıyordum. Bkz. *"21.rar"*) ve bana iletilmek üzere Almanya'dan bir Türk aracılığıyla imzalı olarak şu notu göndermiş:



İmza 2.1. ***Romberg***'in imzası. *"Bay **D. Pamuktulum**, en iyi dileklerimle (Herrn **D. Pamuktulum**, mit alles guten Wünschen), **Werner Romberg**."*

Çünkü profesör, 1955'te $R_{n,k}(K)$'ye ilişkin (1.25)-(1.27)'deki formülleri keşfederken ***Huygens***'in (2.23)'teki çıkarımını incelediği sırada ***Snellius***'un adının geçtiğini görmüş (ki Almanlar, π'ye **"Ludolf Sabiti"** dedikleri için ***Snellius***'u zaten biliyor) ve (2.12)'deki ***Snellius***'un M_7 algoritmasını genelleştirdiğim için (bkz. RİK 2'deki Tablo 2.1) çok sevinmiş ve bunun üzerine bana iletmek üzere yukarıdaki notu yazmış. İnanılır gibi değil; onun tezinde geçen (1.55)'teki örnekteki K_n'yi (1.61)'de ve T_n'yi (1.67)'de daha yeni keşfettim ve bunlar için en uygun ekstrapolasyonun kullandığı değil Snellius ekstrapolasyonu olduğunu henüz gördüm (Bkz. 1.7.3). Bu nedenle profesöre, *"Dezember 1944"*'te olduğu gibi bu ince anlayışı için teşekkür ederim. Ama profesördeki ketumluğun (NAZİ Almanyası'na ait geçmişini bir sır gibi saklaması) beni aşırı derecede yorduğunu belirtmeden de geçemeyeceğim!

Derya PAMUKTULUM

§3. Mathematica Programları ve Demoları

3.1. Mathematica Programları. Bu bölümde Romberg İntegrali için (2.34)'teki ekstrapolasyonuna dayalı 7 tane Mathematica programı yazdım. Bunlardan şu an sürümde olanlar yalnızca ilk ikisidir; diğerleri yenidir. Yani bu konuda istediğiniz kaynağa bakabilirsiniz ve aşağıdaki 3-7. programların yeni olduklarını, dolayısıyla daha önceden hiç kullanılmamış olduklarını göreceksiniz. Benim hatam (!), (2.34) 2003'teki ***"E-ATA 1 Algoritmaları"*** adlı çalışmamdan beri elimdeydi ve ileride bu çalışmayı daha da geliştiririm düşüncesiyle bir kenara kaldırmıştım (ki bu çalışmadan sadece 2002'de Snellius Ekstrapolayonu'ndan söz etmiş ve web sitemde yayımlarda bulunmuştum). Ama kimse merak etmediğine göre aslında bir hata yapıyor değildim. Yani sizin de aşağıdaki anılarımda gördüğünüz gibi ***Romberg***'in orijinal makalesi için çalmadık kapı bırakmadığım gibi, girişimci olmanız gerekiyor. Beni uyandıran 2016'da ***Romberg*** oldu. Ya sizi?

1. RichardsonExtrapolationAppliedTwiceToAccelerateTheConvergence.cdf: Ben bu programı ***Wolfram Demonstraions Project***'ten alıp 26.07.2019, 09:38:43'te bilgisayarıma indirmiştim (ki bu program 15.07.2014'te ***Michail Bozoudis*** tarafından Wolfram Demonstrations Project için yazılmıştır). Fakat program **"function"** kutusundaki 7 tane fonksiyon için $a = 1$'den maksimumda $b = 10$'a kadar ve $n = 1$'den 30'a kadar eş alt bölme için tanımlı olduğundan (2.2)'deki ekstrapolasyon (ki **"Details"** bölümünde ise (2.2)'deki ekstrapolasyonun teorik olarak nasıl elde edildiği anlatılıyor) sadece bir gösterim olarak sunulmuştur. Yani sizin bu gösterimde $I = \int_a^b f(x)dx$ belirli integrali için hesap yapma yetkiniz yoktur!

   Not 3.1. ***Wolfram Demonstrations Project***'te Romberg integrali için bir diğer gösterim programı için *"Numerical Integration: Romberg's Method"*'a bakabilirsiniz.

2. RİM1.nb, 26.07.2019, 14:37:25: Bu program, ***Ali Yazıcı***, ***Tanıl Ergenç***, ***İrfan Atlas*** üçlüsü tarafından 2003'te yazılan *"Romberg Integration: A Symbolic Approach with Mathematica"* makalesinin 693-694. sayfalarında geçen programdır. Ben onlara ***"Romberg'in Türkiye Şubesi"*** diyorum, çünkü Romberg İntegrali'nin Mathematica'daki en yetkin yazılımı onlara aittir. Öyle ki onların yazdıkları kadar güçlü ve sade Mathematica programlarını yabancı kaynaklarda bile göremezsiniz.

   ***Romberg*'in Türkiye'deki şubesiyle görüşmelerim!**

   Hatırlıyorum da geçen dönem (2018) okulların açıldığı ilk günlerde konuyu Matematik Zümresi'ne açıp *"Ben E-ATA Algoritmaları'nı yazdım, onlar da Mathematica'da programını yazacaklar!"* dediğimde bayağı bir sevinmişlerdi ve ben de onların bu halini görünce mutlu olmuştum. Çünkü özellikle 2018 yazındaki büyük çalışmadan sonra (ki hiç dinlenmedim dersem yalan olmaz) ***"Romberg İntegrali"*** adlı kitabım nerdeyse bitmişti ve bu yüzden yukarıda isimleri anılan kişilerle görüşmeye karar verdim (**Y.N.** Onlar ResearchGate'te bu konuda ülkemizi temsil eden en önde gelen araştırmacılarımızdır. Bkz. *"Romberg Integration: A Symbolic Approach with Mathematica"*. Onlarla iletişime bu yüzden geçtim). Yalnızca ikisiyle görüşebildim; çünkü üçüncüsü yurtdışında imiş ve gerekirse iletişime geçilebileceğini söylediler. İlkin her ikisine 11.11.2018, 22:12 ve 11.11.2018, 22:12'de birer e-posta gönderdim ve onlardan, ResearchGate'te hesapları bulunmaları nedeniyle, 1.6.4'teki 3. Maddede geçen ***Romberg***'in orijinal makalesini istedim ama yanıt alamadım. Ben de bunun üzerine GOOGLE'dan birinin telefon numarasını bulup aramaya karar verdim. Görüşmede soruları daha çok o sordu ve ben de yanıt verdim. Ben ise sadece ResearchGate'ki ***Romberg***'in orijinal makalesine ulaşıp ulaşamayacağını ve eğer ulaşabilirse bana göndermesini istedim. Bunun üzerine bana bu işle ne için uğraştığımı, hangi üniversitede olduğumu sordu. Ben de ona öğretmen olduğumu ve 2002-2003'te web sitemde konuyla ilgili bazı yayımlarda bulunduğumu söyledim. O da bana linkteki makaledeki programı kılavuz kitaplara bakarak çok zaman önce (önceki makalelerle birlikte 2002 ve 2003'te) yazdıklarını ve artık böyle şeylerle uğraşmadıklarını söyledi. Bu konuda ona tamamen hak veriyorum, çünkü aynı şey ***"E-ATA 1 Algoritmaları Ver. 1"*** çalışmasında benim de başıma geldi: 2.11.2016, 22:54'te ilk makaleyi yazdığım zaman 2003'teki E-ATA 1 Algoritmaları'na döndüğümde resmen zır cahil kalmıştım. Yani bu algoritmaları ben yazmıştım ama o sırada anlamam mümkün olmadı. O sıralarda hep *"Şu algoritmaları bir anlasam inanılmaz işler çıkartacağım!"* diyordum. Yani bu tür uğraşlar belli bir yetkinlik ister, dolayısıyla geriye dönmek kolay olmuyor. Ama şimdi 2003'tekinden daha iyi bir çalışma çıkarttım: ***E-ATA Algoritmaları Ver. 2***. Yani başarının sırrı, yetenekten çok ısrardadır. Eğer siz ısrar etmezseniz, ki içinizde geçmişten kalma bir şeyler olacak tabii ki, başarıyı yakalamanız mümkün olmuyor!

   Bununla birlikte, o zamandan kalma Richardson ekstrapolasyonunun mutlak hatasına ilişkin bir tez yazmış olduğunu ve akşamleyin göndereceğini söyledi (ki bu yüzden hem ***Romberg***'in makalesi hem de tezi için 27.11.2018, 13:24'te 2. kez e-posta gönderdim. Tabii ki sonra ResearchGate'e bir şekilde girip ***Romberg***'in orijinal makalesinin orada olmadığını öğrendim. Olmadığı bana gönderilen 30.05.2017 tarihli e-postadan anlaşılıyordu zaten. Ama ben yine de şansımı denedim). Profesör, tezinin çok iyi olduğunu söyleyip içeriğiyle ilgili birkaç şey söyleyince, ben de 2018 yazından kalma test sonuçlarına göre bu hatanın belirli bir k'de etkinleştikten sonra 10'nun kuvvetleri doğru olmak üzere katsayının tam kısmının doğru olduğunu ve giderek gerçeğe yaklaştığını söyledim. Sözüne ettiğim şey, lineer ve yüksek mertebeden ekstrapolasyonlar için asimptotik hata idi!

   2018 Yazındaki Hesaplamalarımdan Bir Örnek!

   Örneğin, 2018 yazında

$$(3.1)\quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Cos}x\,dx = 1$$

   integralini nümerik olarak, yani (1.50)'deki trapez yaklaşıklıklığını kuartik ekstrapolasyonla hesapladığım zaman, $m = 1$ ve $k = 12$ için

$$(3.2)\quad A_{3^k m,k}(K) - J = -4.42853 \times 10^{-20199331}$$

   sonucuna 3273.69 saniyede (54 dakika 33.69 saniye) ulaşmış ve saliseler içinde de asimptotik hatayla aynı sonucu görüntülemiştim. Kaldı ki aynı asimptotik hatayla (yani kuartik ekstrapolayonla hiç hesap yapmadan) $m = 1$ ve $k = 20$ için $-1.11489 \times 10^{-1{,}323{,}943{,}290{,}888}$ sonucunu da görüntülemiştim. Bu, ***Mathematica***'nın görüntüleyebileceği en son değerdi!

   Oysa (2.34)'teki $m = 1$ için elde edilen Richardson ekstrapolasyonuna göre $n = 1$ ve $k = 18$ için

$$(3.3)\quad R_{n,k}(K) - J = -3.21829 \times 10^{-126}$$

   sonucu 23908.5 saniyede (6 saat 38 dakika 28.5 saniye) görüntüleniyordu.

   Daha sonra (3.2)'deki sonucu bilgisayarda daha kısa zamanda bulabilmek için kuartik ekstrapolasyonun lineer açılımını yaptım ve bununla (3.2)'deki sonucu 06.09.2018, 14:40'ta yalnızca 547.703 saniyede (9 dakika 7.703 saniye) görüntüledim!

Romberg'in 1955'teki Hesabı

Fujino Romberg'e metodu nasıl bulduğunu sorduğunda, ***Romberg*** bunu şöyle anlatır: *"Sonrasında profesöre **"Romberg İntegrali"**ni nasıl bulduğunu sordum. O dönem profesörün kullandığı bilgisayar İsviçre malı **"MADAS"** adında (MADAS ATG -20) bir hesap makinesiymiş ve hafızası yalnızca 30 kelimeyi barındırabiliyormuş. Bir seferinde nümerik integrali Simpson integral metoduyla denediğinde, kesin sonuca bir türlü ulaşamamış. Bu sebeple Gauss integral yöntemiyle denemiş, fakat bu sefer de katsayıları depolarken hafıza doluvermiş. İşte bu şartlar altında Romberg integrali fikri aklına gelmiş. Hem kodlaması kolay, hem fazla hafıza gerektirmiyor, hem de yakınsaklığı bulmak kolay.",* ***Romberg integralinin mucidi Werner Romberg ile bir röportaj gerçekleştirdim, Seiji Fujino, 14.10.1996***.

Profesör bana tezini göndermedi ama yukarıdaki (3.2)'den görüldüğü üzere buna gerek de yoktu. Bu arada, 2002-2003'te E-ATA 1 Algoritmaları'ndan Snellius Ekstrapolasyonu'na ilişkin kendi web sitemde yayımlarda bulunduğumu söyleyince bayağı şaşırdı. Böylece onun E-ATA 1 Algoritmaları'ndan haberinin olmadığını anladım. Yani E-ATA 1 Algoritmaları ile ilgili çalışmalarım, onların Romberg integralini programladıkları aynı döneme denk geliyordu ama birbirimizden habersiz idik. Çünkü o sırada ***"Arşimet'in Metodu M.V."*** albümü nedeniyle π'ye odaklanmıştım. Bu nedenle, ben de onların çalışmalarından habersizdim ve bunu ancak 29.04.2017'de öğrendim. Özetle, ilginiz yoksa haberinizin olmaması doğaldır.

Şimdi, onların "*Romberg Integration: A Symbolic Approach with Mathematica*" makalesinin 695. sayfasındaki örnekte ve uygulamada olmak üzere 2 basit hata vardır. Örnek ve ona bağlı olan uygulamadaki hatalar giderilebilinir ama programdaki hataları düzeltmeden program çalışmaz. Bu nedenle, bu programı ilk yazdığımda bir hata mı yaptım diye kontrol ettim ama hata yapmadığımı gördüm. Sonra 693. sayfadaki ***"3. Symbolic Romberg Integration"*** başlığı altında verilen programda bu hataları araştırınca, ilkin 9. satırdaki "$\mathbf{For}[\boldsymbol{j=2, j\leq i, j++}, \boldsymbol{romb[i,j]} = \frac{\boldsymbol{4^{j-1}romb[i,j-1]-romb[i-1,j-1]}}{\boldsymbol{4^{j-1}-1}}];])$" kırmızı renkle vurguladığım yere virgülün konması gerektiğini anladım (ki bu, unutkanlıktan kaynaklanan basit bir hatadır) ve ikinci olarak 5. satırdaki "$\mathbf{For}[\boldsymbol{m=2, m\leq n, m++, k=m-1; Do}\left[\boldsymbol{x[j] = a + \frac{(j-i)h}{2^k}, \{j,1,2^k+1\}}\right]$" yine kırmızıyla vurguladığım i yerine 1 gelecektir (ki bu basit hatanın doğrusu onların 2002'deki "*Using Mathematica In Teaching Romberg Integration/2. Romberg Integration with Mathematica*" adlı ilk makalesinin sonundaki ***"6. Computional Complexity of Romberg Integration"***daki programın 8. satırında görülebilirsiniz). Ben bu hataları bu şekilde düzeltip 695. sayfadaki ikinci örnekteki uygulamanın, yani $\int_0^{\frac{1}{2}} x^7 dx = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^8 = 0.00048828125$'in doğru olduğunu görünce bayağı bir sevindim. Çünkü bu düzeltmelere rağmen daha fazla hata olabilir ve program yine çalışmayabilirdi. Öyle görünüyor ki bu hatalar Mathematica'da çalışır durumda olan bu programın doğrudan kopyalamak yerine program metninin makaleye yazımı sırasında oluşmuştur! Ancak şimdi, onların bu basit hatalarını düzeltip 3. bölüme koydum ve programın işleyiş şeklini öğrenebilmeniz için de onların şematik anlatımını 4 bölümde anlattım!

3. RİM2.nb, 26.07.2019, 11:16:18: Bu program RİM1.nb'nin kısaltılmış şeklidir. Programda başlangıç değerini 1'den 0'a çekerek "$\boldsymbol{Do}\left[\boldsymbol{x[j] = a + \frac{(j-1)h}{2^k}, \{j,1,2^k+1\}}\right]$" komutunu kaldırdım; çünkü $\boldsymbol{x[j]}$'yi toplamdaki f'nin içine yazdım!

4. RİM3.nb, 26.07.2019, 11:34:11: Bu program RİM2.nb'dekiyle aynı olmakla birlikte, bunda trapez yaklaşıklığı için öncekilerde kullandığım (1.11)'deki formülü yerine (1.50)'deki yeni trapez formülünü kullandım. Çünkü şimdiye kadar tüm hesaplamalarımda bu formülü kullandım!

5. E-ATA1-2.2.nb, 27.07.2019, 15:04:02: Bu program, (1.50)'deki trapez yaklaşıklığının (2.34)'teki $m=2$ için elde edilen (2.44)'teki ekstrapolasyona uygulanmasıyla RİM3.nb programındaki gibi en sade haldeki programdır. 4 bölümde anlattığım bu programda, 3. bölümde program çıktısı ve 4. bölümde ise $k = 0,1,2,3,4,5$ için çıktılar teker teker gösterilmiştir. Bu son bölümü eğer program sisteminizde ağır işler ya da çalışmaz durumuna düşürse diye verdim. Çünkü en basit örneklerde bile program sisteminizi zorlar ve belli bir k'den sonrasını göremezsiniz. Bu nedenle, (2.34)'teki $m=1$ için elde edilen ekstrapolasyon yerine bunu kullanmanız daha doğru olur. Çünkü bundaki yakınsama hızı daha iyidir.

6. E-ATA1-2.3.nb, 27.07.2019, 17:00:17: Bu program E-ATA1-2.2.nb'dekiyle aynı olup sadece (2.34)'teki $m=3$ için elde edilen ekstrapolasyonla farklıdır. Ancak bundaki yakınsama hızı hepsinden iyidir!

7. E-ATA1-2.m.nb, 29.07.2019, 20:23:30: Bu program (2.34)'ün genel şekliyle yazılmıştır ve siz, programdaki p için herhangi bir değer girdiğinizde yukarıdaki programları kullanmanıza gerek kalmaz. Ama büyük p değeri için program kullanmanızı tavsiye etmem. Örneğin, program $p=5$ için 6. adımdaki sonucu 17970.6 saniyede yani yaklaşık 5 saatte verir. Bu tür durumlarda 1.4'te gösterdiğim gibi (2.34)'ü adım adım kullanmanız daha doğru olur!

(2.34)'ün PC'deki Uygulaması Hakkında

(2.34)'teki ekstrapolasyonla Mathematica'da çalışırken;

> General: The current computation was aborted because there was insufficient memory available to complete the computation.
> Throw: Uncaught SystemException returned to top level. Can be caught with Catch[…, _SystemException].

uyarılarını alırsanız sakın panik yapmayın. Çünkü sisteminiz yetersiz kalıyor demektir. Kaldı ki (2.34)'teki m'yi artırıp iterasyonda k'yi de artırmaya başladığınız zaman, ***MATHEMATICA***'daki iterasyon sayısını ($IterationLimit) ve maksimum önceliğini (hassaslığını) ($MaxPrecision) ne kadar yüksek ayarlarsanız ayarlayın, belli bir k adımından sonrasını görmek için ya çok beklersiniz ya da hiç göremezsiniz.

2014 Model Sistemim	
İşlemci:	Intel Core i7 4790K, Haswell. 4000 MHZ.
Anakart:	ASUS Z-97 PRO.
Hafıza:	4x8 GB = 32 GB DDR3, 2400 MHZ.
Grafik Kartı:	1. Eski: AMD Radeon R9 270X, 4 GB. 2. Yeni: MSI RADEON RX 5700 XT Gaming X.
Harddisk:	1. Orijinalde SEAGATE 3 TB (çöktü!) 2. Şimdiki SSD 120 GB + Toshiba 2 TB.

İşte yandaki tabloda özellikleri görülen sistemi 4 Ağustos 2014'te tam da bu tür işler için toplamıştım. Dolayısıyla bu tür uyarılar benim ve tabii ki sizin bilgisayarınızın yetersiz kaldığını gösterir. Bu yüzden acilen CPU (ki CPU'da çekirdek sayısı ve işlemci hızı başat rol oynar. Şimdilik Intel Core™ i9-7980X işlemcisi rahat rahat işinizi görür) ve RAM'inizi (DDR 4'lü 64 GB ve üzeri. Tavsiyem 256 GB'tır) artırmanız gerekir. Yani sizin şuradaki gibi bir iş istasyonuna ya da mümkün olursa bir süper bilgisayara ihtiyacınız olacak (**Y.N. *Technopat*** böyle bir iş istasyonunu toplamıştı: "*44 çekirdekli PC topluyoruz!*"). Çünkü yeterince büyük m değerlerinde (2.34) ev kullanıcılarına hitap etmez!

Ben olsam, o iş istasyonunda her bir slota 64 GB olmak üzere (ki desteklediği belirtiliyor) RAM'i 1 TB'a çıkartırdım (ki bu iş istasyonu makalemi yazarken toplanmıştı. Ama şimdi öğrendiğime göre, ***Scatter Volt***, 2 ay sonra 95461.52 $'lık bir iş istasyonu daha kurmuş ve bir öncekindeki beklentimi duymuş olacak ki buna 2 TB'lık RAM koymuş! Ancak insanların bu PC karşısında çıldırması gerçekten de görülmeye değer (Bkz. 5:32. Onların bu halini görünce aklıma birden 9/11 geldi!). Ama bence acele etmeyin, çünkü DDR5'li RAM'ler 2018'de çıkacakmış. "*DDR5 RAM'lerin çıkış tarihi açıklandı!*" haberine göre ilk kez 128 GB'lık RAM modülü piyasaya sürülecekmiş. Bunun için o haberde bir de utanmadan şu yorum yapılmış: "***DDR5 RAM****'ler ile birlikte ilk defa **128 GB** modeller ile tanışacağız. Açıkçası bu kadar yüksek boyutlarda*

RAM'lere ihtiyaç duyulur mu orası aşikar. Şu anda oyunlar için minimum 8 GB, maksimum 16 GB'lık modüller zaten işimizi görüyor. Yeni RAM modülleri ise 2018 yılında piyasada yerini almaya başlayacak!"

Fakat Technopat'tan aldığımız en son habere göre DDR 5 RAM'ler 2019'un başında çıkacakmış. Özetle, bu işin sonu yoktur. Çünkü bu işe bir kere başladığınız zaman nerede ve nasıl duracağınızı kestiremezsiniz! Fakat hiç yoktan elinizde ortalama bir PC olması iyidir. Ancak ortalama bir PC derken neyi kastediyorum? Örneğin, bilgisayar satıcıları Windows 10 için 16 GB RAM'in yeterli olduğunu söyler. O zaman siz, yukarıdaki tabloda görüldüğü gibi 2014'te sistemim için seçtiğim 32 GB'lık RAM alacaksınız. Onlar size ne diyorsa, siz onun 2 katını almaya çalışın. Çünkü böyle bir sistemde hem şimdiki iş çalışmalarınızda ve oyunlarda rahat edersiniz, hem de gelecekteki yeni gelişmeler karşısında. Örneğin ben, Vatan Bilgisayar'dan 17.05.2018, 18:15:30 çıkış tarihli Samsung C32HG70QQM modelinde bir monitör aldım. Bu monitörün ülkemize gelmesi için 1 yıldır bekliyorum (ki yurtdışından almanın ne kadar riskli olduğunu herkes bilir. Yani bu monitörü 1 yıl önce Amazon'dan alabilirdim ve o sırada şansa bakın ki LG televizyonum da arızalanmış ve LG'nin Türkiye'deki şubesini arayarak, eğer Amazon'dan yeni bir LG televizyonu alırsam garantisinin Türkiye'de geçerli olup olmadığını sordum. Böyle bir şeyin sözkonusu bile olamayacağını söylediler); çünkü bu monitör tüm ihtiyaçlarıma cevap veriyordu. Ama o sırada 27" ve 32" arasında bocalıyordum ve epey bir zaman harcadıktan sonra büyüğünde karar kıldım (ki bunda 1 yıl önce satışa sunulan ama hem fiyatının yüksekliği, hem de Full HD olmasıyla nedeniyle vazgeçtiğim Samsung 49" monitörü etkili olmuştu). Hemen **"Sepete Ekle"** tuşuna bastım. Sanki yangından mal kaçırıyormuşum gibi. Çünkü bu monitörün o andaki fiyatı KDV'siyle birlikte 3731.92 TL idi ve eğer hemen almazsam fiyatın artacağına dair garip bir his vardı içimde. Gerçekten de öyle oldu ve bir ara dolardaki ani yükselişler nedeniyle maksimumda 1000 TL'lik fark oluştu. Yani eğer 2014'te o sistemi toplamasaydım bu monitörü kullanmam mümkün olmazdı. Çünkü grafik kartım destekliyor ama yine de monitörü tam randımanlı kullanabilmek için yeni bir ekran kartı gereklidir. Yukarıdaki tablodan görüldüğü üzere şimdi (Kara Cuma'da) bunu da temin etmiş durumundayım. Ama bunun hikâyesi daha da ilginç!

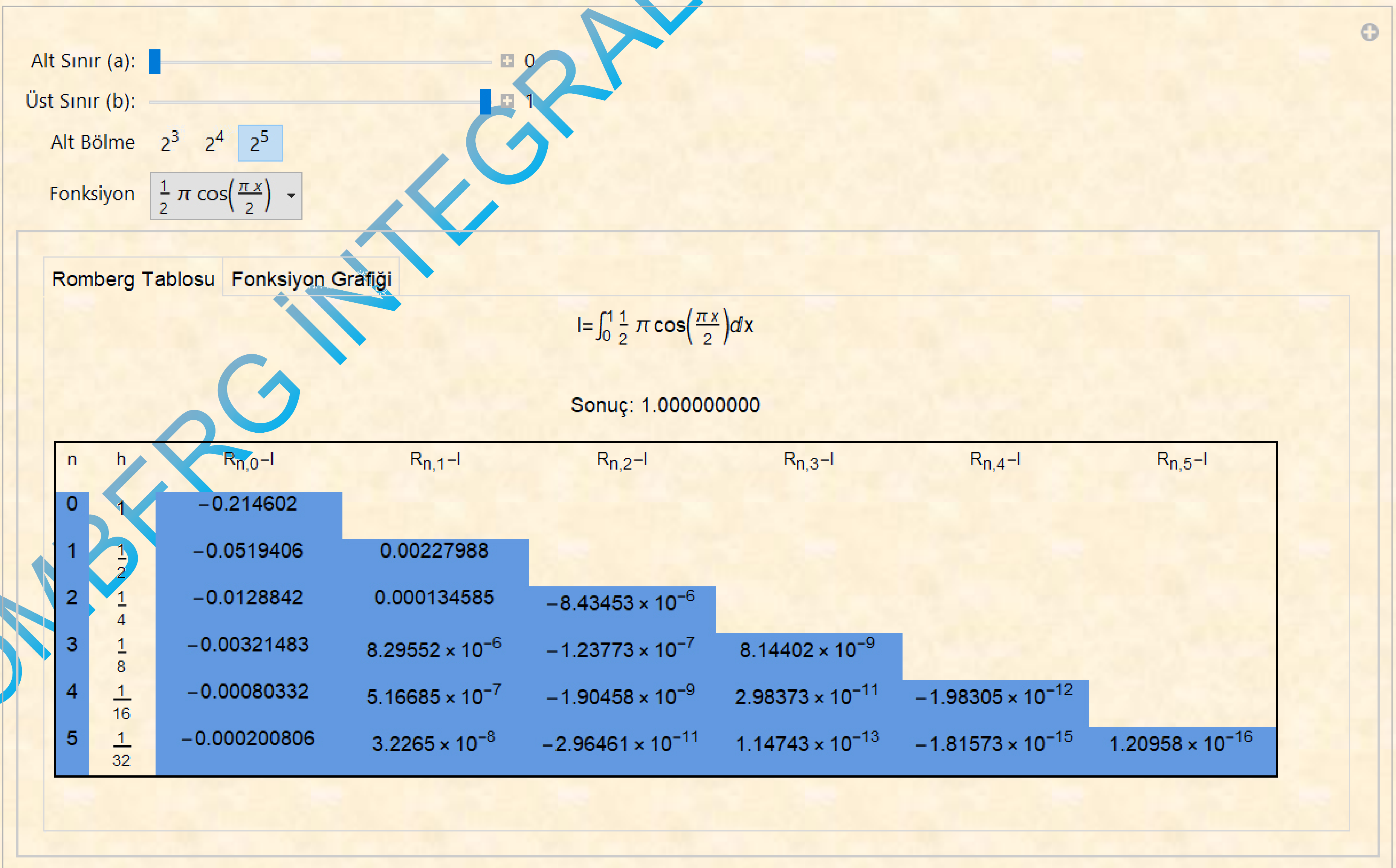
3.2. Mathematica Demoları (Gösterimleri). Aşağıdaki demoları ***Eugenio Bravo Sevilla***'nın 7 Mart 2011'de yaptığı *"Numerical Integration: Romberg's Method"* adlı demosundan hareketle yukarıdaki ilgili programlardan yaptım. Bu demolarda sözkonusu olan şey, Romberg Tablosu'dur ki *"Using Mathematica In Teaching Romberg Integration/2. Romberg Integration with Mathematica"* makalesinde bildirildiği üzere alt bir programa ihtiyaç vardır. Fakat bu, Mathematica'da

$$(3.4)\quad \text{TableForm}\Big[\text{Table}\big[\text{N}\big[\text{N}[\text{romb}(\text{mi},\text{j}) - \text{I}, 10]\big], \{\text{i},0,\text{n}\}, \{\text{j},0,\text{i}\}\big]\Big]$$

yazımıyla derhal elde edilebilinmektedir ki ilk bölümdeki nb uzantılı her bir programın çıktısında bu işlemi yapmak yeterlidir (**Y.N.** Bu işlemdeki romb(mi, j)'nin matematiksel ifadesi $R_{mi,j}(K)$'dir). Kaldı ki ben bu işlemi her programın 1.3. bölümünde yaparak Romberg tablosunu verdim!

İşte bu sonuçla aşağıdaki demolar fantezi olarak kalır. Çünkü aynı şeyi ilk bölümdeki programlarda (3.4)'ü kullanarak zaten yapıyorsunuz ve böylece Romberg tablolarını görüntüleyebiliyorsunuz. Ancak aşağıdaki demolardaki tabloların bundan farkı, satır-sütun başlıklarını, h farklarını ve alt sınır-üst sınırların 12'ye bölünmesiyle ortaya çıkan Romberg tablolarıdır. İşte bunların dışında, yukarıdaki nb uzantılı dosyalardan (3.4) ile elde edilen ve demolardaki Romberg tabloları tamamen aynıdır. Yani demolardaki Romberg tablosu profesyonel olmayanlar için ideal olmakla birlikte, profesyonel olanlara ilk bölümdeki programlarda (3.4)'ü kullanmasını tavsiye ederim!

1. RİM2.cdf, 22.12.2019, 15:36:30-RİM3.cdf, 22.12.2019, 15:47:38: Bu demolarda sırasıyla (1.11)'deki ve (1.50)'deki trapez yaklaşıklıklarını kullandım ve programları ilkindeki gibi sembolik olarak yazdım (ki bu size, formülleri kontrol etme ve kolayca anlama şansı verir). Romberg tablosunda ise hızlı yakınsamalar nedeniyle ***Eugenio Bravo Sevilla***'nın yaptığı gibi sonuçları listelemek yerine mutlak hataları göstermeyi seçtim. Çünkü tablodaki elemanların yakınsama hızlarını görmek mümkün olmuyordu (ki ***Eugenio Bravo Sevilla***, **"//N"**yi kullanarak sonuçları 6 ondalık doğrulukla yaklaşık olarak gösteriyordu. Ama ben bunu kaldırıp programda gerekli ayarlamaları yaptıktan sonra Mathematica'daki maksimum önceliğini kullanarak mutlak hatalarda tam sonuçları gösterdim).



n	h	$R_{n,0}-I$	$R_{n,1}-I$	$R_{n,2}-I$	$R_{n,3}-I$	$R_{n,4}-I$	$R_{n,5}-I$
0	1	−0.214602					
1	$\frac{1}{2}$	−0.0519406	0.00227988				
2	$\frac{1}{4}$	−0.0128842	0.000134585	-8.43453×10^{-6}			
3	$\frac{1}{8}$	−0.00321483	8.29552×10^{-6}	-1.23773×10^{-7}	8.14402×10^{-9}		
4	$\frac{1}{16}$	−0.00080332	5.16685×10^{-7}	-1.90458×10^{-9}	2.98373×10^{-11}	-1.98305×10^{-12}	
5	$\frac{1}{32}$	−0.000200806	3.2265×10^{-8}	-2.96461×10^{-11}	1.14743×10^{-13}	-1.81573×10^{-15}	1.20958×10^{-16}

Tablo 3.1. Romberg tablosu.

Şimdi bu tabloyu yorumlamadan önce ***Romberg***'in 1955'te yaptığı tablonun ne olduğunu öğrenelim ve ondan sonra karşılaştırmalı olarak inceleyelim!

Romberg'in Tabloları

Romberg, 14 Şubat 1955'teki "***Vereinfachte Numerische Integration von Werner Romberg***" tezinde hem kendi metodu için hem de ***Ole Amble***'ın metodu ([16]) için 2 tablo verir. Fakat bu tablolar orijinal metotlara bağlı kaldığı için günümüzdeki gibi yani Tablo 3.1'deki gibi değildir!

Onun hazırladığı tablolar ve verdiği bilgiler şöyledir:

Die Näherungswerte sind in der folgenden Tabelle aufgeführt:

Tabelle der Näherungswerte wachsender Ordnung				
Intervall-Länge	**Rest Prop.**			
	h^2	h^4	h^6	h^8
8h	$T_1 = 0{,}785398163$			
	$U_1 = 1{,}110720735$			
4h	$T_2 = 0{,}948059449$	$S_2 = 1{,}002279878$		
	$U_2 = 1{,}026172153$	$V_2 = 0{,}997989293$		
2h	$T_4 = 0{,}987115801$	$S_4 = 1{,}000134584$	$R_4 = 0{,}999991566$	
	$U_4 = 1{,}006454543$	$V_4 = 0{,}999882006$	$W_4 = 1{,}000008187$	
h	$T_8 = 0{,}996785172$	$S_8 = 1{,}000008296$	$R_8 = 0{,}999999876$	$Q_8 = 1{,}000000008$

Näherungswerte, mit Aussenpunkten:

Tabelle der Näherungswerte wachsender Ordnung				
Intervall-Länge	**Rest Prop.**			
	h^4	h^6	h^8	h^{10}
8h	$\hat{T}_1 = 0{,}916297857$			
	$\hat{U}_1 = 1{,}018160673$			
4h	$\hat{T}_2 = 0{,}994339480$	$\hat{S}_2 = 0{,}999542255$		
	$\hat{U}_2 = 1{,}001125581$	$\hat{V}_2 = 0{,}999989908$		
2h	$\hat{T}_4 = 0{,}999639087$	$\hat{S}_4 = 0{,}999992394$	$\hat{R}_4 = 0{,}999999539$	
	$\hat{U}_4 = 1{,}000070227$	$\hat{V}_4 = 0{,}999999870$	$\hat{W}_4 = 1{,}000000028$	
h	$\hat{T}_8 = 0{,}999977330$	$\hat{S}_8 = 0{,}999999879$	$\hat{R}_8 = 0{,}999999998$	$\hat{Q}_8 = 1{,}0$

Wir sehen, dass Q_8 mit I in 8, $\hat{Q}_8$ sogar in 10 Dezimalen übereinstimmt. Welche Methode man verwendet, hängt ganz davon ab, wie sich die F_k berechnen lassen. Sind sie leicht zu finden, teilt man besser feiner ein. Erfordert ihre numerische Berechnung viel Arbeit, dann empfiehlt sich eine Methode hoher Näherung, wie wir sie hier angegeben haben.

Romberg'in MADAS ATG-20'si!

Hiç unutmam, ***Romberg***'in tezini 23.12.2018, 19:03'ten 24.12.2018, 11:00'e kadar yani Noel demeden aralıksız olarak temize çekerken bir şey dikkatimi çekmişti: ***Romberg*** yukarıdaki tablolarda hiç hata yapmamış (ki oysa Tablo 2.1'de 2 tane hata vardı ve onları kırmızı olanlarla düzelttim. Yani bu hatalar ***Jean Luc Chabert***'in dikkatsizliğinden kaynaklanıyordu). Çünkü ***Romberg*** 1955'te İsviçre malı MADAS Model 20 ATG'yi kullanıyordu (Bkz. "*John Wolff's Museum: MADAS Calculators*"). MADAS ATG-20; çok lüks, tam fonksiyonlu, yüksek kaliteli bir mekanik hesap makinesidir. Bireysel çarpmaların sonuçlarının toplanmasına izin veren taşımada fazladan bir kayıt var. Bu kayıt hesaplama işlemine geri alınamaz, bu yüzden gerçek bir hafıza olduğunu düşünemezdim. ***Romberg***'in makinenin 30 kelimeyi barındırdığını söylediği yer burasıdır. Ama buradaki **"Kelime (Word)"** terimi şimdiki gibi modern olarak 2 Byte anlamında değildi. Çünkü **"Byte"** terimi bile 1956'da ***Werner Buchholz*** tarafından IBM 7030'un tasarımı sırasında ortaya çıkmıştı. Makinedeki Sayaç II, iki parçaya bölünür. Yalnızca sol kısmı temizlemek ve geçerli sonucu sağ kısımda bırakmak mümkündür. Ayrıca, makine diğer makinelerden daha belirgindir. Ekstra kayıt, bölünmüş kayıt II ve birçok düğme ve anahtar çok yönlü bir makine haline getirir, ancak bu çok yönlülüğün bir bedeli vardır; kullanımı zor. Friden SBT10, Diehl DSR18 ve Olympia RA20 gibi çok yönlü makinelere sahip rakiplere kıyasla da çok pahalıydı.

Tabloların Karşılaştırılması

Şimdi ***Romberg***'in tablolarıyla Tablo 3.1'i karşılaştırırsam şu sonuçların çıktığını görürüz: Eğer alıntıdaki tablolarda ***Romberg***'in (1.55)'teki örneğine göre $h = \frac{b-a}{8} = \frac{1-0}{8} = \frac{1}{8}$ farkını koyarsanız Tablo 3.1'deki h sütunundaki farkları elde edersiniz. Buna göre ***Romberg***'in Tablo 3.1'e göre 4x4'lük bir tablo çıkartmış olduğunu görürsünüz. Bu durumu başlıktaki demolarda Tablo 3.1'deki Alt Bölme'deki 2^4 tabına basarak açıkça görebilirsiniz. ***Romberg***'in yukarıdaki mavi renkli tablosunun bundan farkı, metoduna göre alt ve üst sınırlarla birlikte yapmasıdır. Yani ***Romberg***, Tablo 3.1'deki Alt Bölme'deki 2^4 tabındaki tabloyu alt ve üst sınırlar için 2 kez yapar. Biz ise günümüzde bu tabloyu sadece trapez yaklaşıklıkları için 1 kez yaparız. Çünkü alt ve üst sınırlara yani trapez ve orta nokta yaklaşıklıklarınının aritmetik ortalaması bir sonraki trapez yaklaşıklığını verir!

İkinci olarak, ***Ole Amble***'ın kavuniçi renkli tablosu ile ***Romberg***'in mavi renkli tablosunu karşılaştırdığınız zaman, ***Ole Amble***'ın Resim 1.4'te (soldaki kişi) neden pis pis sırıttığını anlarsınız. Çünkü ***Ole Amble***'ın yaklaşıklıkları ***Romberg***'inkilerine göre 1 adım (sütun) öndedir. Yani ***Lewis Fry Richardson*** gibi bir meterolog olan ***Ole Amble***, bu sonuçla iftihar eder. Fakat ***Romberg*** bunu dert etmez. Çünkü aynı ekstrapolasyon altında bu farkın bir önemi yoktur. Nitekim ***Romberg***, "*Wir sehen, dass Q_8 mit I in 8, $\hat{Q}_8$ sogar in 10 Dezimalen übereinstimmt (Q_8'i I ile 8'de görürüz, hatta $\hat{Q}_8$'i 10 basamakta 1 olarak görürüz)*" ifadesiyle aradaki farkın sadece sondaki 8 rakamı olduğunu söyler!

2. E-ATA1-2.2.cdf, 22.12.2019, 16:07:50: Bu demo E-ATA1-2.2.nb programının gösterim şeklidir. Fakat aşağıdaki tablo ***Romberg***'in 1955'tekine mavi tablosuna göre, dolayısıyla Tablo 3.1'e göre daha gelişmiş şekildedir. Yani ***Romberg***, 1955'te mavi tabloyla birlikte bu tabloyu da vermiş olsaydı MADAS ATG-20'siyle 4.

([16]) Bu metodu "***Romberg İntegrali 2016-2020***" adlı kitabımın "***BÖLÜM 4: UYGULAMALAR/4.1. Ole Amble Metodu (01.02.2019, 20:21)***"de modernleştirdim ve zenginleştirdim!

satırdaki ekstrapolasyonik çıktılarda sırasıyla şu sonuçları görmüş olacaktı: Mavi renkli tablodaki Q_8'i $R_{12,1}(K) = 1.000000008$'de ve kavuniçi renkli tablodaki $\hat{Q}_8$'i $R_{12,2}(K) = 1$ ve $R_{12,3}(K) = 1$ olarak görmüş olacaktı!

$$I=\int_0^1 \frac{1}{2}\pi\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$$

Sonuç: 1.000000000

n	h	$R_{2n,0}-I$	$R_{2n,1}-I$	$R_{2n,2}-I$	$R_{2n,3}-I$	$R_{2n,4}-I$	$R_{2n,5}-I$
0	1	−0.214602					
2	$\frac{1}{4}$	−0.0128842	0.000563643				
4	$\frac{1}{16}$	−0.00080332	2.07245×10^{-6}	-1.29787×10^{-7}			
6	$\frac{1}{64}$	−0.0000501999	8.0659×10^{-9}	-2.97308×10^{-11}	1.95591×10^{-12}		
8	$\frac{1}{256}$	-3.13746×10^{-6}	3.15002×10^{-11}	-7.23052×10^{-15}	2.7985×10^{-17}	-1.85987×10^{-18}	
10	$\frac{1}{1024}$	-1.96091×10^{-7}	1.23046×10^{-13}	-1.76484×10^{-18}	4.25354×10^{-22}	-1.66293×10^{-24}	1.10778×10^{-25}

Tablo 3.2. Romberg tablosu.

Yani bu tablodaki çıktılar için 10 basamaklı bir hesap makinesi kullanmanın bir yararı yok; çünkü yakınsamalar Tablo 3.1'dekine göre üstündür. Fakat asimptotik hataların oranından bu üstünlüğün kanıtını burada vermem doğru olmaz. Ama bir örnek olması için şunu verebilirim: Tablo 3.1'deki köşegenel elemanlardaki 10'un kuvvetlerine $\frac{1}{4^{\binom{k+1}{2}}}$'nin 10'un kuvvetlerini eklerseniz bu tablodaki köşegenel elemanların 10'un kuvvetlerine mükemmel bir yaklaşımda olduğunu görürsünüz!

Romberg'i Tanımak Gerekiyor!

Öyle görünüyor ki ***Romberg*** 1955'te 10 basamaklı MADAS ATG-20 adlı hesap makinesiyle alıntıdaki mavi renkli tablodaki sonuçları vermişti ve günümüzde de yalnızca Tablo 3.1 kullanılıyor. Fakat Tablo 3.2 ***Romberg***'in ölümünden hemen sonra (2003 yazı) elimde mevcut idi. Bu, bana göre garip ama anlamlı bir tesadüftür. İşte bu garip tesadüfün ancak 2016'da değil, 2018'de farkına varabildim. Çünkü (2.34)'ü 2018'de yeniden keşfetmiştim ve geriye dönüp baktığım zaman Alıntı 2.3'ü gördüm. Yani (2.34)'ü ilk kez 2003'te keşfetmiştim, ama Alıntı 2.3'ün içinde olduğu **"*E-ATA 1 Algoritmaları*"** adlı çalışmamı ileride geliştirmek üzere bir kenara kaldırdığım için ben de unutmuştum. Kaldı ki ***Romberg***'in ölmüş olduğunu 2003'te değil, 2016'da öğrendim. Peki bu, bir hata mı? Hayır, tam tersine eğer ben, bu çalışmaya 02.11.2016'da başlamış olmasaydım (2.34), dolayısıyla Tablo 2.3 hep unutulmuş olarak kalacaktı. Ta ki bir diğer meraklı çıkana kadar! Ama ben size bir şey söyleyeyim mi; daha baştan hacimli bir çalışma olduğu belli olan bu çalışmaya ilk başladığım zaman Almanlar'ın ***Romberg***'e değer vermediklerine şahit olmuştum ve bu, bir yerde beni kamçılıyordu. Sonra çalışmam olgunlaştığı zaman, 2018 yazında, *"**Romberg**'in oğlu olsa bile, **Romberg**'e bu kadar hizmet edemezdi!"* diyerek kendimi ***Romberg***'in yanında konumlandırmaya başladım. Çünkü aynı duyguyu daha önceden Giza Piramitleri'nde de yaşamıştım ve orada da ne kadar iyi hizmet edersem kendimi o derece Firavunlara yakın hissederdim. Bu sağaltıcı ilişkinin salt duyguya dayanmadığını ***Romberg***'i tanıdıktan sonra yani onun hakkında bilgiler edindikten sonra **"zihinsel olgunlaşma (gestiege Reife)"** nedeniyle bilinç düzeyinden kaynaklandığını öğrendim.

Romberg hakkında verilen bilgilerden bazılarını romberg-integrali.org adlı sitemin girişindeki kırmızı bantta görebilirsiniz. Örneğin, ***Peter Sandner*** onun için şöyle der:

*"Açık ve anlaşılır bir insandı… Ve her şeyden önce nazik ve mütevazi bir insandı… Bu özelliklerinden dolayı **Werner Romberg** benim rol modelimdi ve daima öyle kalacak. Bu görüşü, onu Friedrich Ebert Platz'daki Bilgisayar Merkezi'nin ilk yıllarında şahsen tanıma fırsatını bulan tüm Bilgisayar Merkezi personeliyle paylaşıyorum"*

Yani bu sözden de anlaşılacağı gibi ***Romberg***'i ve Firavunları sadece sevmek yetmez; onlara hizmet etmek de gerekiyor. Örneğin, ***Tuthankamon***, ***Zahi Hawass***'ın çocuğu ya da babası mı? Değil ama, ***Zahi Hawass Tutankamon*** ile sanki öylemiş gibi ilgilenir (Bkz. "*King Tut Unwapped Ep. 1-Part. 1*". İnanılır gibi değil, linke tıkladığınızda ***Hawass***'ın atası kral ***Tutankhamon***'un önünde yere kapaklanacağına besmele çektiğine şahit olacaksınız. Bu, Eski Mısır'da küfür demekti. Bilindiği üzere ***Tutankhamon***'un babası ***Akhenaton*** döneminde dinde devrim yapılarak tek tanrı Aton dinine geçilmişti. Fakat ***Akhenaton*** ölünce tahta oğlu ***Tutankhamon*** geçti ve Amon Rahipleri'nin de baskısıyla tekrar eski dine yani Amon dinine dönüş oldu. Kral ***Tutankhamon*** sadece bununla yetinmedi; babasından kalan ne varsa her şeyi kaldırttı. O noktadan itibaren ***Akhenaton*** lanetlenerek **"Sapkın Firavun"** olarak anılmaya başlandı ve mumyası çürümeye terkedildi. 1907'de mumyası harap halde keşfedildi. Parçalanmış tabutu üzerindeki kraliyet sıfatları, tek bir tanrıya tapmak için ülkenin tanrılarını hiçe sayan sapkın firavun ***Akhenaton*** olabileceğini gösteriyordu. DNA analizleri mumyanın ***Tutankhamon***'un babası olduğunu belgeledi. Bkz. "*Mısır'ın Genç Firavunu: Tutankhamon*"). İşte bu sağaltıcı ilişkiyi anlayabilmemiz için o bilinç düzeyine gelmemiz gerekiyor. Çünkü bu tür işleri para, pul, şan, şöhretle açıklamanız mümkün değil. Bunu belki gizem avcılığı olarak açıklayabilirsiniz!

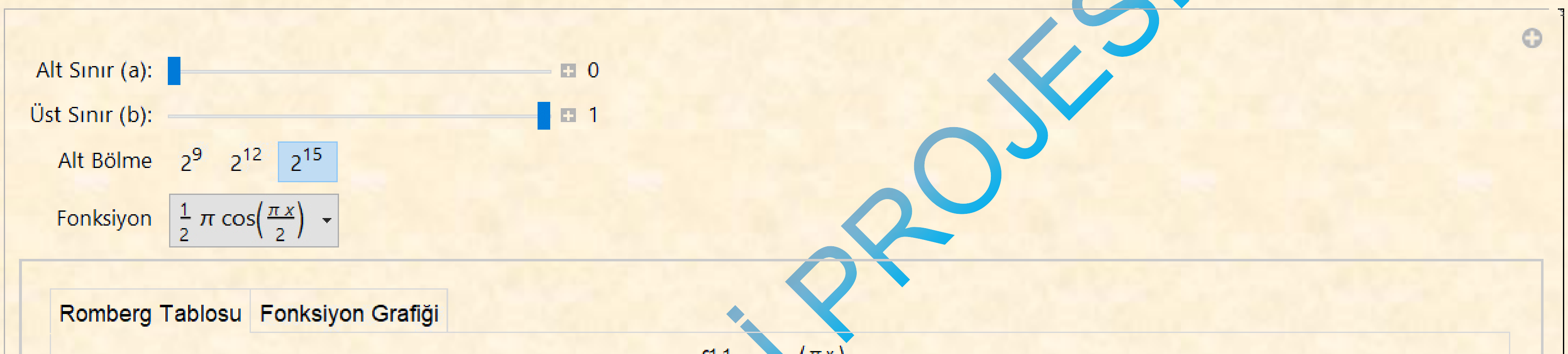
Tabloların Karşılaştırılması

Şimdi Tablo 3.1 ve 3.2'yi karşılaştırırsam şu sonuçların ortaya çıktığını görürsünüz:

1. Trapez yaklaşıklıkları Tablo 3.1'de seri halinde (bkz. Tablo 2.2) ve bunlara karşılık gelen h farkları 1'in devamlı surette 2'ye bölünmesi iken Tablo 3.2'de ise ilk trapez yaklaşıklıklığından itibaren Tablo 3.1'e göre 2'şer 2'şer atlanır (bkz. Tablo 2.3) ve bunlara karşılık gelen h farkları 1'in devamlı surette 4'e bölünmüş şeklindedirler.
2. Tablo 3.1'in ilk sütunundaki trapez yaklaşıklıkları için (2.43)'teki ekstrapolasyon mevcutken Tablo 3.2'nin ilk sütunundaki trapez yaklaşıklıkları için ise (2.44)'teki ekstrapolasyonu mevcuttur. Buna göre ***Romberg*** ve çağdaşları ilkine odaklanmışken ikincisini kaçırmaları gerçekten şaşırtıcıdır!
3. Tablo 3.1 ve 3.2'deki yakınsama hızlarını (2.43) ve (2.44)'teki ekstrapolasyonlarındaki büyük O içindeki kesme hatalarından kolaylıkla anlayabilirsiniz. Yani (2.44)'teki kesme hatasındaki h'nin alt indisi (2.43)'tekinden 2 kat büyük olduğu için Tablo 3.2'deki yakınsama hızı Tablo 3.1'dekinden daha iyidir.

Özetle, bu sonuçlara göre Tablo 3.2'deki yaklaşıklıkların yakınsama hızları Tablo 3.1'dekilerine göre hızlıdır. Bu durumda Tablo 3.1 artık 1955'te kalmış ve tarihe karışmışken Tablo 3.2 günümüze hitap eder!

3. E-ATA1-2.3.cdf, 23.12.2019, 04:07:54: Bu son demo E-ATA1-2.3.nb programının gösterimi olmakla birlikte, Tablo 3.1&3.2'nin gelişmiş şeklidir. Bu nedenle bu tabloda ***Romberg***'in kullandığı MADAS ATG-20'si bir işe yaramaz. Yani tablodaki yaklaşıklıkları MADAS ATG-20 ya da günümüzdeki 10 basamaklı bilimsel hesap makineleri (ki özellikle üniversitelerimizin çeşitli bölümlerinde okuyan öğrencilerin kullandıkları hesap makineleri bu türdendir) hesaplamanın bir anlamı olmaz. Çünkü bu yaklaşıklıklar ***Romberg***'in, "***Vereinfachte Numerische Integration von Werner Romberg***" tezindeki **"ANHANG (EK)"**'inin sonunda *"Unsere Methode liefert auf einfache Weise die Näherungen höherer Ordnung (Bizim yöntemimiz basit bir şekilde yüksek dereceli yaklaşımları sağlar)"* dediği gibi 1'e 10 basamağı aşacak seviyelerde hızlı bir şekilde yakınsarlar. Ama onun bahsettiği metot 1955'te kaldı, dolayısıyla artık günümüzde bir geçerliliği kalmadı. Ancak o bu sözü söylerken arzuladığı şey tam anlamıyla burada gerçeklemiş durumdadır. Çünkü onun metodunu geliştirdim ve arzusunu hem Tablo 3.2'de hem de aşağıdaki tabloda görüldüğü üzere yerine getirmiş bulunuyorum. İşin kötüsü, ***Romberg (1909-2003)***, bunu yapabilecek kadar uzun yaşadı ama neden bunu yapmadı? Eski Mısır'da bu yaşa gelene bilge gözüyle bakılıyordu. Çünkü Eski Mısır'da insanların ömrü genellikle 40-50 yıl idi. Bu yüzden her Firavun tahta geçer geçmez piramitinin yapımını başlatırdı. Örnekse ***KHUFU*** 20 yaşında tahta geçtiğinde Büyük Piramit'in yapımına başlanmıştı. ***KHUFU***'dan 4200 yıl sonra ***Snellius (1580-1626)*** Eski Mısırlılar gibi 46 yaşına kadar yaşadı!



$$I=\int_0^1 \frac{1}{2}\pi\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$$

Sonuç: 1.000000000

n	h	$R_{3n,0}-I$	$R_{3n,1}-I$	$R_{3n,2}-I$	$R_{3n,3}-I$	$R_{3n,4}-I$	$R_{3n,5}-I$
0	1	−0.214602					
3	$\frac{1}{8}$	−0.00321483	0.000140521				
6	$\frac{1}{64}$	−0.0000501999	3.22858×10^{-8}	-2.02159×10^{-9}			
9	$\frac{1}{512}$	-7.84366×10^{-7}	7.87505×10^{-12}	-7.23574×10^{-15}	4.76005×10^{-16}		
12	$\frac{1}{4096}$	-1.22557×10^{-8}	1.92259×10^{-15}	-2.75756×10^{-20}	2.6604×10^{-23}	-1.76808×10^{-24}	
15	$\frac{1}{32768}$	-1.91496×10^{-10}	4.69383×10^{-19}	-1.05191×10^{-25}	1.58418×10^{-30}	-1.54381×10^{-33}	1.02842×10^{-34}

Tablo 3.3. Romberg tablosu.

Her neyse, bu tablonun ilk satırındaki n değerlerinde görüldüğü gibi trapez yaklaşıklıkları ilk trapez yaklaşıklıklığından itibaren Tablo 3.1'e göre 3'er 3'er atlamayla alınırken bunlara karşılık gelen h farkları $\frac{1}{2^{3n}}$'dir. Sütun başlıklarındaki ekstrapolasyonlar ise (2.34)'ün $m = 3$ için alındığını gösterir ve bu yüzden en yüksek yakınsama bu tablodadır. Hiç şakası yok, bu tabloyu Mathematica'da elde edebilmek için birkaç saat bekledim ve görüntüsünü CTRL+PRINT SCREEN ile aldım (ki aynı durum E-ATA1-2.3.nb'de (3.4) ile Romberg tablosunu almaya çalıştığınız zaman da geçerlidir). Çünkü demo buna izin vermiyordu. Yani sistemim bu demoyu oynatabilecek güçte değil ve bunun için çok güçlü bir sisteme ihtiyaç vardır. Eğer sizin böyle bir sistemininiz varsa demo çalışır haldedir ve yukarıdaki tabloyu Mathematica'da görmeniz gerekir.

Derya PAMUKTULUM

§4. EKLER

EK 1: *HERON*'un "METRICA"da *ARŞİMET*'in π İçin Verdiğini İddia Ettiği Sınırlar Hakkında

20.10.2016, 17:50.

HERON*, *"METRICA I, 25"'te π için şu sınırları vermiştir:

$$(4.1)\quad 3.141(634910\cdots) = \frac{211875}{67441} < \pi < \frac{197888}{62351} = 3.1(73774278\cdots).$$

WILBUR R. KNORR'un bu kesirler hakkındaki bulguları şunlardır: *"**ARŞİMET**, (4.2)'deki kesirleri geliştirmek için **"On Plinthides and Cylinders (Prizmalar ve Silindirler Hakkında)"** çalışmasında bu kesirleri verdi. Bu kesirler PLATE I'deki nümerik kısımda açık bir şekilde gözüküyor. Fakat bu kesirler aynı folyonun altındaki boşlukta tekrar gözükür (Bkz. "Archimedes and Measurement of the Circle: A New Interpretation")".*

Burada ***HERON***'un verdiği alt sınır yanlıştır ve üst sınırı da kötü bir yaklaşıklıktır. İşin kötüsü, bu değerlerin verildiği çokgenlere ait çizimler de yanlıştır. Yani ***HERON*** yanlış üstüne yanlış yapmıştır! Demek ki ***HERON*** bunları bir yerden kopyalamış ama bunların doğru olup olmadığını kontrol edememiştir. Aslında ***HERON*** ya da onun adına bu değerleri veren kimse, haddi olmayan konuya el atmıştır. Çünkü tarihi kaynaklar bize, Antik dönemde ve ***EL KAŞİ***'ye kadar olan döneme kadar ondalık açılımın bilinmediği, hatta sıfır rakamının bilinmediğini ve kareköklü sayılara yapılan yaklaşımların sadece kesirlere bağlı kaldığını söyler. Fakat bunların hepsi birer koca yalandır. Çünkü sıfır rakamı M.Ö. 2000'lerde Eski Babil tabletlerinde yazılmasa bile bal gibi de biliniyordu. Sıfır rakamı için bir sembol kullanımı ilk kez Yeni Babil dönemindeki 8. y.y.'da başlamıştır (**Y.N.** Matematikte 60 tabanındaki sıfır her tabanda sıfır demektir. Bu durumda sıfır rakamı M.Ö. 2000'lerde ve muhtemelen Sümer dönemine giderek yazının icadında, hatta ondan önce de mevcut idi). İkinci olarak, 10 tabanını keşfeden kişi olarak ***EL KAŞİ*** lanse edilir. Bu da doğru değildir. Çünkü M.Ö. 16. y.y.'da kâtip ***AHMES***, Problem 48'deki sayıları 10 tabanında yazmıştır (Bkz. "*Ancient Egyptian Mathematics, Vol. III, Plate 70*"). ***EL KAŞİ***'nin ***AHMES***'ten farkı, ondalık sayıları yazmasıdır. Fakat sayıların 60 tabanında 10 tabanındaki gibi basamaklar halinde yazımı taa Sümerler'den beri biliniyor ve Eski Babiller döneminde de 60 tabanında astronomi ve matematikte çok karmaşık hesaplar yapılmıştır. Örneğin, M.Ö. 1800'lere ait YBC 7289 no'lu tabletinde $\sqrt{2} \cong 1; 24,51,10$ (ki 60 tabanında 3 altmışlığı ve 10 tabanında da 5 ondalığı doğrudur) verilmiştir. Yani ***ARŞİMET*** ve diğer Grek astronom ve matematikçilerinin hesaplarında 60 tabanını kullanmalarına hiçbir engel yoktu. Nitekim ***PTOLEMY***, M.S. 150'de $\pi \cong 3; 8,30$ yaklaşıklığını vermiştir. Özetle, bilimsel emperyalizm günümüzde olduğu gibi antik dönemde de mevcut idi.

SITCHIN bu konuda şöyle der: *"Sahtecilik, bir ün ve servet aracı olarak ticaret ve sanatta, bilimde ve antikacılıkta alışılmadık bir şey değildir. Açığa çıktığında kayıplara ve utanca yol açabilir; açığa çıkmadığında ise tarihi değiştirebilir"*, *Dünya Tarihçesi 2: Gökyüzüne Merdiven, Firavunun Adıyla Oynamak*.

İşte bunu aşmanın tek yolu, aklınızı işletmenizdir.

Resim 4.1. Leyden Üniversitesi Matematik Profesörü *WILLEBRORD SNEL VAN ROYEN (1580-1626)*, Eratosthenes Batavus (Lugd, Batavian)-1617.

HERON, ***ARŞİMET***'in (4.1)'i daha küçük olan

$$(4.2)\quad 3.14(0845070\cdots) = 3\frac{10}{71} < \pi < 3\ \frac{1}{7} = 3.14(2857\cdots)$$

kesirlerini geliştirerek verdiğini iddia eder. Fakat ***HERON* "METRICA"**da yalnızca üst sınır kesri verir ve alt sınır kesir ise ilk kez ***Eutokios***'un yorumundan sonra gözükür!

Bir diğer iddia, Hollandalılar'a göre [17], ***SNELLIUS***'un, 1621'de *"CYCLOMETRICUS: De circuli dimensio secundum"* çalışmasında (2.12)'deki M_7 algoritmasını kullanarak,

$$(4.3)\quad \pi > \frac{2\times 3\frac{10}{71} + 3\ \frac{1}{7}}{3} = 3.1415(157612\cdots)$$

yaklaşıklığıyla ***ARŞİMET***'in kesirlerini 2 kat hızlandırmış olmasıdır. Kaldı ki bu derecedeki bir yaklaşımı ***Huygens***'in (2.22)&(2.23)'teki algoritmalarıyla yapılan (2.36)-(2.39)'daki yaklaşıklıklarda görmek mümkün değildir!

Burada da şu tarihi gelişmelere dikkat etmemiz gerekiyor: ***SNELLIUS***, günümüzde limit ve serilerde gördüğümüz M_7'yi geometrik yöntemle keşfeder. Çünkü 1621'de ne limit, ne de bir fonksiyonun seriye açılımı biliniyordu! 18. yy.'ın başında fonksiyonların Maclaurin açılımları yani serilere açılımları keşfedilince ***SNELLIUS***'un M_7 algoritmasının önemi anlaşıldı (ki ilk seri 1671'de arktanjant serisiyle ***Gregory*** tarafından keşfedilmişti). Yani Sinx ve Tanx'in serisi M_7'de konulduğunda x^3'lü teriminin sıfırlanmış olduğu görüldü! İşte bu yüzden ***KARDİNAL NİKOLA*** ve Hollandalı ***SNELLIUS*** ve ***HUYGENS*** Antik dönemde başlayan ve kendilerine kadar devam eden ***"π'nin Geometrik Dönemi"***'nin son temsilcileri oldular. Çünkü 18. yy.'ın başında serilerin keşfiyle π'nin hesabı arktanjant özdeşliklerine geçti (ki bu tür hesaplarda yalnızca kesirleri hesaplamak yeterliydi. Dolayısıyla bir diğer Hollandalı matematikçi ***LUDOLF van CEULEN (1540-1610)***'nin yaptığı gibi kareköklü sayılarla büyük el hesaplarına gerek yoktu). Bu nedenle ***KARDİNAL NİKOLA***, ***SNELLIUS*** ve ***HUYGENS*** Nümerik Analiz'in kurucuları olarak kabul edilirler. Çünkü (2.12)'deki M_7, M_8 ve (2.23) algoritmaları π için ilk ekstrapolasyon algoritmaları idi!

Şimdi ***HERON***'un yanlış olarak bildirdiği kesirlerin düzeltilmesi hakkında ***HEIBERG*** ve ***TANNERY*** tarafından yapılan tahminleri ***SNELLIUS***'un M_7 algoritmasıyla analize tabî tutalım.

4.1. *HEIBERG*'in Tahmini. Öncelikle ***HERON***'un π için (4.1)'deki alt sınırının hatalı ve üst sınırının da kötü bir yaklaşıklık olduğunu görüyoruz. Fakat 1896'da ***"METRICA"***'nın İstanbul'da ***H. SCHÖNE*** tarafından keşfinden hemen sonra ***HEIBERG***, 1912'de yaptığı ikinci çeviride, ***HERON***'un (4.1)'deki kesirlerinde 2 hata keşfetti (aşağıdaki kırmızı renkli rakamlar, ona göre, ***HERON***'un hatalı rakamlarıdır) ve şu sınırları önerdi (Bkz. "*HEIBERG: Archimedes, Opera 2. Edition, 542*"):

[17] Bu, Hollandalılar tarafından aktarılan ve tüm dünyaya yayılan bir rivayettir. Ben ***SNELLIUS***'un tüm kitaplarına baktım; yok öyle bir şey. Anlaşılan o ki, bu bilgi ***SNELLIUS***'tan çok sonra, M_7 algoritmasının değerinin anlaşılmasından sonra (muhtemelen fonksiyonların seriye açılımlarının yapıldığı 18. y.y.'da) ortaya çıktı!

$$(4.4)\quad 3.14159(5166\cdots) = \frac{211875}{67444} < \pi < \frac{195888}{62351} = 3.141(6978075\cdots).$$

Bana göre ***HEIBERG*** bu hataları şu şekilde buldu ya da keşfetti: İlkin, (4.1)'deki alt sınırın paydasının birler basamağını **"4"** yaptı ve böylece onu π'nin alt sınırına çekti. İkinci olarak, üst sınırın paydasını doğru kabul ederek sınırların paydaları arasındaki farkı $67444 - 62351 = 5093$ olarak buldu ve sonra bunu 3.14 ile çarparak $5093 \times 3.14 = 15992.02 \cong 15992$ sonucunu buldu. Üçüncü olarak, alt sınırın payını doğru kabul ederek $211875 - 15992 = 195883$ işlemini yaptı. Ama ***HEIBERG*** burada şunu düşündü: *"Tamam, üst sınırda binler basamağını '**5**' olarak düzelteceğim ama 5 fark için birler basamağını değiştirmeye gerek yok. Çünkü böylece hem hata sayısını 2'de tutmuş olur, hem de gerçek bir yaklaşımda bulunmuş, olurum!"*

Çok ilginçtir, tüm kaynaklar, ***HEIBERG***'in (4.4)'teki yaklaşıklıklarını sorgusuz sualsiz doğru kabul eder ve sanki bunları ***HERON*** vermiş gibi iman ederler. Fakat bu kesirleri bir analize tabî tuttuğumuzda ***HEIBERG***'in bu düzeltmelerinin de bir işe yaramadığı ortaya çıkar!

Peki, bunu nasıl anlayabiliriz?

***SNELLIUS*, 1621'den bildiriyor!**

Burada öncelikle ***HEIBERG***'i tebrik etmek gerekiyor; çünkü o, metin çevirisindeki başarısını ([18]) (4.4) ile matematikte de göstermiştir. Yani ***HERON***'un (4.1)'de verdiği yaklaşıklıklarda en az hatayla, en iyi sonuçları o bulmuştur!

Gerçekten de öyledir. Çünkü onun (4.4)'teki tahmini,

$$(4.5)\quad 3.14159(0463\cdots) = 1536\mathrm{Sin}\frac{\pi}{1536} < \pi < 1536\mathrm{Tan}\frac{\pi}{1536} = 3.14159(7034\cdots)$$

sonuçlarından görüldüğü üzere bir çemberin içine ve dışına çizilmiş düzgün 1536-genlerin çevrelerine mükemmel bir şekilde uyar. Ama alt sınırda bir sıkıntı var ve bu sıkıntıyı hiçbir şekilde atlatamazsınız!

İkinci olarak, eğer (4.4)'teki sınırların aritmetik ortalamasını alırsak,

$$(4.6)\quad \pi < \frac{\frac{211875}{67444} + \frac{195888}{62351}}{2} = 3.14159(6486\cdots)$$

olarak π'nin 5 ondalığı doğru çıkar ama ***SNELLIUS***'un algoritmasına göre,

$$(4.7)\quad \frac{2 \times \frac{211875}{67444} + \frac{195888}{62351}}{3} = 3.1415(62713\cdots) < \pi$$

çelişkisiyle karşılaşırız. Yani bu yaklaşıklık (4.6)'dan kötüdür. Ancak bu yaklaşıklık o kadar kötüdür ki (4.4)'teki alt sınırdan bile küçük olup, (4.4) aralığının dışında kalır. Demek ki ***HEIBERG***'in (4.4)'teki tahmini doğru değil, yani (4.4)'teki kesirler 1536-genlerle (ya da kenar sayısı ne olursa olsun) elde edilen gerçek kesirler değilmiş!

Burada şuna dikkat etmek gerekiyor: Eğer ***"METRICA"*** 1896'da İstanbul'da keşfedilmeden önce Avrupa'da olsaydı, Hollandalılar daha o saatte ***HERON***'un (4.1)'deki kesirlerin gerçek kesirler olmadığını ve bu kesirleri düzeltmenin bir yolunun olmadığını söylerdiler (Bkz. "*Christiaan Huygens: Oeuvres complètes. Tome XII. Travaux de mathématiques pures 1652-1656 (1910)*". Bu kitaptaki "Probleme I. Prop. X, S. 139-142"de ***Arşimet***'in kesirlerin nasıl elde edildiğine ilişkin mükemmel bir analiz yapılmıştır). Benim burada şansım, ***SNELLIUS*** idi. Büyüksün ***SNELLIUS*** amca!

4.2. *TANNERY*'nin Tahmini. ***TANNERY***'nin 1903'teki tahmini şudur (Bkz. "*Journal des Savants 1903, P. 205, Oeuvres III*"):

$$(4.8)\quad 3.14159(0427\cdots) = \frac{211872}{67441} < \pi < \frac{195882}{62351} = 3.141(601578\cdots).$$

Burada ***HEIBERG***'in (4.4)'teki tahminine göre alt sınırda bir düzeltme yapılırken (4.5) ile karşılaştırıldığında alt ve üst sınırın 1536-genlerin çevrelerine yaklaştırıldığı görülür. Ancak ***TANNERY*** daha kafadan elenir. Çünkü (4.5)'ten (4.8) çıkarıldığında,

$$(4.9)\quad \begin{cases} \Delta a = 1536\mathrm{Sin}\frac{\pi}{1536} - \frac{211872}{67441} = 3.60398 \times 10^{-8}, \\ \Delta b = 1536\mathrm{Tan}\frac{\pi}{1536} - \frac{195882}{62351} = -4.54384 \times 10^{-6} \end{cases}$$

eş yaklaşımlarda olmadıkları görülür. Dolayısıyla (4.8)'deki yaklaşımları analize tabî tutmanın bir anlamı yoktur!

Fakat biz yine de analizimize devam edelim. Eğer (4.8)'deki sınırların aritmetik ortalamasını alır ve ***SNELLIUS***'un algoritmasına tabî tutarsak,

$$(4.10)\quad \pi < \frac{2 \times \frac{211872}{67441} + \frac{195882}{62351}}{3} = 3.14159(4144\cdots) < \frac{\frac{211872}{67441} + \frac{195882}{62351}}{2} = 3.14159(6002\cdots)$$

şeklinde π'nin 5 ondalığını gerçekleyen sonuçlar ortaya çıkar. Ancak bu durumu ***HEIBERG***'in tahmininde yani (4.7)'de gözlemleyemedik!

Fakat bu işlemleri (4.5)'teki gerçek sınırlarla yaparsak,

$$(4.11)\quad \pi < \frac{2 \times 1536\mathrm{Sin}\frac{\pi}{1536} + 1536\mathrm{Tan}\frac{\pi}{1536}}{3} = 3.1415926535(\cdots) < \frac{1536\mathrm{Sin}\frac{\pi}{1536} + 1536\mathrm{Tan}\frac{\pi}{1536}}{2} = 3.14159(3748\cdots)$$

([18]) Danimarkalı bir filolog olan ***HEIBERG*** dönemin en iyisiydi. O, ***EUCLID***, ***APOLLONIUS*** ve daha sonra ***ARCHIMEDES***'in eserlerini mükemmel bir şekilde çevirdi. O, ***ARCHIMIDES PALİMPSESTİ***'ni yalnızca bir büyüteçle Güneş ışığı altında tamamına yakınını kopyalamayı başardı!

sonuçlarından ***SNELLIUS***'un algoritması, ***TANNERY***'nin tahmininin hatalı olduğunu söyler. Çünkü ***SNELLIUS***'un algoritmasından çıkan sonuç, aritmetik ortalamadan çıkan sonucu π'nin doğru olan basamak sayısında 2'ye katlar. Yani ***SNELLIUS***'un algoritması sanki kuadratik bir algoritma gibi çalışmış!

Sonuç 4.1. ***HERON***'un (4.1)'de verdiği hatalı kesirlerde ***TANNERY*** ve ***HEIBERG*** tarafından yapılan iyileştirmeler buradaki analizimize göre beklenen sonuçları verememişlerdir. Ama bu tahminler yine de olumlu yönde geliştiği için olumsuz bir şey söylemek istemiyorum. Nasıl kötü bir şey söyleyebilirim ki. Çünkü ***HERON***'un hatalı kesirlerini 4.7'de onların sayesinde düzeltebildim!

Burada şuna dikkat etmek gerekir: ***HERON***'un (4.1)'de verdiği hatalı kesirlerde en büyük hata üst sınırın payında yapılmış idi ve her iki araştırmacı da, bu hatayı "195888" olarak düzelttiler. Ancak bundan sonra diğer rakamları da düzeltmeye başladığınız zaman, işler sarpa sarıyor. Yani sizi sonsuz bir bunalım bekliyor!

4.3. *JOHANN-HARTMANN BEYER*'den Şok Edici Sonuçlar

27.10.2017/17:13.

JOHANN-HARTMANN BEYER, "*STEROMETRIÆ INANIVM NOVA ET FACILIS RATIO, GEOMETRICIS DEMONSTRATIO nibus confirmata: [...] FRANCOFVRTI, In Officina Paltheniana, Impensis Ionae Rhodii. ANNO MDCIII*" kitabında bir bombeli şarap fıçısının hacmini **Örnek 5**'te hesaplarken merkezdeki ve tabanlardaki dairelerin alanlarında π için (4.1)'deki kesirler gibi çok ilginç yaklaşıklıklar kullanır. Bunun için merkezdeki büyük dairenin çapını 42.8 alarak alanı 1438.78 ve alt ve üst tabanlardaki küçük dairelerin çapını 36.2 alarak alanı 1029.25 olarak bulur. Fakat o, bu sonuçlara nasıl ulaşıldığını göstermez; sadece çaplara karşılık gelen alanları yazar.

Şu halde bu daire alanlarındaki π değerlerine yakından bir göz atarsak ilkin fıçının merkezindeki dairedeki π değerini,

$$(4.12)\quad 1438.78 = A_1 = \pi r_1^2 = \pi.\left(\frac{42.8}{2}\right)^2 \Rightarrow \pi < \frac{1438.78}{21.4^2} = \frac{143878}{214^2} = \frac{71939}{22898} = 3.141(715433\cdots)$$

olarak buluruz. Bu, ***HERON***'un (4.1)'deki üst sınırının ***HEIBERG*** tarafından (4.4)'te düzeltilmiş şekline çok benzer. Çünkü bu kesri 62351 ile genişletirsek,

$$(4.13)\quad \pi < \frac{62351 \times \frac{71939}{22898}}{62351} = \frac{195889.0990}{62351} \cong \frac{195889}{62351}$$

değeri ortaya çıkar. Yani bu kesrin payı ***HEIBERG***'inkinden 1 fazladır!

Bu sefer fıçının tabanlarındaki daireleri gözönüne alırsak π için

$$(4.14)\quad 1029.25 = A_2 = \pi r_2^2 = \pi.\left(\frac{36.2}{2}\right)^2 \Rightarrow \pi < \frac{1029.25}{18.1^2} = \frac{102925}{181^2} = \frac{102925}{32761} = 3.141(692866\cdots)$$

değeri elde edilir. Bu da, ***HERON***'un (4.1)'deki alt sınırının ***TANNERY*** tarafından (4.8)'de düzeltilmiş şekline çok benzer. Çünkü bu kesri de 67441 ile genişlettiğimizde,

$$(4.15)\quad \pi < \frac{67441 \times \frac{102925}{32761}}{67441} = \frac{211878.9086}{67441} \cong \frac{211879}{67441}$$

değeri ortaya çıkar. Yani bu kesrin payı ***TANNERY***'ninkinden 7 fazladır!

O, **Örnek 6** ve diğer örneklerde de aynı hesabı yapar ve fıçının merkezindeki ve tabanlarındaki dairelerin alanlarında π için (4.13) ve (4.15)'teki değerleri kullanır ama örneklere göre bunları biraz değiştirir. Örneğin, **Örnek 6**'daki fıçının hacmini 15717.0 olarak tam bulur!

Peki ***HERON***'un yüzyıllar boyu kayıp METRICA'sı ilk kez 1896'da İstanbul'da keşfedildiğine göre, ***JOHANN-HARTMANN BEYER***, 1603'te π için (4.13) ve (4.15)'teki kesirleri (4.1)'in düzeltilmiş şeklindeki gibi nasıl önermiş olabilir? Acaba ***JOHANN-HARTMANN BEYER***, π'nin değerini mi bilmiyordu? Bu mümkün değil, çünkü o tarihte LEYDENLİ KRALLAR (***LUDOLF VAN CEULEN***, ***SNELLIUS***, ***HUYGENS*** v.d.) π'nin onlarca basamağını hesaplıyorlardı!

4.4. *VAN CEULEN* ve *SNELLIUS*'a Bir Saygı Ziyareti.

VAN CEULEN, ilk performansını 1596'da 15×2^{31}-genlerle π'nin 20 ondalığını hesaplayarak gösterir. İkinci büyük sıçrama için ***FRANÇOIS VIETA (1540-1603)***'nın 1579'daki formülünden hareketle 2^{60}-genlerle π'nin 35 ondalığını hesaplarken 1610'daki ani ölümü üzerine 32 ondalıkta takılır kalır. Tüm bu sonuçlar ***VAN CEULEN***'in ölümünden sonra, eşi ***ADRIANA*** tarafından 1615'te yanda görülen "*Vanden Circkel*" kitabında yayınlanır. Bu kitaptaki ***VAN CEULEN***'in eksik kalan çalışmasını öğrencisi ***SNELLIUS*** tamamlar ve 1621'de "*Cyclometricus*" adlı kitabında yayımlar. Fakat ***SNELLIUS***, bu kitapta öğretmeninin çalışmasını tamamlarken, π için ***VIETA***'dan itibaren tüm çalışmaları toplayarak adeta 16-17. yy. Π Almanağı'nı oluşturur. İşte bu kitap nedeniyle ***SNELLIUS*** da ***VAN CEULEN*** gibi hayatının büyük bir bölümünü harcar ve bu kitaptaki π'nin 36 basamağı ***VAN CEULEN***'in mezar taşına kazınır!

Biz, adamı böyle gömeriz işte!

Çok ilginçtir, ***VAN CEULEN*** Pieterskerk'de 11 Kasım 1602'de bir mezar satın almıştı ama 31 Aralık 1610'daki ani ölümünden sonra eşi ***ADRIANA*** mezar yerini değiştirir ve 2 Ocak 1611'de bu ikinci mezara (ki Pieterskerk'deki mezar yeri halen mevcuttur) gömülür. Mezar taşına π'nin alt sınırı olan

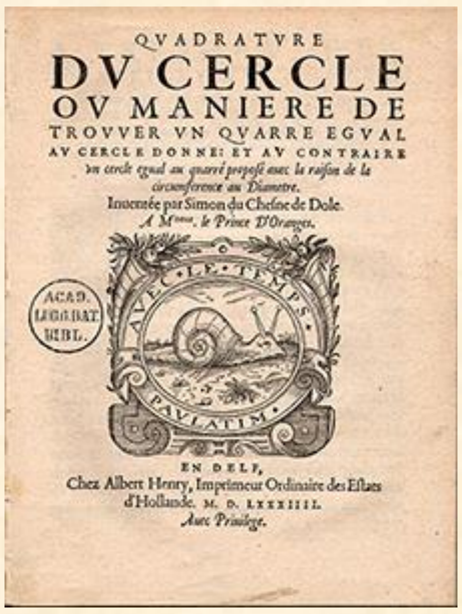
$$(4.16)\quad \pi < S_{20}^{(1)} = \frac{64 \times 2^{21}\mathrm{Sin}\frac{\pi}{2^{21}} - 16 \times 2^{20}\mathrm{Sin}\frac{\pi}{2^{20}} + 2^{20}\mathrm{Tan}\frac{\pi}{2^{20}} - 4 \times 2^{21}\mathrm{Tan}\frac{\pi}{2^{21}}}{3}$$
$$= 3.14159265358979323846264338327950288(6902\cdots)$$

ve üst sınırı olan

$$(4.17)\quad \pi < S_{30}^{(0)} = \frac{2 \times 2^{30}\mathrm{Sin}\frac{\pi}{2^{30}} + 2^{30}\mathrm{Tan}\frac{\pi}{2^{30}}}{3} = 3.14159265358979323846264338327950 28(9\cdots)$$

değerleri kazınır (**Y.N. *SNELLIUS***, eğer RİK 2'deki S.10'daki Tablo 2.1'in 2. satırındaki bu algoritmayı keşfetmiş olsaydı, π'nin 35 ondalığını çok daha kestirmeden bulmuş olacaktı. Aynı şekilde, Tablo 2.1'deki $S_{15}^{(2)}$ ile π'nin 36 ondalığını ve $S_{10}^{(3)}$ ile π'nin 33 ondalığını da bulabilirdi). O, bu algoritmayla ***VAN CEULEN***'in hesaplamaları 14 yıl (1596-1610) ama şimdi bilgisayarda 584.2738879264835 megasaniye süren bir çemberin içine ve dışına çizilmiş 2^{60}-genlerle π'nin hesabını yapmak yerine yolu, dolayısıyla zamanı yarıya düşürerek (4.17) ile aynı sonucu tekrar buldu ya da keşfetti!

Burada bir ilginç durum daha var: ***VAN CEULEN***'in mezar taşı 1800'lere kadar gözükmez (Neden acaba? Kimse π'nin bu değerlerini almasın diye mi?) ve 200 yüzyıl sonra (5 Temmuz 2000) yerine yukarıdaki 1596 tarihli portredeki resmin altındakine benzer bir replika konur! ***SNELLIUS***, bu replikanın üzerinde yazılı π değerleri için *"Cyclometricus"* kitabının *"Önerme 31 (PROPOSITIO XXXI)"*'in sonunda, yani S. 55'te π'nin $S_{20}^{(1)}$ (ki yalnızca parantez dışındaki rakamlar) ile $S_{30}^{(0)}$ (ki parantez içindeki **"9"** da dahil olmak üzere) arasında olması gerektiğini yazar!



Fakat π'de en büyük performansı gösteren ***SNELLIUS*** değil, öğretmeni ***VAN CEULEN*** idi. ***VAN CEULEN (1540-1610)***, hayatının son 25 yılını π için harcamıştır. İlk dikkat çeken çalışması, 1585'te 192-genle bulduğu

$$(4.18)\quad \pi < \underbrace{3.14205}_{Van\ Ceulen} < \left(\frac{39}{22}\right)^2$$

yaklaşıklığıdır (Bkz. *"Pi: A Source Book", S. 218-219*). Ancak ***VAN CEULEN*** bu değeri 192-genle bulurken ***ARŞİMET***'in çalışmasından habersiz idi. Çünkü Yunanca bilmiyordu. Bir diplomat ve devlet adamı olan ***HUGO GROTIUS***, ***ARŞİMET***'in π için vermiş olduğu yaklaşıklıkları ona çevirdi. Bu, onun hayatının dönüm noktası oldu. Çünkü ***VAN CEULEN***'in bundan sonraki amacı, ***ARŞİMET***'in metodunu kullanarak π için daha iyi yaklaşıklıklar bulmak idi!

Burada kareli olan yani,

$$(4.19)\quad \pi < \left(\frac{39}{22}\right)^2 = \frac{1521}{484} = 3\frac{69}{484} = 3.14(2561983\cdots)$$

yaklaşıklıklığı 1584'te bir diğer Hollandalı ***SYMON VAN DER EYCKE*** tarafından verilmiştir. O, bu değeri yukarıda soldaki kitapta geçen dairenin karelenmesi metoduyla bulduktan sonra ***VAN CEULEN***'e, π'nin gerçek değerinin ***CUSA'lı NICOLAS***'ın çalışmasını geliştiren ***VIETA***'nın (Bkz. *"Francisci Vietae Opera Mathematica, 1646", S. 393, PROPOSITIO IV*),

$$(4.20)\quad \pi < \sqrt{\sqrt{320} - 8}\left(= \frac{4}{\sqrt{\phi}}\right)$$

yaklaşıklığının olduğunu söyledi ([19]). ***VAN CEULEN***, ***VAN DER EYCKE***'nin (4.19)'dakine ilişkin ispatı inceledi ve hatalı olduğunu söyledi.

Bazı piramit araştırmacıları, bu değerin piramitin geometrisinde olduğunu iddia eder (Bkz. *"The Great Pyramid of Giza: Pi and The Golden Ratio"*. Orada bu değeri 4. sayfadaki (20) no'lu formülde görebilirsiniz).

Burada ilginç olan şey şu ki, ***VAN DER EYCKE***'nin (4.19)'daki sonucu dünyaya anlatmak için 91 sayfaya ihtiyaç duyduğu yerde, ***VAN CEULEN***'in sadece 6 sayfaya ihtiyacı vardı (Bkz. *"Van Den Circkel"*). ***VAN DER EYCKE*** daha sonra yeni bir kitapçık yayımladı (bkz. *"Quadratuere Des Circkels"*deki *"Claerder Bewys"*) ve π'nin kesin değeri için (4.20)'yi önerdi. Bu, ***ARŞİMET***'in (4.2)'deki sınırların ötesinde idi, ancak görünüşe göre önemli değildi. ***VAN CEULEN***, nihayet Fransız kökenli **"doğuştan ölü"** tartışmasına son verdi ve ***ARŞİMET***'in hesabındaki π'nin gerçekte 3.1410300 ile 3.1427232 arasında olduğunu belirtti (Bkz. *"Steven Wepster: Ludolph van Ceulen in Hollandse kringen"*. Orijinalde ***VAN CEULEN***'in *"Van Den Circkel"* kitabının 106. folyonun sonunda (4.19) ve (4.20) değerleri bulunur).

Öyle görünüyor ki, ***VAN DER EYCKE***, ***ARŞİMET***'in üst sınırından hareketle,

$$(4.21)\quad \pi < \left(\frac{39}{22}\right)^2 < \frac{22}{7}$$

şeklinde daireyi karelemiş görünür. Çünkü,

$$(4.22)\quad \frac{22^3}{7} = 1521\frac{1}{7} = 39^2 + \frac{1}{7} > 39^2$$

dir. Böylece ***VAN DER EYCKE***, ***ARŞİMET***'in üst sınır kesrinden π'ye biraz daha yaklaşmış olur ve bu yaklaşım o kadar iyidir ki Ahmes papirüsündeki $\pi < \left(\frac{16}{9}\right)^2$'den daha iyidir!

Fransız matematikçisi ***VIETA***, 1593'te yine bir diğer daire-çap ilişkisi üzerine yaptığı çalışmada, dairenin çevresini karenin çevresine eşit alarak π için

$$(4.23)\quad \pi < \frac{18 + \sqrt{180}}{10}\left(= \frac{6}{5}\phi^2\right)$$

değerini bulur (Bkz. *"Francisci Vietae Opera Mathematica, 1646", S. 392, PROPOSITIO III*). Bazı piramit araştırmacıları, bu değerin Firavun ***KHUFU***'nun odasında olduğuna inanırlar ama bu doğru değildir!

4.5. *ARŞİMET*'e Bir Saygı Ziyareti. İster inanın, ister inanmayın ***VAN CEULEN*** bana pas attı. Böyle bir pası çok uzun zamandan beri beklemiyordum dersem yalan olur. Çünkü ***ARŞİMET***'in hesaplarından ***HERON***'un (4.1)'de verdiği kesirlere ulaşmaya çalıştığım zaman garip bulgularla karşılaşmıştım!

Örneğin, ***ARŞİMET***, eğer hesaplamalarına devam etseydi,

([19]) ϕ altın oranı o sırada Avrupa'da bilinmiyordu, dolayısıyla bu yaklaşıklık karekök içinde öylece olduğu gibi bırakılıyordu. Fakat bu konuda ***DA VINCI***'nin 1492 tarihli *"Vitruvius Adamı"* çalışmasının başat bir örnek olduğunu söyleyebilirim. Bu, Avrupa'da dairenin karelenmesine ilişkin ilk sanatsal çalışmadır. Eğer bir fırsatım olursa, ***Ernst Hanfstaengl***'ın, ***"HITLER: The Rise of Evil"*** filminde ***HITLER***'e, *"Biz, sadece sanatsal kitaplar yayınlarız!"* dediği gibi bu nadide sanatsal çalışmanın geometrisini anlatmaktan büyük gurur duyarım!

$$(4.24)\quad \sqrt{\left(4673\tfrac{1}{2}\right)^2+153^2}:153>\frac{4676}{153}\Rightarrow\frac{4673\frac{1}{2}+4676}{153}=\frac{9349\frac{1}{2}}{153}$$

sonucundan hareketle

$$\pi<\frac{192\times 153}{9349\frac{1}{2}}=3+\frac{1327\frac{1}{2}}{9349\frac{1}{2}}=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{57}{1327\frac{1}{2}}}=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{23+\cfrac{33}{114}}}<3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{23+\cfrac{33}{110}}}=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{23+\cfrac{3}{10}}}=3+\frac{70}{493}$$

eşitsizliklerinden

$$(4.25)\quad \pi<3\frac{70}{493}$$

yaklaşıklıklığını vermiş olacaktı. Buna olan inancım % 100'dür. Yani 2267 yıldır bu sonuç bir sır olarak ***ARŞİMET***'in hesaplarının arasında kalmıştı. ***EUTOKIOS*** bunu görmüş olmalı!

İkinci olarak,

$$(4.26)\quad \frac{2016\frac{1}{6}+2017\frac{1}{4}}{66}=\frac{4033\frac{5}{12}}{66}\Rightarrow\sqrt{\left(4033\tfrac{5}{12}\right)^2+66^2}:66<\frac{4034}{66}=\frac{2017}{33}$$

sonucundan hareketle

$$\pi>\frac{192\times 33}{2017}=3+\frac{285}{2017}=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{22}{285}}=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{12+\cfrac{21}{22}}}>3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{12+\cfrac{16}{22}}}=3+\frac{140}{991}=3\frac{700}{4955}$$

eşitsizliklerinden

$$(4.27)\quad 3\frac{700}{4955}<\pi$$

yaklaşıklıklığını bulmuş oluruz.

Şu halde (4.25) ve (4.27)'yi birleştirirsek π için 192-genlerle,

$$(4.28)\quad 3\frac{700}{4955}<\pi<3\frac{70}{493}$$

çifte eşitsizliğini verebiliriz. İşte ***VAN CEULEN***'in bana, (4.18) ile hatırlattığı şey bu idi. Eğer ***VAN CEULEN***, 1585'te ***ARŞİMET***'in çalışmasını görebilseydi, (4.18)'deki değerden daha iyisini görmüş olacaktı. Yani muhtemelen buradaki üst sınırı görecekti. Sözkonusu bu değerin ***VAN DER EYCKE*** tarafından (4.19)'da verilen yaklaşıklıkla çok bir yakın ilişkisi vardır!

Şüphesiz ***ARŞİMET***'in hesabında tasarlanan bu değildi; çünkü bunun için başlangıçta $\sqrt{3}$ için seçilen (4.47)'deki yeşil renkli kesirler yeterli gelse de, kareköklü sayılara kesirli yaklaşımlarda biraz daha hassas olmak gerekiyordu (Bkz. (4.49)). Buradan (4.28)'deki sınırların π'ye yaklaşımlarda yeterli ama 192-genlerin çevrelerine yaklaşımlarda yeterli olmadıkları sonucu çıkar. Fakat çok spesifik davranmazsanız bu sonuçlar da yeterlidir. Örneğin bunların aritmetik ortalamasını alırsanız ***PTOLEMAEUS***'un π için (4.42)'de verdiği 3;8,30 değerine çok yakın olduğunu ve ***SNELLIUS***'un algoritmasında da π'nin 4 ondalığını doğruladığını görürsünüz!

4.6. *PTOLEMAEUS*'a Bir Saygı Ziyareti. Eğer **Sonuç 4.1**'in sonunda geçen tek hatanın düzeltilmesini gözönüne alırsak,

$$(4.29)\quad \begin{cases}\dfrac{211875-195888}{67441-62351}=3\dfrac{717}{5090}\gtrsim 3\dfrac{10}{71},\\[2mm] \dfrac{211875+195888}{67441+62351}=3\dfrac{6129}{43264}\lesssim 3\dfrac{17}{120}\end{cases}$$

yaklaşıklıkları sözkonusu olur. Burada ilk yaklaşıklık, ***ARŞİMET***'in (4.2)'deki alt sınırı ve ikincisi ise, ***PTOLEMY***'nin "*ALMAGESTUM*" adlı kitabında verdiği 3;8,30 ile π'nin üst sınırıdır. Yani ***HERON***'un kesirlerinde bir tuhaflık var ama ne?

Şimdi ne olduğunu anlayamadığımız bu tuhaflık,

$$(4.30)\quad \frac{211875-1}{67441-1}=\frac{211874}{67440}=3\frac{17}{120}\gtrsim\frac{195888+1}{62351+1}>\pi$$

sonuçlarıyla bizi daha da şaşırtıyor. Çünkü bu sonuçlar yine ***PTOLEMY*** 'nin π'sini veriyor bize. Ancak bu π, ***"Astronomik Pi"***dir ki bunu keşfettiğimde yalnızca şok geçirmekle kalmamış; ***HEIBERG*** ve ***TANNERY***'nin bunu nasıl atladığına da çok şaşırmıştım!

Şimdi birazdan aşağıda göreceğiniz gibi Astronomik Pi, ***Celal Şengör***'ün, "*Birbirini yalanlayan inançlar ile bilim yapılabilir mi?*" başlıklı konferansının 13:08'inde dinin düzenleme işlevini açıklarken, takvimle ilgili "*Astronomi Babil ile başlar! Hayır efendim, (modern) astronomi **Galileo** ile başlar!*" iddiasını yanlışlayacaktır (**Y.N.** Parantez içine "modern"i koyarak ifadeyi düzeltmek zorunda kaldım).

Ah şimdi ***Sitchin*** hayatta olsaydı bize Babil astronomisini anlatsaydı. Ama o astronomiyi Sümer'den başlatır. ***Sitchin***'in çocukluğundan beri Eski Ahit'teki **"Nefilimler (Gökten Yeryüzüne Gönderilenler)"** takıntısı, "*Zaman Başlarken*" kitabında Marduk'un (Sümerce'de Nibiru) Tiamat ile **"Göksel Savaşı"**nda meyvesini verir. Çünkü bu göksel savaş sonunda Dünya ve uydusu Ay oluşur ve bu bilimsel olarak NASA tarafından 2009'da onaylandı. Yani NASA'ya göre 4.5 milyar yıl önce THEIA (***Sitchin***'e göre Marduk) adlı bir gezegen Dünya'ya çarpmış ve bunun sonucunda Ay ortaya çıkmıştır (Bkz. "*Ay'ın Oluşumu*"). İtiraf etmem gerekir ki NASA'nın bu açıklamasını duyduğum anda aklıma derhal ***Sitchin***'in anlattığı o hikâye gelmiş ve onun adına sevinmiştim!

4.6.1. SAROS Döngüsünde Π Çevrimi. ***WIKIPEDIA***'ya göre SAROS ([20]) döngüsünde geçen Dünya'nın Güneş etrafındaki bir tam turu 365.256,363,004 Gün ve Ay'ın Dünya etrafındaki bir tam turu da 29.530,589 Gün'dür (ki NASA ilkini 3 ondalıkla, ikincisini 2 ondalıkla verir. Çünkü astronomide kesinlik yoktur). Eğer bunları birbirine bölersek 1 Güneş Yılı (GY)'nın kaç Sinodik Ay (SA)'dan oluştuğunu,

$$(4.31)\quad 1\ \mathrm{GY} = \frac{365.256363004}{29.530589}\ \mathrm{SA}$$

yaklaşımıyla bulmuş oluruz.

METON, bunun için $\frac{235}{19}$ kesrini önerdi ve günümüz astronomisinde bu çevrim kullanılır. Fakat (4.31)'deki kesri ***PTOLEMAEUS***'un,

$$(4.32)\quad \pi_P = 3\frac{17}{120}$$

π'si ile genişletirken paya bunu bir ekleyip çıkartırsak,

$$(4.33)\quad 1\ \mathrm{GY} = \frac{\left(\frac{365.256363004}{29.530589}+1\right)\pi_P - \pi_P}{\pi_P}\ \mathrm{SA}$$

eşitliğindeki kesrin payında

$$\left(\frac{365.256363004}{29.530589}+1\right)\pi_P = \frac{394.786952004}{29.530589}\pi_P = 42.00014458\cdots \cong 42$$

olduğu görülür ki buradan,

$$(4.34)\quad \left(\frac{365.256363004}{29.530589}+1\right)\pi_P \cong 42$$

değerini alabiliriz.

Şu halde (4.31)'deki çevrim için

$$(4.35)\quad 1\ \mathrm{GY} = \frac{42-\pi_P}{\pi_P}\ \mathrm{SA}$$

formülasyonunu önerebilirim. Sözkonusu bu yaklaşıma ilişkin konuyu yaklaşık 5 yıl önce teorik olarak genişçe ele almıştım ve en iyi π değerinin ***PTOLEMAEUS***'unkinin olduğu sonucu çıkmıştı. Bu nedenle, o sırada her yerde ***PTOLEMAEUS***'un orijinal kitabını aramış ve keşiften 12 gün sonra en eskisinin 1515 basımlı "*ALMAGESTUM*" adlı kitabı olduğunu görmüştüm ([21]) (**Y.N.** Daha fazla bilgi için EK 2'deki orijinal makaleme bakınız)

Çok ilginçtir; meraklı bir araştırmacı, bu kitabın 68. sayfasının sağ tarafındaki boşlukta ***ARŞİMET***'in kesirleriyle birlikte ***PTOLEMAEUS***'un π için verdiği,

$$(4.36)\quad \pi_P = 3;8,30$$

değerini yazmış. Bu şart, çünkü oraya çıkartılan notları (hesaplar iç içe geçtiğinden) doğrudan o sayfada görmeniz mümkün değildir. Onun bu ilgisi ve ben de bu çalışma notlarından yararlanırken (4.35)'teki sonucu görmem zor olmadı! Burada **"Pi Çevrimi"** olarak adlandırdığım (4.35)'teki çevrim Babilliler'inkinden ve ***METON***'unkinden üstündür!

Demek ki (4.35)'e göre,

$$(4.37)\quad \pi_P\ \mathrm{GY} = 42 - \pi_P\ \mathrm{SA}$$

imiş ve bu durumda

$$(4.38)\quad 1\ \mathrm{Saros} = \frac{223\pi_P}{42-\pi_P}\ \mathrm{GY}$$

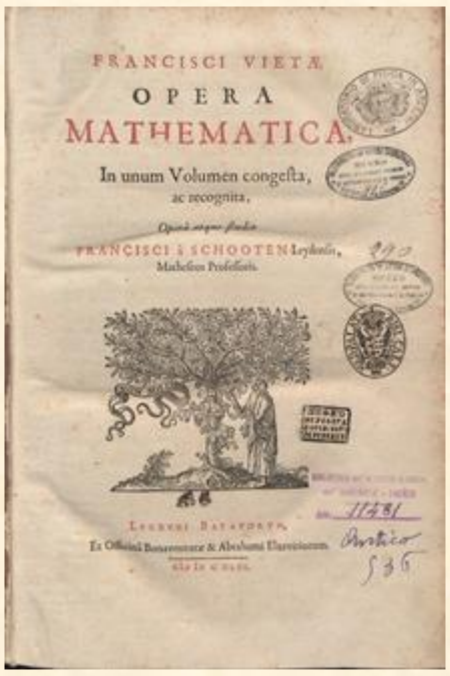
olur (**Y.N.** Bu konuda daha fazla bilgi için "*On The Babylonian Discovery of The Periods of Lunar Motion*" kaynağına bakınız).

([20]) SAROS döngüleri Kaldealılar tarafından keşfedilmişti ve ***HIPPARCHUS***, ***PLINY*** ve ***PTOLEMY*** tarafından da biliniyordu. Bunların hepsi SAROS'tan farklı isimlerle bahsetmişlerdir. SAROS ismi 1691'de ***EDMOND HALLEY*** tarafından konmuştur. ***HALLEY*** bu tabiri 11. yy. BİZANS veri sözlüğü "SUDA"dan almıştır. Her ne kadar ***GUILLAUME LE GENTIL*** 1756'da bu tutulma döngüsü olgusunun hatalı isimlendirilmiş olduğunu ortaya koymuşsa da SAROS ismi kullanılmaya halen devam etmektedir.

EGE Denizi'nin kuzey kesiminde yer alan Saros körfezi Antik çağda ***"MELAS KOLPOS"*** adıyla anılan yer, güneyde Gelibolu yarımadası, kuzeyde Trakya kıyıları arasına yaklaşık 60 KM kadar sokulan üçgen biçimli bir girintidir. Efsaneye göre (ki ***"IMMORTALS, 2011"*** filminde bu durum özellikle vurgulanır. Örneğin, HELEN KONSEYİ Başkanı, ***EPIRÜS***'ün Yayı ve Tanrılar ile ilgili anlatılanların alaycı bir şekilde birer efsaneden ibaret olduğunu söyler), M.Ö. 1228'de HELENLER, HERAKLİYONLAR ile burada savaşır (ki TİTANLAR HERAKLİYONLAR'a yardım ederken, TANRILAR da HELENLER'e yardım eder) ve TANRILAR'ın yardımıyla bu savaşı kazanır (**Y.N. "π"** aynı filmde hırsızlara vurulan damga olarak geçer). BİZANSLILAR bu ismi muhtemelen M.Ö. 28 Mayıs 584'te ***THALES***'in bildirdiği Tam Güneş Tutulması nedeniyle sözlüklerine aldılar. Çünkü SAROS 57'de görülen bu tutulma tam da anılan bu yerin üzerinden geçiyordu. Öyle ki ***ZEUS***'un bu işareti İSTANBUL'dan bile görünüyordu!

([21]) Bu kitap matbaanın AVRUPA'ya getirilmesinden hemen sonra ilk basılan kitap olan Latince İNCİL'den 59 yıl sonra basıldı ve STERNWARTE Üniversitesi (VİYANA) de, kuruluşunun 250. yılı nedeniyle bu tarihi ve nadide eseri yayımladı!

4.6.1.1. *VIETÆ*'ya Bir Saygı Ziyareti. Şimdi bu konuyla yakından ilgilenen ***FRANÇOIS VIETÆ***'nın **"GREGORYEN TAKVİM"** ile ilgili sıcağı sıcağına matematiksel çalışmalarda bulunduğu şu çalışmasına bir bakalım.



FRANCISCI VIETÆ: OPERA MATHEMATICA, 1546: XIV. RELATIO KALENDARII VERE GREGORIANI 447-503, XV. KALENDARIUM GREGORIANUM PERPETUUM 504-541, XVI. CHRISTOPHORUM CLAVIUM 542-544.

VIETÆ takvimle ilgili bu çalışmasında METON çevrimini kullanır ve bu çevrimden **"Gregoriana Metonicas"** olarak söz eder. 1 Güneş Yılı'nı $\left[365\frac{97}{400}, 365\frac{100}{400}\right]$ aralığında alırken (Bkz. **"Önerme XXXI"**, S. 488), Ay'ın Sinodik periyodunu yaklaşık olarak $29\frac{5306}{10000}$ olarak alır (Bkz. **"Önerme VIII"**, S. 459). Çok daha hassas hesaplarda ise $29\frac{530592348}{1{,}000{,}000{,}000}$ kesrini kullanır (Bkz. **"Önerme XXXI"**, S. 487). Burada Ay takvimine göre 1 Yılı $12 \times 29\frac{530592348}{1{,}000{,}000{,}000} = 354\frac{367108176}{1{,}000{,}000{,}000}$ olarak kabul eder (Bkz. **"Önerme XXXII"**, S. 489).

Sözkonusu bu veriler doğrudan gözleme dayalı veriler olduğundan en sağlıklı olanlar, Ay gözlemlerine ait olanlardır. Dünya'nın Güneş etrafındaki 1 tam turuna ait veriler Ay gözlemlerinden elde edilen verilerin METON çevrimine tabî tutulmasıyla elde ediliyordu!

Şu halde Dünya'ya ait veriler bu şekilde elde edildiğine göre, ***VIETÆ***, 19 Tropikal Yılı $\left[6939\frac{243}{400}, 6939\frac{300}{400}\right]$ ve 235 Sinodik Ayı $\left[6939\frac{27568}{40000}, 6939\frac{28983}{42053}\right]$ aralıklarında tanımlar (Bkz. **"Önerme XII"**, S. 482). Ancak 235 Sinodik Ayı daha hassas şekilde $29\frac{530592340425}{1{,}000{,}000{,}000{,}000}$ ile $6939\frac{6803}{10000}$ olarak hesaplar (Bkz. **"Önerme XXXIX"**, S. 497).

Çok ilginçtir, ***VIETÆ*** ([22]), 1579'da ***ARŞİMET***'in π için verdiği değerleri hatırlattıktan sonra, bu hesabın ötesine giderek 6×2^{16}-genlerle

$$(4.39)\quad 3.1415926535 < \pi < 3.1415926537$$

çifte eşitsizliğini verir (Bkz. **"CAPUT XV"**, S. 392). Fakat (4.35)'teki formülü ne o, ne de ondan sonrakiler farkedemez!

Özetle, bu çevrim Dünya'dan yapılan gözlemlerle elde edilmiştir. Örnekse; Mısırlılar, Babilliler, Grekler, Romalılar, Çinliler vs.

Peki, ya uzaya çıkıp Dünya ve Ay'ın kendi yörüngelerindeki 1 tam turlarını gözlemleyebilsek ve bunları oranlasak sonuç ne çıkardı? Bu oranda π'nin rolü nedir?

Şimdi de bu soruların yanıtlarını görelim.

Resim 4.2. *PTOLEMAEUS (81-161)*: *"Dünya ve Ay benim π'me göre dönüyor!"*

4.6.2. Dünya ve Ay'ın Yörünge Periyotlarının Oranı. Dünya'nın Tropikal Yılı (TY) 365.2421909949 Gün (bkz. "*Sidereal vs Tropical Year-Part 2*") ve Ay'ın yörünge periyodu 27.321661 Gün'dür.

Şu halde 42'yi bunların oranına bölersek ağırlık değişmeyeceğinden,

$$(4.40)\quad \pi_A = \frac{42}{\frac{365.2421909949\text{ Gün}}{27.321661\text{ Gün}}} = 3.141777675\cdots\left(\lesssim 3\frac{319}{2250} = 3;8,30,24\right)$$

ile yine bir π sayısı sözkonusu olur. Bu, ***ARŞİMET***'in π için verdiği sınırların aritmetik ortalamasına benzerdir. Çünkü,

$$(4.41)\quad \pi_{\text{Ort.}} = \frac{3\frac{10}{71} + 3\frac{1}{7}}{2} = 3.141851106\cdots$$

dır.

Görüldüğü üzere bu tür hesaplarda π hep bir şekilde karşımıza çıkıyor!

4.7. *HERON*'un "METRICA"sında π İçin Verilen Sınırlar Hakkındaki Araştırma Sonuçlarım

05.05.2017/04:00.

Yukarıda dikkat ederseniz bu konu hakkında hiçbir görüş belirtmedim; sadece tahminlere yer verdim. Fakat ***PTOLEMAEUS***'un π'si nedeniyle ister istemez konuya bulaşmak zorunda kaldım ve görüşümü **Sonuç 4.1**'de belirttim. Çünkü ***HERON***'un ***METRICA***'sındaki π için (4.1)'deki kesirler hatalı olsa da nasıl ulaşıldığına dair hiçbir bir bilgi yoktu!

Hemen kısa bir tarihçeye girecek olursam; ***HERON***'un ***METRICA***'yı M.S. 60'ta yazdığı söylenir. Fakat ***HERON*** bu kitapta hemen her şeyin ispatını verirken bu konuda suskun kalır ve (4.1)'deki kesirleri ***ARŞİMET***'e ithaf etmekten geri durmaz. Ancak diğer taraftan, ***PTOLEMAEUS*** da, M.S. 150'de ***"ALMAGESTUM"*** adlı kitabında ***HERON***'un (4.1) kesirlerine çok yakın (4.36)'daki değeri verir. Bu durumda ***PTOLEMAEUS***'un ***HERON***'un kesirlerinden haberdar olduğu ya da (4.1)'deki kesirlerin ***PTOLEMAEUS***'tan sonra ***HERON*** adına verilmiş olduğu sonucu çıkar. Yani aralarında 90 yıl farkla her ikisi de Geç İskenderiye Dönemi'nde yaşadılar ve Büyük İskenderiye Kütüphanesi'nde çalıştılar (ki

([22]) ***FRANÇOIS VIETÆ (1540-1603)*** 4 Ekim 1582'de kabul edilen ve günümüzde **"MİLADİ TAKVİM"** olarak kullandığımız **"GREGORYEN TAKVİM"** ile ilgili çalışmasını 1546 tarihli anılan kitabın sonuna yaklaşık 100 sayfa tutan 3 bölüm koyarak 1600'de yayımladı. Çünkü 1600'de ilk kez M.Ö. 46'da İmparator ***Jül Sezar*** tarafından uygulamaya konan Jülyen takvimine göre $4 \times 3.123620236 = 12.494480944$ günlük fark ortaya çıkmış ve bunu düzeltmek gerekiyordu. Bu konuda "*Gregorian Calendar*" videosunda yeni takvime geçilirken 1600'de neden 9.8159765, yaklaşık olarak 10 günlük atlama yapıldığı açıklanmaktadır!

PTOLEMAEUS'un Yunan asıllı bir Mısırlı ya da Mısır asıllı bir Yunanlı olduğu iddia edilir). Aralarındaki fark ise şudur: ***HERON***, (4.1)'deki kesirleri verirken ne verdiğinin farkında olmadığı için hatalı verirken, ***PTOLEMAEUS*** ise, (4.36)'da verdiği kesrin ne anlama geldiğinin gayet farkındadır. Çünkü onun döneminde trigonometrik tablolar hazırlanıyordu. Bu, Antik dönemde düzgün çokgenlerle π hesabını yapanlara göre büyük bir devrimsel sıçrama idi!

Şu halde eğer bir çemberin dışına çizilmiş düzgün 360-genle π'yi hesaplamak istersek,

$$(4.42)\quad 360\mathrm{Tan}\frac{180^{\circ}}{360}=360\mathrm{Tan}\left(\frac{1}{2}\right)^{\circ}\gtrsim 360\times 0;0{,}31{,}25=360\times 0;0{,}31{,}25=3;8{,}30=\pi_P$$

olduğunu görürüz. Oysa bu hesabı Antik dönemdeki gibi düzgün teğetler 360-geniyle yapmaya çalışsaydık, bu imkansız olurdu. Çünkü $360=2^3.3^2.5$ çarpanlarına ayrılışta görüldüğü gibi açıyı hem 2 kez 3'e bölmeye çalışacaktık (bkz. açının 3'e bölünmezliğine), hem de 5'e (örneğin, üçgenden 15-gene geçmek ya da 5-genden 15-gene veyahut da 45-gene geçmek mümkün değildi). Bunlar Antik dönemde imkânsız şeyler idi. İşte ***PTOLEMAEUS***'un düzgün çokgenlerle π hesabındaki devrimsel değişikliği bu idi. Buna göre düzgün n-genin kenar sayılarını trigonometrik tabloya göre istediğiniz tamsayı olarak alabilirdiniz!

Şimdi ***HEIBERG*** ve ***TANNERY***'den sonra ***HERON***'un (4.1)'deki kesirlerini şöyle düzeltebilirim:

$$(4.43)\quad 3.14159(04271\cdots)=\frac{\overbrace{211872}^{\mu^{\kappa\alpha},\alpha\omega o\epsilon}}{\underbrace{67441}_{\mu^{\varsigma},\zeta\nu\mu\alpha}}<3.14159(04632\cdots)=a_{1536}<\pi<b_{1536}=3.14159(70343\cdots)<\frac{\overbrace{195888}^{\mu^{\iota\theta},\zeta\omega\pi\eta}}{\underbrace{62353}_{\mu^{\varsigma},\beta\tau\nu\alpha}}=3.14159(70362\cdots).$$

Burada $a_n=n.\mathrm{Sin}\frac{\pi}{n}$ ve $b_n=n.\mathrm{Tan}\frac{\pi}{n}$ dersek a_{1536} ve b_{1536}'ya göre mavi renkli rakamlar doğru basamakları ve kırmızı renkli rakamlar hatalı rakamları gösterir (Bkz. "*A Manual of Greek Mathematics/Ancient approximations to the value of π, S. 146*"). İlkin bu kesirlerde $\underbrace{5}_{\epsilon}+\underbrace{2}_{\beta}=\underbrace{7}_{\zeta}$ toplamıyla çift hata yapılmıştır. Çünkü alt sınırın payındaki birler basamağında 2 yerine 5 yazılmış (ki bu hata alt sınırın payındaki ve üst sınırın paydasındaki birler basamağındaki rakamlarının $\underbrace{2}_{\beta}+\underbrace{3}_{\gamma}=\underbrace{5}_{\epsilon}$ toplamından gelmiş olmalıdır) ve üst sınırın payındaki binler basamağında da 5 yazılacağına, dalgınlıkla bir öncekindeki rakamlar toplanarak 7 yazılmıştır. Hatırladığım kadarıyla böylesine zorlu bir çift hatayı yakalayan tek bir kişi vardır; o da, Plimpton 312 no'lu tabletinin 2. satırındaki çift hatayı yakalayan Avustralyalı araştırmacı ***R. J. Gillings***'tir (Bkz. "*R. J. Gillings, Unexplained error in Babylonian cuneiform tablet, Plimpton 322, Australian J. Sci. 16 (1953), 54-56*"). İkinci olarak, üst sınırın paydasının birler basamağında 3 yerine 1 yazılarak basit bir hata yapılmıştır. Bu durumda ***TANNERY***'nin (4.8)'de hatalı rakam sayısını doğru tahmin ettiği görülür.

Diğer taraftan, eğer ***HEIBERG***'in tahminindeki kesirler için (4.6) ve (4.7)'de yaptığımız testi (4.43)'te yaparsak,

$$(4.44)\quad \pi<3.1415926(302\cdots)=\frac{2\times\frac{211872}{67441}+\frac{195888}{62353}}{3}\lesssim b_{24576}<\frac{\frac{211872}{67441}+\frac{195888}{62353}}{2}=3.14159(37317\cdots)\lesssim b_{3072}$$

olarak beklenen sonuçlar gerçekleşir. Burada aritmetik ortalamadan elde edilen sonuç (4.11)'deki gerçeğine göre 7 ondalıkla doğruyken, Snellius algoritmasından elde edilen sonuç π'nin 10 basamağını doğrulayacağına (yani aritmetik ortalamayı 2'ye katlayacağına), 7 ondalıkla doğrular. Bu sonucu ikinci yoldan şu şekilde de doğrulayabiliriz: (4.44)'teki aritmetik ortalama b_{3072}'yi 7 ondalıkla doğrularken, Snellius algoritması da b_{24576}'yı 7 ondalıkla doğrular. Demek ki daha kalifiye bir çalışma yapmak gerekiyormuş. Çünkü bunun için (4.43)'teki kesirlerin 1536-genlerdekilerle aynı sayıda basamakta yani en az 10 ondalıklarının doğru olması gerekiyordu!

Şimdi de varsayalım ki ***HERON***'un (4.1)'deki kesirlerinin düzeltilmiş şekli (4.43) olsun ve bunun ***ARŞİMET*** zamanında değil ama ***SNELLIUS*** zamanında verilebileceğine ilişkin ispata geçelim. Yani bu ispatı vermek ne kadar absürd de olsa, ben yine de (4.43)'ün, dolayısıyla (4.1)'in tüm yönleriyle anlaşılması için bu ispatı vereceğim!

4.7.1. *ARŞİMET*'in Çember Ölçümü Hakkında. Bilindiği gibi bunun için ***"Arşimet Palimpsesti"***'nde 3 önerme ve ***HERON***'un bildirdiği ***"Prizmalar ve Silindirler Hakkında"*** olmak üzere 2 farklı çalışma mevcuttur. Bunlardan ilki günümüze kadar ulaşabilirken ikincisi kayıptır. Fakat kataloglarda böyle bir çalışma geçmez!

Arşimet Palimpsesti'ndeki **Önerme 3**'ün ifadesi şudur: *"Herhangi bir çemberin çevresi, çapının $3\frac{10}{71}$'inden büyük ama $3\frac{1}{7}$'sinden küçüktür."*

ARŞİMET, bu ifadenin altında π için ispatlı olarak şu çifte eşitsizliği verir (ki $A_n=6.2^n\mathrm{Sin}\frac{\pi}{6.2^n}$ ve $B_n=6.2^n\mathrm{Tan}\frac{\pi}{6.2^n}$ olarak aldım):

$$(4.45)\quad 3.14(0845\cdots)=3\frac{10}{71}<3.14(1031\cdots)=A_4<\pi<B_4=3.14(2714\cdots)<3\frac{1}{7}=3.14(2857\cdots).$$

Fakat ***HERON***'un bildirdiğine göre ***ARŞİMET***, aynı çalışmaya devam etmiş ve en iyi ihtimalle (4.45)'teki n'yi çifte katlayarak (4.43)'teki kesirlere göre şu sonuçları vermiştir:

$$(4.46)\quad 3.14159(04271\cdots)=\frac{211872}{67441}<3.14159(04632\cdots)=A_8<\pi<B_8=3.14159(70343\cdots)<\frac{195888}{62353}=3.14159(70362\cdots).$$

Bir kere her şeyden önce bu mümkün değildir. Çünkü bu takdirde ***ARŞİMET***'in alt sınırda π'nin 5 ondalığını doğrulaması yetmeyecek ve ona parantez içindeki 2 basamağı daha eklemesi gerekecektir. Aynı şekilde, üst sınırda da π'nin 5 ondalığını doğrulamasıyla birlikte parantez içindeki 3 basamağı daha eklemesi gerekir. Yani ***ARŞİMET***'in π'nin doğru basamaklarını bulması yetmez; onlara parantez içindeki doğru olmayan basamakları da eklemesi gerekir. Oysa (4.45)'te bu böyle değildir!

Özetle, ***HERON***'un bildirdiğine göre (4.46)'nın ispatını yapmaktan başka bir çaremiz yok. Yani bu her ne kadar absürd de olsa, bize başka bir çıkar yol bırakmaz!

Başlayalım!

Öncelikle bu hesaba girmeden önce $\sqrt{3}$'ün alt ve üst sınırlarının nasıl bulunduğuna bir bakalım.

$\sqrt{3}$'e Rasyonel Yaklaşımlar. Bilindiği gibi ***ARŞİMET***, (4.45)'teki kesirlere ulaşabilmek için ilkin $\sqrt{3}$ için 2 atmışlığı doğru olan,

$$(4.47)\quad \frac{265}{153}<\sqrt{3}<\frac{1351}{780}<\frac{362}{209}<\frac{97}{56}$$

kesirlerinden yeşil renkli olanları seçerken (ki alt sınırda tek sınır var ve bunu seçmek zorunda iken, üst sınırda yakınsaklığı en iyi olanını almıştır), hesaptaki kareköklü sayılara kesirlerle yaklaşımlar için ***KLINE***'a göre

$$(4.48)\quad a+\frac{b}{2a+1}<\sqrt{a^2+b}<a+\frac{b}{2a}$$

algoritmalarını kullanmıştır!

Fakat ***ARŞİMET***'in (4.46)'daki kesirlere ulaşabilmek için $\sqrt{3}$'ün alt ve üst sınırları nasıl almış olduğu ***"Prizmalar ve Silindirler Hakkında"*** adlı kitabı kayıp olduğundan bilemiyoruz. Ancak (4.48)'deki algoritmalarla yaptığım araştırmalara göre (4.46)'daki kesirlere ulaşabilmek için $\sqrt{3}$ için asgari 5 atmışlığı doğru ama 6 atmışlığa çok yakın olan

$$(4.49)\quad \frac{191861}{110771}<\sqrt{3}<\frac{262087}{151316}$$

kesirlerinin alınması gerekiyor.

Hesap başlıyor!

Şimdi bir gösterim için (4.49)'daki alt sınırla (4.46)'nın üst sınırına nasıl ulaşıldığını göstereyim.

Bunun için ilkin (4.49)'daki $\sqrt{3}$'ün alt sınırı için şu işlemleri yapmalıyız:

$$(4.50)\quad \begin{cases}\sqrt{3}>\dfrac{191861}{110771}\\ 2>\dfrac{221542}{110771}\end{cases}\Rightarrow 2+\sqrt{3}>\frac{221542}{110771}+\frac{191861}{110771}=\frac{413403}{110771}.$$

İkinci olarak bu son kesri şu kareköklü işleme tabî tutmalıyız:

$$(4.51)\quad \begin{cases}\dfrac{\sqrt{413403^2+110771^2}}{110771}=\dfrac{\sqrt{427986^2+238654}}{110771}>\dfrac{427986+\dfrac{238654}{2\times 427986+1}}{110771}=\dfrac{427986\frac{238654}{855973}}{110771}>\dfrac{427986\frac{238654}{855972}}{110771}=\dfrac{427986\frac{9179}{32922}}{110771}\\ >\dfrac{427986\frac{9176}{32922}}{110771}=\dfrac{427986\frac{148}{531}}{110771}.\end{cases}$$

Üçüncü olarak (4.50) ve (4.51)'i taraf tarafa toplarsak,

$$(4.52)\quad \frac{413403}{110771}+\frac{427986\frac{148}{531}}{110771}=\frac{841389\frac{148}{531}}{110771}$$

kesrini elde ederiz.

Dördüncü olarak bu kesri de (4.51)'deki gibi aynı işleme tabî tutarsak,

$$(4.53)\quad \begin{cases}\dfrac{\sqrt{\left(841389\frac{148}{531}\right)^2+110771^2}}{110771}=\dfrac{\sqrt{848649^2+1007583\frac{267226}{281961}}}{110771}>\dfrac{848649+\dfrac{1007583\frac{267226}{281961}}{2\times 848649+1}}{110771}=\dfrac{848649+\dfrac{284099377489}{478572123339}}{110771}\\ \dfrac{848649+\dfrac{531\times\frac{284099377489}{478572123339}}{531}}{110771}>\dfrac{848649+\dfrac{315\frac{2}{9}}{531}}{110771}\end{cases}$$

ve bununla (4.52)'yi taraf tarafa toplarsak,

$$(4.54)\quad \frac{841389\frac{148}{531}}{110771}+\frac{848649+\dfrac{315\frac{2}{9}}{531}}{110771}=\frac{1690038\dfrac{463\frac{2}{9}}{531}}{110771}=\frac{1690038\frac{4169}{4779}}{110771}$$

sonuçlarını elde etmiş oluruz.

Şimdi (4.54)'teki toplam kesrini kareköklü işleme tabî tutarsak,

$$(4.55)\quad \begin{cases}\dfrac{\sqrt{\left(1690038\frac{4169}{4779}\right)^2+110771^2}}{110771}=\dfrac{\sqrt{1693665^2+472297\frac{20348320}{22838841}}}{110771}>\dfrac{1693665+\dfrac{472297\frac{20348320}{22838841}}{2\times 1693665+1}}{110771}=\dfrac{1693665+\dfrac{10786736436097}{77362714123371}}{110771}\\ \dfrac{1693665+\dfrac{4779\times\frac{10786736436097}{77362714123371}}{4779}}{110771}>\dfrac{1693665+\dfrac{666\frac{1}{3}}{4779}}{110771}=\dfrac{1693665+\dfrac{1999}{14337}}{110771}\end{cases}$$

ve bununla da (4.54)'ü taraf tarafa toplarsak,

$$(4.56)\quad \frac{1690038\frac{4169}{4779}}{110771}+\frac{1693665+\frac{1999}{14337}}{110771}=\frac{3383665\frac{14506}{14337}}{110771}$$

sonucunu elde ederiz.

Şimdi de (4.56)'daki toplam kesrine karekök alma işlemini uygularsak,

$$(4.57)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{\left(3383665\frac{14506}{14337}\right)^2+110771^2}}{110771}=\frac{\sqrt{3385516^2+4467573\frac{11326117}{205549569}}}{110771}>\frac{3385516+\frac{4467573\frac{11326117}{205549569}}{2\times 3385516+1}}{110771}=\frac{3385516+\frac{918307715952154}{1391782914834777}}{110771}\\
&\frac{3385516+\frac{14337\times\frac{918307715952154}{1391782914834777}}{14337}}{110771}>\frac{3385516+\frac{9459\frac{7}{11}}{14337}}{110771}=\frac{3385516+\frac{104056}{157707}}{110771}
\end{aligned}\right.$$

ve bunu da (4.56) ile taraf tarafa toplarsak,

$$(4.58)\quad \frac{3383665\frac{14506}{14337}}{110771}+\frac{3385516+\frac{104056}{157707}}{110771}=\frac{6769220\frac{35305}{52569}}{110771}$$

kesrine ulaşmış oluruz.

Bu toplam kesrine de aynı kareköklü işlemi yapar,

$$(4.59)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{\left(6769220\frac{35305}{52569}\right)^2+110771^2}}{110771}=\frac{\sqrt{6770126^2+12659294\frac{247579456}{2763499761}}}{110771}>\frac{6770126+\frac{12659294\frac{247579456}{2763499761}}{2\times 6770126+1}}{110771}\\
&=\frac{6770126+\frac{34983956191008190}{37418485929379533}}{110771}=\frac{6770126+\frac{52569\times\frac{34983956191008190}{37418485929379533}}{52569}}{110771}>\frac{6770126+\frac{49148\frac{8}{11}}{52569}}{110771}=\frac{6770126+\frac{180212}{192753}}{110771}
\end{aligned}\right.$$

ve bunu (4.58) ile taraf tarafa toplarsak,

$$(4.60)\quad \frac{6769220\frac{35305}{52569}}{110771}+\frac{6770126+\frac{180212}{192753}}{110771}=\frac{13539347\frac{350732}{578259}}{110771}$$

toplam kesrini ve bunun da aynı şekilde karekökünü alırsak,

$$(4.61)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{\left(13539347\frac{350732}{578259}\right)^2+110771^2}}{110771}=\frac{\sqrt{13539800^2+19784917\frac{91009191469}{334383471081}}}{110771}>\frac{13539800+\frac{19784917\frac{91009191469}{334383471081}}{2\times 13539800+1}}{110771}\\
&=\frac{13539800+\frac{6615749312518676746}{9054970977868518681}}{110771}=\frac{13539800+\frac{578259\times\frac{6615749312518676746}{9054970977868518681}}{578259}}{110771}>\frac{13539800+\frac{422488}{578259}}{110771}=\frac{13539800+\frac{64987}{192753}}{110771}
\end{aligned}\right.$$

ve bunu (4.60) ile taraf tarafa toplarsak,

$$(4.62)\quad \frac{13539347\frac{350732}{578259}}{110771}+\frac{13539800+\frac{64987}{192753}}{110771}=\frac{27079148\frac{64987}{192753}}{110771}$$

sonucuna ulaşmış oluruz.

Son olarak bu toplam kesrine de aynı kareközü işlemi uygular,

$$(4.63)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{\left(27079148\frac{64987}{192753}\right)^2+110771^2}}{110771}=\frac{\sqrt{27079374^2+48648030\frac{8216959576}{37153719009}}}{110771}>\frac{27079374+\frac{48648030\frac{8216959576}{37153719009}}{2\times 27079374+1}}{110771}\\
&=\frac{27079374+\frac{1807455245178361846}{2012198942224959741}}{110771}=\frac{27079374+\frac{192753\times\frac{1807455245178361846}{2012198942224959741}}{192753}}{110771}>\frac{27079374+\frac{173140\frac{1}{7}}{192753}}{110771}=\frac{27079374+\frac{1211981}{1349271}}{110771}
\end{aligned}\right.$$

ve bunu (4.62) ile taraf tarafa toplarsak,

$$(4.64)\quad \frac{27079148\frac{64987}{192753}}{110771}+\frac{27079374+\frac{1211981}{1349271}}{110771}=\frac{54158523\frac{35291}{149919}}{110771}$$

aranan kesrini bulmuş oluruz.

İşte bu son sonuçla (4.46)'daki üst sınıra şu şekilde yaklaşmış oluruz:

$$(4.65)\quad \pi<B_8=3.14159(70343\cdots)<\frac{1536\times 110771}{54158523\frac{35291}{149919}}=3.14159(70346\cdots)<\frac{195888}{62353}=3.14159(70362\cdots).$$

Fakat buradaki üst sınırdan ***HERON***'un üst sınır kesrini elde etmek mümkün değildir; çünkü 110771 asaldır!

Resim 4.3. ***ARŞİMET*** çemberlerle çalışırken, onu öldürmeye gelen bir Romalı asker. Rivayete göre ***ARŞİMET*** şöyle demiş: *"Çemberlerime dokunma!"*

GTA V ONLINE'da *ARŞİMET* ile Karşılaştım!

GTA V'i 2015'ten beri oynarım. Ama 25.08.2019'da *STEAM*'den *"Criminal Enterpreis Starter Pack"*'i satın aldıktan sonra toplamda 10,000,000 $'lık içerik verildiğini görünce ilk olarak Paleto Ormanı'ndaki bunkerı aldım. Bu bunker bedava idi ama konumu nedeniyle bana bir şeyi hatırlatıyordu ve *"Buldum (Eureka), burası **ARŞİMET**'in Siraküza'daki mezarının olduğu yere çok benziyor!"* dedim. Eğer bunun için ***PIERRE HENRI DE VALENCIENNES***'in *"ÇİÇERO'nun ARŞİMET'in mezarını keşfetmesi, 1787"* adlı tablosuna bakarsanız ne demek istediğimi daha iyi anlarsınız. İşte bu benzerliği ilk farkettiğimde resmen dilim tutulmuştu ve *ROCKSTAR* tarafından bu bunkerın bedava verilmesine şaşırıyordum. Yani orada sırf ***ARŞİMET***'e yakın olmak için boş boş tur attığım çok oldu! Acaba aşırı sevgi öldürür mü?

İşin kötüsü, ***HERON***,

$$(4.66) \qquad \frac{195888}{1536} = \frac{4081}{32}$$

sadeleştirmesine göre bir ipucu bırakılmıştır. Yani 4081 sayısı $\sqrt{3}$'ün alt sınırının paydasına ait bir çarpan olmalıdır.

Aynı şekilde,

$$(4.67) \qquad \frac{211872}{1536} = \frac{2207}{16}$$

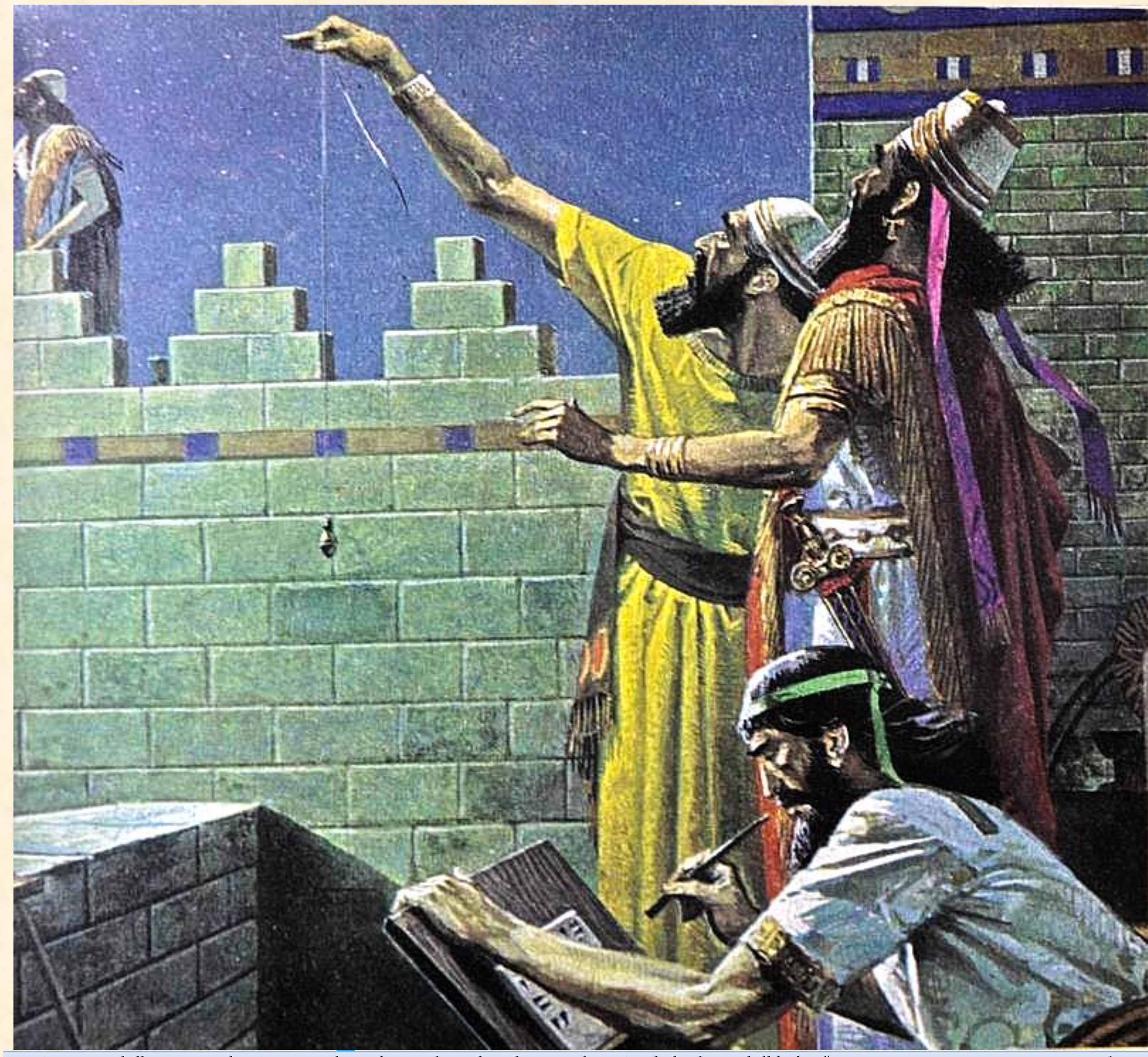
sadeleştirmesinden 2207'nin $\sqrt{3}$'ün üst sınırının paydasından kalma bir parça olduğu anlaşılmaktadır. Fakat ne var ki ***ARŞİMET***'in seçme yöntemine göre (bkz. (4.47) ve (4.49)'a) $\sqrt{3}$'ün paydasının bir çarpanı 4081 ve 2207 olan alt ve üst sınırları mevcut değildir. Bu ise tüm tahmincilerin ortak karar kıldığı ***HERON***'un iddiasını çürütür!

Özetle, ***HERON*** ya da onun adına (4.1)'i veren kişi, bizimle matrak geçmiş görünür. Çünkü ***ARŞİMET***'in verdiği iddia edilen (4.46)'daki kesirleri elde edebilmek için en hafifi (4.53)'te görülen kareköklü işlemlere ve onlarca basamaklı sayılarla 4 işlem yapmamıza gerek vardır. Yani yukarıdaki ispatı sırf bunun için yaptım. Özetle, bu ispatta $\sqrt{3}$'ün alt sınırındaki kesrin paydasındaki sayı ister (4.49)'daki gibi asal olsun isterse asal olmasın, bununla ortaya çıkan **BÜYÜK EL HESAPLARI** ilk kez 17. yy. Hollanda'sı'nda ***VAN CEULEN*** ve ***SNELLIUS*** tarafından yapılıyordu. Yani bu tür hesapların ***ARŞİMET*** zamanında yapılması mümkün değildi. Fakat bundan önce, (4.66) ve (4.67), zaten bu tür hesaplara girmememiz gerektiğini söylüyordu!

Derya PAMUKTULUM

EK 2: Çağlar Boyunca Saros Döngüsündeki *PTOLEMY*'nin II'si

15.08.2012, 21:55.



Resim 4.4. Babilli astronomlar Ay üzerinde gözlem ve hesaplamalar yaparken. Orada herkes Babilliler'in *"Hesap yapan iyi yazamaz; iyi yazan hesap yapamaz!"* atasözüne göre hareket eder. Yani elinde çekül olan ve hesap yapan kişi, Rahip'tir ve onun gözlem sonuçlarını kayda geçiren kişi ise, Kâtip'tir! Fakat ***Celal Şengör***, *"Birbirini yalanlayan inançlar ile bilim yapılabilir mi?"* konferansında bu görüntüyü yanlış anlamış ve *"Bu gördüğünü yazıyor!"* demiştir. Demek ki oradan öyle görüyor! Hayır, benim sıkıldığım nokta bu değil; *"Kim Rahip (Papaz) olacak?, Kim depocu olacak?, Kim Kâtip olacak?,…"* diye sayarken bu adamları "boş adam (işi gücü olmayan adam)" kategorisine sokması idi!

WIKIPEDIA'daki bilgilerimize göre 1 Güneş Yılı (GY)'nın 1 Ay Ayı (AA = SA)'na oranı,

$$(1)\quad 1\frac{\text{GY}}{\text{SA}} = \frac{1\ \text{GY}}{1\ \text{AA}} = \frac{365.256363004}{29.530589}$$

dur.

Sözkonusu bu çevrim M.Ö. 747'de Babilliler'de (bkz. *"Saros Cycle Dates and Related Babylonian Astronomical Texts", S. 47*)

$$(1.1)\quad 1\frac{\text{GY}}{\text{SA}} = \frac{223 \times 6{,}0}{18 \times 6{,}0 + 10;30}$$

ve Grekler'de ([23]),

$$(1.2)\quad 1\ \text{GY} = \frac{235}{19}\ \text{SA}$$

idi (SA: Sinodik Ay).

Fakat (1) oranındaki pay ve paydadaki günler sabit değildir ama, bu oran ağırlık teşkil eden bir sabit değere götürür bize. Bu nedenle (1.1) ve (1.2)'deki çevrimlerin her ikisi de kayda değer bulgulardır. Ancak (1)'deki esas çevrime göre (1.2)'deki oran, (1.1)'e göre daha iyi bir çevrimdir!

([23]) M.Ö. 432'de ***ATİNALI METON*** tarafından keşfedildiği söylenen ve **"Metonik Çevrim** (Metonic Cycle)**"** denilen bu çevrim yine Babilliler'den gelmekteydi (Bkz. ***Otto Neugebauer***'in *"Studies in ancient astronomy VI. The 'Metonic Cycle' in Babylonian Astronomy, 1946"*, *"Babylonian Planetary Theory, 1954"*, *"A History of Ancient Mathematical Astronomy, 1975"*, "Astronomical Cuneiform Text, 1975", *"A Mathematician's Journeys, 2016"* vb. kitaplarına). Bu çevrim Antikitera makinesinde kullanılmıştır (Bkz. *"Zaman Başlarken"*, S. 306-310. Ayrıca Antikitera makinesinin nasıl çalıştığını görmek için Mathematica'daki *"Antikitera Mekanizması"*'na da bakabilirsiniz).

Burada dikkat edilmesi gereken nokta şudur: (1)'deki esas çevrimden istenildiği kadar oranın ve bunlar içinde daha iyi oranların tanımlanabileceğinin mümkün olmasıdır. Ayrıca İskenderiyeli matematikçi ve astronom *CLAUDIUS PTOLEMY (90-168)*'nin, M.S. 150'de 3;8,30 değerini verirken, bu çevrimin farkında olup olmadığının da sorgulanması gerekir!

4.8. *PTOLEMY*'nin Π'si Hakkında

PTOLEMY'nin, π için seksagesimal sayılarla 3;8,30 yaklaşıklığını verirken, bir daire içine düzgün kirişler 360-genini çizerek ve günümüzdekine benzer trigonometrik kuralları kullanarak hesapladığı söylenir. Fakat buna ilişkin elimizde bir kayıt yoktur. Bu konuda bildiğimiz tek şey, ***PTOLEMY***'nin günümüze ulaşan 1515 tarihli Latince basılmış "*ALMAGESTUM*" adlı kitabının **"SEXTA (6.)"** bölümündeki 68. sayfasındaki Ay ile ilgili bir çalışmasında π için 3;8,30 değerini kullanmış olduğudur (**Y.N.** M.Ö. 2000'lerde de Susa tabletinde 3;7,30 değeri verilmişti. Yani ***PTOLEMY***'ninki bundan 60'ta 1 daha iyidir). Bu sayfada π için 3;8,30 değerinin nasıl bulunmuş olduğu belirtilmemiştir. Fakat Viyana Üniversitesi Astronomi Enstitüsü'nün **"250 Jahre (250. Yıl)"** anısına yayınladığı bu eserde, 68. sayfanın kenarındaki boşluğa çizimin yanına kahverenkli ve kırmızı renkli birtakım çalışma notları bırakılmış ve ***PTOLEMY***'nin π için keşfettiği 3;8,30'ın ***ARŞİMET***'in $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ kesirleri kullanılarak bulunmuş olabileceğine ilişkin bir not düşülmüştür. Ancak bu notu düşen kişi yanılıyor. Çünkü bu sınırların aritmetik ortalamasından,

$$\pi = \frac{3\frac{10}{71} + 3\frac{1}{7}}{2} = 3;8,30,39 + \frac{59\frac{4}{7}}{71 \times 60^3}$$

görüldüğü üzere ***PTOLEMY***'nin 3;8,30 değerine ulaşmak mümkün değildir. Zira ***PTOLEMY***, hiçbir hesabında böyle bir değeri 3;8,30 olarak yuvarlatmaz. Neden? Çünkü $60^3 = 216000$'de 1'ler basamağındaki sayı 39 olup, 30'dan büyüktür. Bu değer bir önceki basamağa en kötü yaklaşımla 0.5 (yarım) olarak yuvarlatılır; 0 olarak değil!

Fakat burada şu yapılmış olabilir: ***ARŞİMET***'in π için verdiği sınırların aritmetik ortalaması yerine daha da hızlandırıcı bir ekstrapolasyon, örneğin ***SNELLIUS***'un algoritmasını kullanırsak,

$$\pi = \frac{2 \times 3\frac{10}{71} + 3\frac{1}{7}}{3} = 3;8,29,27,\cdots$$

ile 4 ondalığı doğru olan daha iyi bir yaklaşıklığını bulmuş oluruz. Yani bundan ***PTOLEMY***'nin 3;8,30 değerine ulaşmak mümkündür!

Bir Anım

Az önce (15.08.2012, 21:55) öğrendiğime göre, futbolda Avusturya'ya karşı 2-0 yenik olduğumuzu ve bir sonraki maçta da Hollanda ile oynayacağımızı haber aldım. Muhtemelen Hollanda da bize bir 4 çeker. Çok ilginçtir; ben Avusturya ile Hazırlık Maçı oynadığımız kanalı ararken, maçın Kanal 24'te oynandığını tespit ettim ve ekranın sol-üst köşesinde 10. dakikayla birlikte skorun da 2-0 olduğunu gördüm. Ben zannettim ki skor 2-0 olduğuna göre 2. devrenin 10. dakikası oynanıyor. Ama hayır, öyle değilmiş; maçın ilk devresinin 10. dakikası imiş. Çünkü 2. dakikada ***Veli Kavlak***, geri pasla kaleci ***Mert***'i zora sokarak gole neden olmuş ve 5. dakikada da penaltı olmuş ve 6. dakikada kullanılan bu penaltı gol olmuş. Gerçekten de o anda şoka girdim. Çünkü her ne kadar hazırlık maçı da olsa, bu sonuç beni şoka sokmuştu (Bkz. "*Avusturya 2-0 Türkiye*").

İşte ben, yukarıda ***PTOLEMY***'nin π için 3;8,30 yaklaşıklığını nasıl bulduğunu (orijinal kaynağa da bakarak) araştırırken bu şok sonuçla karşılaştım. Bu arada ***SNELLIUS***'un Leydenli yani bir Hollandalı olduğunu belirtmeden geçemeyeceğim. Yani Hollandalılar gerçekten çok zeki insanlardır; yabana atmamak gerekir!

Her neyse, ***PTOLEMY***'nin π için 3;8,30 değerini nasıl bulduğu tarihin karanlığında kalmakla birlikte, bu değerin (1)'de neden önemli olduğunu kendi keşfimle anlatayım!

Öncelikle ***PTOLEMY***'nin verdiği değer 3;8,30 olduğuna göre, bunu (1.1)'deki Babilliler'in formatında yazmaya çalışırsak 3;8,30 değerini kesirden kurtarmamız gerekir.

Şu halde 3;8,30'u 6,0 ile çarparsak,

$$6,0 \times 3;8,30 = 18,51$$

sayısını elde ederiz ki bu, (1.1) ile (1.2)'deki kesirlerin paydaları arasında bulunmakla birlikte (1.2)'dekine daha yakındır.

Şimdi ***PTOLEMY***'nin 3;8,30 değerini yukarıdaki eşitliğe göre (1.1)'deki gibi tanımlamaya çalışırsak,

$$\pi = 3;8,30 = \frac{18,51}{6,0} = \frac{6}{6} \times \frac{18 \times 1,0 + 51}{6,0} = \frac{1}{6} \times \frac{18 \times 6,0 + 5,6}{6,0}$$

eşitliklerine göre

$$(1.3) \quad 1\,\frac{\mathrm{GY}}{\mathrm{SA}} = \frac{k}{\pi} = 6k \times \frac{6,0}{18 \times 6,0 + 5,6}$$

yaklaşımı sözkonusu olur. Çünkü burada kesrin tersi 18.85 olup (1.1) ile (1.2)'nin paydaları arasında kalır (ki bu sefer de (1.1)'deki kesir 6,0 ile sadeleştirilmelidir).

İşte (1) ile (1.3)'teki eşitliklerden k sabiti,

$$k = 38;51,30,31,13,\cdots \cong 38;51,30$$

olarak elde edilir. Burada 2 ondalık doğrulukla $k = 38.85847791\cdots \cong 38\frac{6}{7}$ ve $\frac{18\times6,0+5,6}{6,0} = 18.85$ değeri bir ondalık kesir olmasına rağmen, 2 ondalık doğrulukla $18\frac{6}{7}$'ye eşit olması gerçekten de dikkatimi çekti ve bir an için ***PTOLEMY***'nin $\pi = 3;8,30$ değerini Saros çevriminde kullanmış olduğunu zannettim!

Eğer ***PTOLEMY***, $\pi = 3;8,30$ değerini (1)'deki çevrimde kullandı ise, ona göre,

$$(1.4)\quad 1\frac{GY}{SA}=\frac{k}{\pi}=\frac{38;51,30}{3;8,30}$$

dir ve bu sonuç (1)'i 4 ondalıkla doğrular!

Fakat bundan çok daha ilgi çeken bulgu şudur: Bu sonuçlara göre k ile π'yi toplarsak,

$$k+\pi=38;51,30+3;8,30=42;0$$

sonucu elde edilir. Bu, 60 tabanında da, 10 tabanında da 42 demektir!

Diğer taraftan, (1)'deki verilere göre aynı işlemi yaparsak karşımıza son derece şaşırtıcı bir sonuç olan,

$$k+\pi=\pi\times 1\,SÇ+\pi=\left(\frac{365.256363004}{29.530589}+1\right)\pi=41.9991551\cdots$$

sonucu çıkar. Yani bu değer rahatlıkla 42 (ki Babilliler'e göre 42;0) olarak alınabilir.

Demek ki (1)'deki çevrimi π'ye göre tanımlarsak (1.4)'te $k=42-\pi$ olmak üzere,

$$(1.5)\quad 1\frac{GY}{SA}=\frac{42-\pi}{\pi}\quad (03.08.2012, 02:00)$$

olur ki bu, Dünya ve Ay arasındaki ilişkiyi gösterir. Ama ***PTOLEMY***, ***VIETÆ*** ve daha nice π ile uğraşan matematikçi ve astronomlar bu mükemmel ilişkiyi göremediler!

Çok değil, ***ARISTOTELES***'ten ***KEPLER (1571-1630)***'e kadar **"Kristal Küreler"** içindeki gezegenlerin yörüngeleri birer çember olarak kabul ediliyordu. Bunlarda tabii ki astronomik uzaklıklar nedeniyle π kullanılmıyordu ama Dünyamızın büyüklüğü sözkonusu olduğunda, Dünyamızın bir küre olması hesabıyla π kullanılıyordu. ***ERATOSTHENES***, ***SNELLIUS*** hep bu şekilde hesap yaptılar. Fakat ***SNELLIUS***, "*Eratosthenes Batavus (Hollandalı Eratosthenes), 1617*"de ***ERATOSTHENES***'in hesabını geliştirerek Dünyamızın çevresini % 3.5 hatayla 38,653 KM olarak hesapladı! (Bkz. "*Erathosthenes Measures the Earth*")

(1.5)'in Geometrik Anlamı

Şimdi bulduğumuz bu sonucun geometrik anlamının "Kepler Kanunları"ndan ikincisine göre çözülebileceği sanılıyorsa bu, doğru değildir. Çünkü 2. Kepler Kanunu Güneş Sistemi'ndeki gezegenler ya da ***EINSTEIN***'ın **"Genel Görelilik Teorisi"**nin kanıtlandığı 19 Mayıs 1919'daki Tam Güneş Tutulması'ndaki gibi büyük cisimler için geçerli olabilir bu!

Diğer taraftan, fizikteki "3 Cisim Problemi"nin çözümsüzlüğü nedeniyle Güneş, Dünya ve Ay'ın hareketlerini kontrol eden bir kanuna, dolayısıyla (1)'in fiziksel ve geometrik bir tanımına sahip değiliz. Bu konuda tek bildiğimiz şey, Ay Dünya'nın çevresinde $42-\pi$ kere tur atarken Dünya'nın da Güneş etrafında π kere tur atmış olduğudur. Örneğin, Meton'un çevrimi için Dünya Güneş'in etrafında 19 kez tur atarsa, Ay Dünya'nın çevresinde,

$$\begin{array}{cc}\pi & 42-\pi\\ 19 & x\end{array}$$

$$x=19\times\frac{42-\pi}{\pi}=235.0112892\cong 235$$

kere tur atar!

Bir başka örnek: ***ARŞİMET***'in $\pi=3\frac{1}{7}$ yaklaşıklığını alırsak,

$$(1.6)\quad 1\frac{GY}{SA}=\frac{42-3\frac{1}{7}}{3\frac{1}{7}}=\frac{38\frac{6}{7}}{3\frac{1}{7}}=\frac{136}{11}$$

çevrimini elde ederiz ki kesrin payının $k=38\frac{6}{7}$ olmasını yukarıdaki (1.4)'te ***PTOLEMY***'nin π değerinde yaptığım çalışmada çok yakın olduğunu görmüştük!

Fakat Mathematica 7.0'da (1.5) kesrini rasyonelleştirdiğimiz zaman,

In[1]:= $\text{Table}\left[\text{Rationalize}\left[\frac{42-\pi}{\pi}, 10^{-n}\right], \{n, 1, 10\}\right]$

Out[1]= $\left\{\frac{37}{3}, \frac{99}{8}, \frac{235}{19}, \frac{1039}{84}, \frac{4391}{355}, \frac{18603}{1504}, \frac{31776}{2569}, \frac{122713}{9921}, \frac{122713}{9921}, \frac{2117897}{171226}\right\}$

Tablo 4.1. Rationalize'daki toleransı ne kadar düşürürseniz düşürün, yani n'yi ne kadar küçültürseniz küçültün ***PTOLEMY***'nin (4.32)'deki π'sine göre (4.35)'i görmeniz mümkün değildir. Neden? Çünkü ***PTOLEMY***'nin çevrimi Meton çevrimine çok yakındır ve bu yüzden Rationalize'da sadece kırmızı renkle gösterdiğim Meton çevrimi görünür!

Antkitera Mekanizması'ndaki Sinodik Ay Hesabı

M.Ö. 100-150'ye tarihlenen Antikitera mekanizmasında e2 çarkı (ki e5 çarkına ekli olarak e-ekseninde dış şaft olduğuna inanılıyor) her sinodik ayda 1 kez döner ve bu, $\frac{235}{19}\times\frac{254}{235}=\frac{254}{19}$ oranını gerektirir. Bu oran mekanizmadaki b2-c1+c2-d1+d2-e2 çarklarına göre $\frac{64}{38}\times\frac{48}{24}\times\frac{127}{32}=\frac{2\times32}{2\times19}\times\frac{2\times24}{24}\times\frac{127}{32}=\frac{2\times127}{19}=\frac{254}{19}$ şeklinde işler (Bkz. "*Decoding the Antykythera Mechanism: Investigation of an Ancient Astronomical Calculator*", *S. 20, "The Sidereal Month"*. Ayrıca mekanizmadaki çarkların pozisyonları ve işleyişleri hakkında "*Decoding the ancient Greek astronomical calculator known as the Antykythera mechanism*"deki S. 12'ye bakabilirsiniz).

Oysa Antikitera mekanizmasındaki bu oran (1.5)'ten $\frac{42-\frac{42}{\pi}}{\pi}\cong\frac{235}{19}\Rightarrow\frac{42}{\pi}\cong\frac{235}{19}$ yaklaşımına göre $\frac{42}{\pi}$ demektir. Bu yaklaşımdaki $\pi\cong 3\frac{18}{127}$'dir. Yani Eski Yunanlılar, Saros döngüsündeki hesaplarda hayatlarını adadıkları π'nin rol oynadığını bir türlü görememişler!

THALES'in Bildirdiği Tam Güneş Tutulması

Geç Babilonya Metinleri (LBAT) için *"Saros Cycle Dates and Related Babylonian Astronomical Texts"* kitabının *"II. Saros Cycle Texts (Saros Çevrimi Metinleri)"*nin 5. sayfasında görüldüğü üzere aşağıdaki (1.8)'deki her bir Saros'ta $2 \times 19 = 38$ tane Güneş tutulması tarihi verilir. M.Ö. 750-100'de şiddeti en az 0.9 olan Güneş tutulmalarının en başına ***THALES*'in bildirdiği M.Ö. 28 Mayıs 585'deki tam Güneş tutulması** yerleştirilmiştir. ***HERODOT***, ***THALES***'in bildirdiği bu Tam Güneş Tutulması'nı şöyle anlatır:

*"74. - **Kyaxares** bunları geri istedi, ama **Alyattes** vermedi. Bu yüzden Lydialılar ile Medler arasında 5 yıl süren bir savaş çıktı, sık sık Medler Lydialıları dövdüler, sık sık da onlar tarafından dövüldüler. Hele bir seferinde tuhaf bir gece savaşına da tutuştular; savaş denk koşullar altında sürüyordu ki, 6. yılda, bir çarpışma sırasında ve ortalığın en çok karışmış olduğu bir anda gündüz, birden yerini karanlığa bıraktı. Bu ışık tutulmasını **Miletoslu Thales**, İonialılara daha önceden bildirmişti; yılına, gününe kadar. Ama Lydialılar ve Medler gün ortasında gece olduğunu görünce, çarpışmayı kestiler ve hemen bir anlaşma, bir barış sözleşmesi yaptılar. **Kilikialı Syennesis** ve **Babilli Labynetos**'u kendilerine aracı seçtiler. Bunlar, barış yeminleri getirip götürmektense, iki kralı bir araya getirecek bir evlenme tezgahladılar; **Alyattes**, kızı **Aryenis**'i **Kyaxares**'in oğluna, **Astyages**'e versin, dediler; zira bağ sağlam olmazsa uzlaşma dayanıksız olur. -Bu halklarda yemin Yunanlılarda olduğu gibidir, ayrıca bir de kollarının derisini çizip karşılıklı kanlarını yalarlar.", Tarih/1. Kitap: KLIO/74. Parça.*

Fakat NASA, bu tam Güneş tutulmasını SAROS 57 serisinde M.Ö. 28 Mayıs 584'e tarihler. Ben bu tutulmanın nasıl gerçekleşmiş olduğunu Starry Night Pro Plus 6.0 programında baktım ve İstanbul'dan bile gözlemlenebildiğini gördüm!

kesirlerinden görüldüğü gibi $\frac{136}{11}$ kesrinin, dolayısıyla ***ARŞİMET***'in $\pi = 3\frac{1}{7}$ değerinin listeye giremediğini görürüz. Yani (1.5)'e göre (1) için ***ARŞİMET***'inkinden çok daha hassas (ki bu, düzgün 360-gen ya da bunun civarındaki düzgün çokgenler demektir) π değerine ihtiyaç vardır.

4.9. *PTOLEMY*'nin Çevrimi

Bu çevrim **"Babil Çevrimi"** olarak da bilinir. Çünkü ***PTOLEMY*** bu çevrim hakkında Yeni Babil Dönemi belgelerini, özellikle Ay ile ilgili gözlem ve tutulma tablolarını incelemiş (bkz. "*Nabonassar*") ve kendisi de Ay ile ilgili gözlemler yaparak bunları tablolar halinde düzenlemiş ve bu çevrimin doğruluğunu kontrol edip daha iyi bir çevrime ulaşmak istemiştir. Bunun böyle olduğunu bizzat 1515 tarihli (ki ***GUTENBERG*** tarafından basılan ilk kitap İNCİL'den 59 yıl sonra) Latince olarak basılan "*ALMAGESTUM*" kitabının 36. sayfasının kenarlarındaki boşluklara notlar çıkartan biri tarafından (muhtemelen bir astronom) öğreniyoruz. Elbette ***GALILEI GALILEO*** Latince'yi anadili gibi konuşan ve bu tür kitaplara eğilimli biri olarak bilinir; ama bu notları çıkartan kişi de en az onun kadar ehil biridir. Şimdilik bu gizemli kişinin ismini çıkartamadım ama ben, bu kişiyi ***DIOFANT***'ın **"Arithmetica"** kitabındaki sayfa boşluklarını değerlendiren ünlü Fransız matematikçisi ***PIERRE DE FERMAT***'a benzetiyorum. Aslında benzetmeye de gerek yok; çünkü bu durum o dönemde bir gelenek halini almıştı. Sözkonusu bu kişi de 36. sayfanın sağ tarafındaki boşluğu kullanarak ***PTOLEMY***'nin çevrimi hakkında bazı notlar ve sonuçlar çıkartmış. Ona göre ***PTOLEMY***'nin çevrimi, (1.1)'deki Babil çevrimindeki gibi, şöyledir:

$$(1.7)\quad 1\frac{\text{GY}}{\text{SA}} = \frac{223 \times 6{,}5;15{,}33{,}20}{18 \times 6{,}5;15{,}33{,}20 + 10;40}.$$

PTOLEMY bu formülde 1 yılı $6{,}5;15{,}33{,}20 = 365\frac{1}{4}\frac{1}{108}\left(= 365\frac{7}{27}\right)$ gün olarak alır (ki burada inanması güç ama Antik Yunan belgelerinde $365\frac{1}{4}\frac{1}{76}\left(= 365\frac{5}{19}\right)$ değerinin kullanıldığından söz edilir. Bu sonuçlar 1 yıl için ***JÜL SEZAR*** dönemindeki gibi $365\frac{1}{4}$ gün olmasıyla yetinilmediği, biraz daha hassas hesaplamalar yapıldığını gösterir). Çünkü bunun için sayfa kenarında $6585\frac{1}{3}(= 6585;20)$ kaydı vardır. Bu değer Babil çevriminde de geçen,

$$(1.8)\quad 1\ \text{Saros} = 223\ \text{Sinodik Ay} = 6585;20\ \text{Gün}$$

eşitliklerinden elde edilir. Gerçi bu kaydı koyan kişi, 1 yıl için $365\frac{1}{4}$ değerini yazmıştır ama bu değer sadece bir yaklaşıktır.

Son paragrafta not çıkartan kişi, $365\frac{1}{4}$'ün 126007'ye bölümünden elde edilen sonucun tam kısmının 344 olduğundan bahsetmiş. Bu çıkarım,

$$(1.9)\quad \frac{126007}{365\frac{1}{4}\frac{1}{108}} = 344.9796187$$

sonucundan elde edilmiştir. Fakat o, bu işlemde 1 yılı $365\frac{1}{4}$ gün olarak alır. Tabii ki 1 yıl bu şekilde ele alındığında, bu işlemin sonucu 345'e biraz daha yaklaşır.

Demek ki bu çıkarımı yapan kişi, bu işlemin sonucunun tam kısmının 344 olduğunu belirterek 345'e yaklaştığını, yani 345 yıla yaklaştığını dikkat çekmek istemiştir!

Not 4.1. Buradaki EK 1 ***"Mısır Π'si ya da Rhind Matematik Papirüsü'ndeki Π Hakkında"*** adlı A3 formatındaki 44 sayfalık çalışmamın Bölüm 2'sinden ve EK 2 de EK 1'inden alınmadır!

Derya PAMUKTULUM

İTHAF: APOLLO 11'İN AY'A İNİŞİNİN 50. YILDÖNÜMÜ

Resim 4.5. Albay ***KAY BRUBAKER (JAMES BROLIN), PETER WILLIS (SAM WATERSTON)*** ve ***JOHN WALKER (O. J. SIMPSON)*** çölde kaçarlarken, *CAPRICORN ONE (US/UK 1978) SAM WATERSTON, JAMES BROLIN, O.J. Simpson*. Bana göre ***O. J. SIMPSON***, yukarıda görüldüğü üzere, "*Capricorn One*"da hayatının koşusunu yaptı!

Bugüne kadar APOLLO 11'in Ay'a inişi hakkında çok şey yazıldı, çizildi. Özellikle yukarıdaki film 1977'de vizyona sürüldüğü anda kafalarda çok soru işareti oluştu. Filmde Mars'a yolculuk hazırlığındaki 3 astronotun, beklenmedik bir teknik sorunun çıkması üzerine görevi iptal olur. Fakat, başarısına gölge düşürmek istemeyen NASA, stüdyoda sanal bir Mars yolculuğu başlatır… Uzay teknolojilerine ve NASA'ya dair üretilen komplo teorilerinin en çarpıcısından yola çıkılarak gerçekleştirilen yapım, son derece dikkat çekici bir klasik olarak kabul ediliyor (**Y.N.** Komplo teorileri APOLLO 11 için 1970'lerin başında üretilmeye başlanmıştı. Bkz. "*Apollo 11 astronaut Buzz Aldrin recalls first moments on the moon on 50th anniversary of mission*" haberindeki videonun 0:45'ine). Günümüzde de küçük bir grup tarafından savunulan, aslında uzaya gidilmedi teorisi üzerine sıradışı bir uzay filmi olmakla birlikte, filmin gösteriminden bu yana 43 yıl geçmesine rağmen Mars'a yolculuk halen bir hayal olarak kaldı!

Bu arada şu anımı anlatmazsam olmaz:

*"Hiç unutamadığım değil ama … Lisesi'nde çalışırken 2004'te bir sınıfımda mezun olan öğrenciler; gömleklerine, kolu kırık olan alçı kaplamasının üzerine, kravatlara ve artık ne buldularsa, onların üzerine benden o sırada revaçta olan ATA formülünü yazarak imza atmamı istediler ve ben de onları kıramadım. Bu sırada gaza gelmiş olacağım ki bir NASA çalışanının bana konuyla ilgili bir e-posta göndermiş olduğunu ağzımdan kaçırıverdim. Sen misin bunu söyleyen, Öğretmenler Odası'nda hemen bunun dedikodusunu yapmışlar ve birkaç art niyetlinin gazına gelip inanmamışlar! Bu olayı çok sonra öğrencilerimden duyunca sadece gülüp geçtim. Ama olay doğru idi. Çünkü **"The Math Forum"**daki 4. mesajımı yazdıktan birkaç gün sonra NASA'da çalışan biri bana e-posta yollayarak orada referans olarak geçen **WENNINGER**'in dörtgenler hakkındaki topolojik çalışmasının elimde olup olmadığını soruyordu (ki 4. mesajımdaki 1. Triangles/3 no'lu formüle 29 Ekim 2003'te **'ATA Formülü'** adını vermiştim). O sırada http://mathworld.wolfram.com sitesi kapalı idi ve ben de ona daha önceden MathWorld'ten Word'e attığım (14.9.2000, 00:38) "**Quadrilateral from Wolfram MathWorld**" çalışmasını gönderdim (ki elimdeki **"Poligonlar"** klasörünün altındaki **"5_2 Quadrilaterals, 11.5.2001, 20:45"** web dosyasından MathWorld'ün bu tarihlerde açılmış olduğunu görüyorum). Kendisi bana teşekkür etti, o kadar. Bu kadar önemli olacağını bilseydim, o e-postayı Superonline'dan alıp saklardım!*

*Şimdi biraz hafızamı zorladığımda o e-posta hakkında aklıma gelen şeyler şunlardır: e-postada **WENNINGER**'in 4-genlerin topolojik türleriyle ilgili referansından bahsediliyor ve benden ne istendiğine dair metne odaklanmıştım. Sonra bana e-postayı gönderenin ismi ve sayfanın altındaki NASA'nın logosu dikkatimi çekmişti. Adamın soyadı Almanca idi ve ben, 'Alman mı?' demiştim. Kendisi herhalde mühendis idi!*

*Bununla birlikte, öğrencilere **WENNINGER**'in referansını isteyen NASA çalışanının 4. mesajımdaki 3-gen ve 4-gen formüllerimi görmüş olduğundan ilgisi çekmiş olabileceğinden bahsetmiştim (ki muhtemelen Geometri'de uzman biri olduğumu düşünmüş olmalı ve o yüzden o referansı istemişti, bilemiyorum artık. Oysa amacım, orada bir tartışma başlatarak çokgenlerin alanları hakkında uzmanlaşmak istiyordum). Ama onlar buna 1'e 1000 katıp öğretmenlere anlatmışlarsa benim yapabileceğim bir şey yok!"*

Şimdi 2004'te bana inanmayanlara şunu kanıt olarak göstersem acaba utanırlar mı?

MSC INTERNAL TECHNICAL NOTE
ROMBERG INTEGRATION
By
Matthew J. O'Malley
May 1968

Kaynak. "*Theoretical method of numerical integration of definite integral*".

EK 3: *HERON*'un "METRICA"sında π İçin Verilen Sınırların Deşifrasyonu Hakkında

23.10.2019, 02:00.

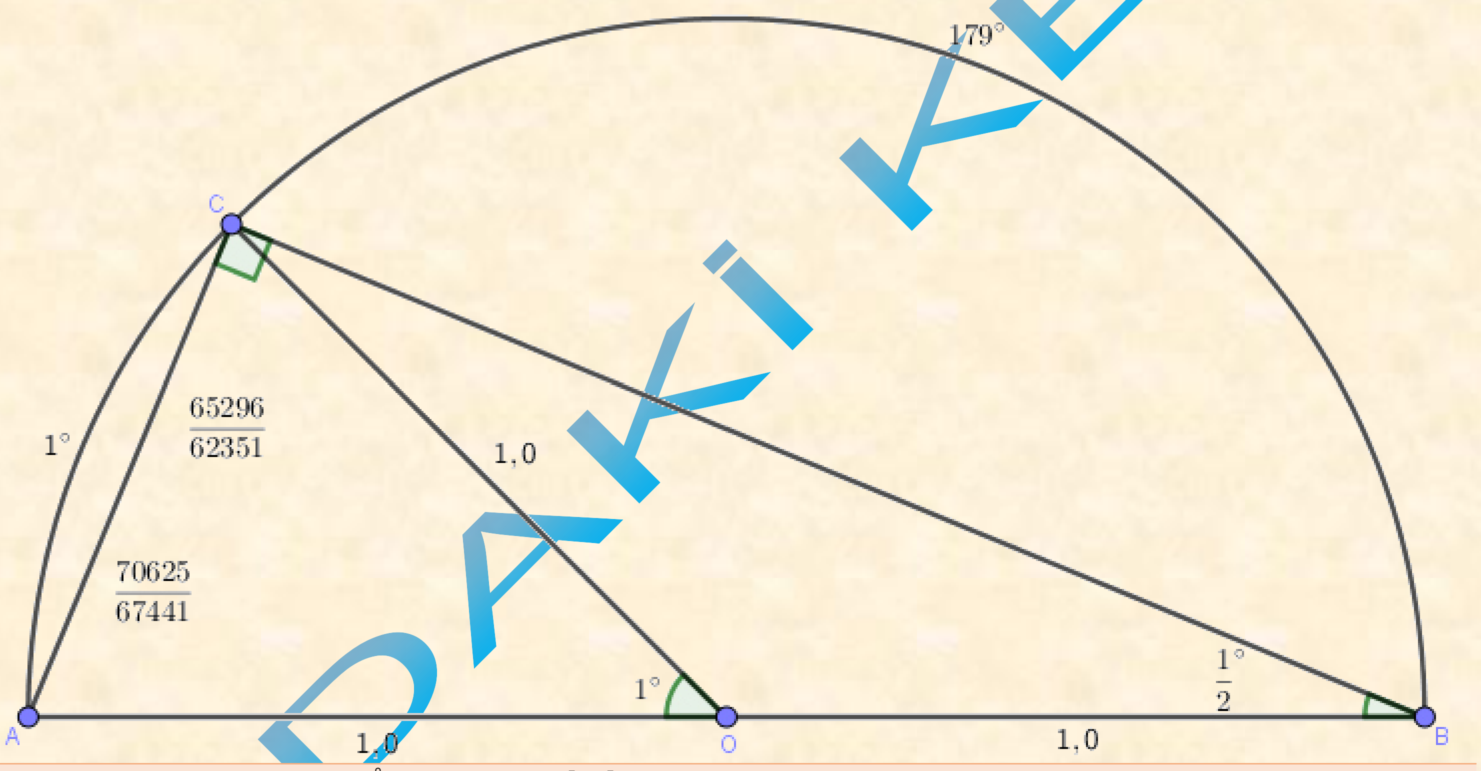
Öncelikle ***HERON***'un π için verdiği kesirleri

$$(4.68)\quad \begin{cases} \frac{1}{6}\cdot\frac{211875}{67441}=\frac{70625}{134882}, \\ \frac{1}{6}\cdot\frac{195888}{62351}=\frac{65296}{124702} \end{cases}$$

şeklinde alırsak, bunlar sırasıyla $60.\mathrm{Sin}\frac{1}{2}$ ve $60.\mathrm{Tan}\frac{1}{2}$'ye yaklaşık olurlar. Burada kırmızı renkle yazılan "5" rakamı hatalı olan "7"nin düzeltilmiş şeklidir (ki tüm yorumcuların ittifakla kabul ettikleri görüş budur). Bana göre, kâtip bu rakamı yazarken dalgınlıkla hata yapmıştır ve doğrusu şudur: μ$^{\iota\theta}$, ζωπη: 195888. Bu hatanın tam da virgülden sonraki ilk rakamda yani 10,000'ler basamağına geçilirken yapılmış olduğuna dikkat ediniz. Ayrıca bu durumda kesirlerin paylarının 3'e tam bölündüklerine dikkat ediniz!

Bilindiği gibi ***PTOLEMÆUS***'un ***ANTONINUS PIUS (138-161)*** ([24]) zamanında yazdığı "*ALMAGESTUM*" adlı kitabı Latince'ye ilk kez matbaanın icadından sonra basılan ilk kitap olan İNCİL'den tam 59 yıl sonra ilk klasik eser olarak basıldı (Bkz. "*The Almagest*"). Viyana Üniversitesi'nin Astronomi Bölümü, üniversitenin kuruluşunun 250. Yıldönümü nedeniyle bu kitabı dijital olarak yayına sundu. Bu kitabın 5. Folyonun sol tarafındaki (Dictio) (PDF'de 16. Sayfa) boşlukta yarım bir çember üzerinde 36° ve 144°'lik yay ölçülerine ait kirişlerin uzunlukları verilir.

Şimdi bu şekli 1° ve 179°'lik yay ölçülerine ait kirişlerin uzunlukları için çizersek ***HERON***'un (4.1)'deki kesirlerinin 1°'lik yay ölçüsüne karşılık gelen [AC] kirişinin uzunluğu için verilmiş olduklarını şöyle görürüz:



Şekil 4.1. ***HERON***'un kesirlerinin 1°'ye karşılık gelen [AC] kirişinin uzunluğunda gösterimi.

Çünkü ABC dik üçgenin tepe açısı $\frac{1}{2}^{\circ}$ olduğundan [AB] çapı nedeniyle (4.68)'deki kesirlerin 2 katı alınmıştır ve böylece ***HERON***'un π için (4.1)'de verdiği kesirler tam bir anlam kazanmıştır. Yani ***HERON***'un, ***"METRICA"***'da verdiği bu kesirler, şimdi kayıp olan ***Arşimet***'in ***"On Plinthides and Cylinders (Prizmalar ve Silindirler Hakkında)"*** çalışmasında geçen kesirler değil, tastamam 1°'lik yay ölçüsüne karşılık gelen [AC] kirişinin uzunlukları için verilmiştir.

Yani bunun için

$$(4.69)\quad \begin{cases} \frac{70625}{67441}=1;2,49,57,42,\cdots \\ 120\mathrm{Sin}\frac{1}{2}=1;2,49,51,48,\cdots \\ \frac{65296}{62351}=1;2,50,2,14,\cdots \\ 120\mathrm{Tan}\frac{1}{2}=1;2,50,0,24,\cdots \end{cases}$$

karşılaştırmasını yaparsak her şey netleşmiş olur. Çünkü kırmızı renkli rakamlar doğru basamakları gösterir ve bu durumda ***HERON***'un ***"METRICA"***sındaki kesirlerinin mahiyeti de böylelikle anlaşılmış olmaktadır. Fakat ***HERON***'un kesirleri ile ***PTOLEMÆUS***'un 1°'lik yay ölçüsüne karşılık gelen kiriş uzunluğu için verdiği 1;2,50'yi karşılaştırırsak (bkz. "*ALMAGESTUM*", S. 7, PDF'de 19. Sayfa) üst sınırda ***PTOLEMÆUS***'unkinin daha iyi olduğunu görürüz. Ancak ***PTOLEMÆUS***'da 1°'lik yay ölçüsüne karşılık gelen kiriş uzunluğu için alt sınır ($120\mathrm{Sin}\frac{1}{2}$) ve üst sınır ($120\mathrm{Tan}\frac{1}{2}$) kavramı yoktur. ***HERON***'da ise var ama alt sınırda sınır biraz aşılmıştır. Dolayısıyla ***PTOLEMÆUS***, [AC] kirişinin uzunluğunu 1;2,50 olarak verirken farkında olmadan üst sınırı vermiştir; ama mükemmel bir yaklaşımda bulunmuştur. Çünkü (4.69)'daki üst sınırın 3. altmışlığı 0'dır.

([24]) Roma kralı ***ANTONINUS PIUS***, **"5 İyi İmparator"**un 4.'sü idi. Fakat ben İtalyanlar'ın bu görüşüne katılmıyorum. Çünkü bu iyi İmparatorlar'ın hepsi babadan oğula şeklinde değil, İmparatorluğu yönetebilecek evlat edinilmiş kişiler olduğuna göre, bu geleneği ilk başlatan kişinin ***SEZAR*** olması gerekir. Çünkü ***AUGUSTUS***, "***GAIUS OCTAVIUS THURINUS***" olarak doğdu ve M.Ö. 44'te ***SEZAR*** tarafından evlatlık edindikten sonra (ki ***BRUTUS*** de evlatlığı olarak bilinir) "***GAIUS JULLIUS CEASAR OCTAVIUS***" adını aldı. M.Ö. 46'da ***SEZAR***'ın Senato'da katledilmesinden sonra Roma'da İç Savaş başladı ve bu savaştan galip çıktıktan sonra M.Ö. 27-M.S. 14'te hüküm sürdü (ki kendisine **"İlk Roma İmparatoru"** denir). Yani ***AUGUSTUS***, 5 İyi İmparator'daki tüm şartları yerine getirdiğine göre, İtalyanlar neden böyle bir sınıflamaya gerek duydular?

Bu durumu şuradan da anlayabiliriz: Eğer ABC dik üçgeninde [AC] kirişinin uzunluğunu hesaplamak istersek, ***PTOLEMÆUS***, şekildeki 179°'lik yay ölçüsüne karşılık gelen [BC] kirişinin uzunluğu için

$$(4.70)\quad \sqrt{2{,}0^2 - 1;2{,}50^2} = 119;59{,}43{,}32{,}58,\cdots$$

sonucu yerine 119;59,44 vermiştir (Bkz. "*ALMAGESTUM*", S. 8, PDF'de 22. Sayfa).

Eğer bu hesabı (4.69)'dakiler için de yaparsak şu sonuçları elde ederiz:

$$(4.71)\quad \begin{cases} \sqrt{2{,}0^2 - \left(\dfrac{70625}{67441}\right)^2} = 119;59{,}43{,}32{,}59,\cdots \\ \sqrt{2{,}0^2 - \left(120\mathrm{Sin}\dfrac{1}{2}\right)^2} = 119;59{,}43{,}33{,}2,\cdots \\ \sqrt{2{,}0^2 - \left(\dfrac{65296}{62351}\right)^2} = 119;59{,}43{,}32{,}57,\cdots \\ \sqrt{2{,}0^2 - \left(120\mathrm{Tan}\dfrac{1}{2}\right)^2} = 119;59{,}43{,}32{,}58,\cdots \end{cases}$$

Fakat buradaki yaklaşımlar (4.69)'a göre daha iyidir ve ***PTOLEMÆUS***'un 119;59,44 değeri ise bunlardan daha kötü gözükür!

Şimdi yukarıdaki bulgularıma göre şu sonucu verebilirim:

Sonuç 4.2. Yukarıdaki keşif çalışmama göre ***HERON***'un ***METRICA***'sındaki $\frac{211875}{67441}$ ve $\frac{195888}{62351}$ kesirleri öyle iddia edildiği gibi ***Arşimet***'in kayıp ***"On Plinthides and Cylinders (Prizmalar ve Silindirler Hakkında)"*** çalışmasındaki kesirler değil, ***PTOLEMÆUS***'un Kirişler Tablosu'ndaki 1°'lik yay ölçüsüne karşılık gelen kiriş uzunluğu için verilmiş yaklaşımlardır.

Bu konuda ***HERON***, şunları söyler:

Yunancası: *"κς. Ἀρχιμήδης μὲν οὖν ἐν τῇ τοῦ κύκλου μετρήσει c. 2 t. I p. 262 Heib.) δείκνυσιν, ὅτι ια τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου ἴσα γίγνεται ὡς ἔγγιστα ιδ κύκλοις· ὥστε ἐὰν δοθῇ ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου εἰ τύχοι μονάδων ι, δεήσει τὰ ι ἐφ' ἑαυτὰ ποιῆσαι· γίγνονται ρ·"*, *METRICA I-26-5*.

Türkçesi: *"Aynı **ARŞİMET "On Plinthides and Cylinders (Prizmalar ve Silindirler Hakkında)"**daki yazılarında, her dairenin çevresinin çapa oranının 211875:67441'den büyük ama 197888:62351'den daha küçük olduğunu gösterir. Ancak bu kesirler ölçümler için uygun olmadığından, en küçüğü olan 22:7 oranına düşürülür"*, ***HERONIS ALEXANDRINI, Opera Qvae Svpersvnt Omnia, S. 66-67.***

Çok ilginçtir, ***E. M. BRUINS***, ***HERON***'un ***ARŞİMET***'in verdiğini iddia ettiği bu kesirlerin "*CODEX CONSTANTINOPOLITANUS*"taki Folyo 81r'nin 10-11 ve 18-19. Satırlarında 2 kez tekrarlandığını söyler. 19. Satırın altındaki karalama ise bir başka kâtip tarafından yapılmıştır.

HERON ya da daha çok onun adına konuşan kişi, yukarıdaki sözlerle neyi iddia ediyor, biliyor musunuz?

ARŞİMET'in Çokgenleri		PTOLEMÆUS'un Çokgenleri	
n	$\alpha = \frac{360^{\circ}}{n}$	n	$\beta = \frac{360^{\circ}}{n}$
6	$\frac{360^{\circ}}{6} = 60^{\circ}$	$5\frac{5}{8}$	$\frac{360^{\circ}}{5.625} = 64^{\circ}$
12	$\frac{360^{\circ}}{12} = 30^{\circ}$	$11\frac{1}{4}$	$\frac{360^{\circ}}{11.25} = 32^{\circ}$
24	$\frac{360^{\circ}}{24} = 15^{\circ}$	$22\frac{1}{2}$	$\frac{360^{\circ}}{22.5} = 16^{\circ}$
48	$\frac{360^{\circ}}{48} = 7.5^{\circ}$	45	$\frac{360^{\circ}}{45} = 8^{\circ}$
96	$\frac{360^{\circ}}{96} = 3.75^{\circ}$	90	$\frac{360^{\circ}}{90} = 4^{\circ}$
192	$\frac{360^{\circ}}{192} = 1.875^{\circ}$	180	$\frac{360^{\circ}}{180} = 2^{\circ}$
384	$\frac{360^{\circ}}{384} = 0.9375^{\circ}$	360	$\frac{360^{\circ}}{360} = 1^{\circ}$
768	$\frac{360^{\circ}}{768} = 0.46875^{\circ}$	720	$\frac{360^{\circ}}{720} = \frac{1}{2}^{\circ}$
1536	…		

Tablo 4.2. ***ARŞİMET***, M.Ö. 3. yy.'da bir çemberin içine ve dışına düzgün 6-genler çizerek başladığı hesabı düzgün 96-genlerde sonlandırdı. Oysa ***HERON***, ***ARŞİMET***'in bu hesabı düzgün 96-genlerde bırakmadığını ve onu düzgün 768-genlere (ki bu hiç mümkün değil), hatta düzgün 1536-genlere kadar taşımış (ki 4.7.1'de bunun da mümkün olmadığını gördük) olduğunu söyler. Tablonun 2. sütununda ise ***PTOLEMY***'nin trigonometrik tabloyu kullanarak düzgün çokgenlerin kenarlarının sayılarını önemsemediğini görüyoruz. Çünkü ***PTOLEMY*** bu alanda gerçek bir devrim yapmıştı!

Bu tabloya göre ***ARŞİMET***, bir çemberin içine ve dışına düzgün 96-genlerin çevreleriyle

$$(4.72)\quad 3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

çifte eşitsizliğini verdikten sonra bunlarla yetinmemiş; düzgün 768-genlerin çevreleriyle

$$(4.73)\quad \frac{211875}{67441} < \pi < \frac{195888}{62351}$$

çifte eşitsizliğini vererek daha da geliştirmiştir. Fakat yukarıda gördük ki gerek ***HEIBERG*** ve ***TANNERY***'nin tahminlerinde, gerekse araştırma sonuçlarımdan çıkan sonuca göre (bkz. 4.7) bu hesap için en az 1536-genler gerekmektedir. Ancak onlar, bunun yukarıda tabloda görüldüğü gibi 8. satırdaki 768-genlerdeki merkez açıların yakın olmasına güvenirler. Oysa bu mümkün değildir. Çünkü bunun için en az 1536-genler gerekiyor. Oysa gerçekte ***HERON***'un kesirleri $n = 720$-genlerle Şekil 4.1'e tam otururlar ve $n = 1440$-genlerde ise işin rengi değişir!

4.10. *PTOLEMÆUS*'un Devrimi: Trigonometrik Tablo

Her şeyden önce ***PTOLEMÆUS***'un "**Kirişler Tablosu**" ya da günümüzdeki adıyla söyleyecek olursak "**Trigonometrik Tablo**" ile büyük bir devrim yaptığını unutmamız gerekiyor. Çünkü ***PTOLEMÆUS***'tan önce düzgün çokgenlerin çevreleriyle böyle bir hesabın yapılması mümkün değildi! Vallahi çok basit. Çünkü 720'yi asal çarpanlarına ayırırsak $720 = 2^4.3^2.5$ olur ve bunun için açıyı 3'e bölmeniz gerekir. Bu ise ***PTOLEMÆUS***'tan önce mümkün değildi. Çünkü kübü 2 kat kılmak, açıyı 3'e bölmek, dairenin alanına eşit kare çizmek vb. gibi problemler çözümsüz idiler. Neden? Çünkü bu problemlerin çözümleri irrasyonel sayılara dayanıyor, dolayısıyla bunlar yalnız cetvel-pergel kullanılarak belirlenemiyordu! Öyle ki RİK 2'deki Tablo 2.3'ten görüldüğü üzere 16-17. Avrupası'nda bile bu tür hesaplar yapılamıyordu!

Yani öyle görünüyor ki ***HERON***'a atfedilen (4.68)'deki kesirler ***PTOLEMÆUS***'tan çok sonra verilmiştir. Çünkü ***PTOLEMÆUS (100-175)***, "*ALMAGESTUM*" adlı eserini olgunluk çağında, yani 50 yaşında yazmıştır. Buna ek olarak Müslüman matematikçiler, günümüzde "**HERON Formülü**" olarak bilinen bir üçgenin alanına ait formülün ***ARŞİMET***'e ait olduğu söylerler. Onlar, buna kanıt olarak ***ARŞİMET***'in "**Kırık Kiriş Metodu**"nu verirler. Çünkü aynı formül bu metotla da ispatlanabilinmektedir. Bu durumda ***HERON***'a ait olduğu iddia edilen çalışmaların büyük bir kısmı ***ÖKLİT***'in "**Elemanlar**"ındaki gibi kendisinden çok sonra toplanmış gözükür. Ama ***HERON***'daki bu son gelişme bize "**ARŞİMET Efsanesi**"nin bir gerçek olduğunu gösteriyor. Yani ***ARŞİMET***'in, adına toplanılan "*Çember Ölçümü Hakkında*" risalesindeki Önerme 3'te π'ye alttan ve üstten yaklaştığı açıktır, ama bu yaklaşımlar ***EUTOKIOS***'un bildirdiği gibi miydi, yoksa farklı mıydılar; bu ayrı bir tartışma konusudur. Ben, ***EUTOKIOS***'un yorumladığı bu çalışmada π için verilen $3\frac{1}{7}$ üst sınır kesrinin ve buna erişilmesindeki tüm hesapların orijinal yani ***ARŞİMET***'ten geldiğine inanıyorum. Fakat aynı şeyleri π'nin alt sınırı olarak verilen $3\frac{10}{71}$ için söyleyemem. Çünkü bunda ***ARŞİMET***'ten çok sonra ortaya çıkan yeni davranışlar var. Fakat uzman olmayan gözlerin bu farkları anlaması mümkün değildir. İşte bu nedenle Antik Metinler üzerinde çalışırken çok dikkatli olunmalıdır. Çünkü o sıralarda yazılan metinler şimdiki gibi atıf ya da kaynakça gösterilmeden ve devamlı derlemeler yoluyla yazılıyordu. Misal: İlk kez 31.02.2002'de yayımladığım "*Çember Ölçümü Hakkında*" çalışmasında hesaplara hiç dokunmadan modern bir yorum yapmıştım ve bu son ama modern bir derleme idi. Yani bundan önceki versiyonları bilmeyen kişi, buna bakıp aldanabilir. Ben, şimdilik ***TOM HOLLAND*** gibi *"Bu kadarını ima edeyim de başıma bir şey gelmesin!"* diyorum (Bkz. "*Kuran Mekke'ye ait olamaz!*").

Çok ilginçtir, bu keşfi yaparken aklıma ilk olarak HUCURAT 6 yarım yamalak geldi ve oradaki "fasık"ın geniş anlamda kullanılmış olabileceğini düşünüyordum!

Ayet şöyle: *"Ey iman edenler! Eğer bir fasık size bir haber getirirse onun doğruluğunu araştırın. Yoksa bilmeden bir topluluğa kötülük edersiniz. Sonra yaptığınıza pişman olursunuz."*

Bu ayetteki "fasık"ın tanımlarını araştırdım ve Arapça'da düşündüğüme en yakını olan anlamının "kötülük düşünen" olduğunu gördüm. Ama ***NİHAT HATİPOĞLU***, "*Bir fasık (şarlatan) haber getirirse…*" ve "*Bir fasık haber getirirse*" makaleleriyle tam da düşündüğümü söylediğini ve bu ayeti şöyle yorumladığını gördüm: *"Ey iman edenler. Eğer bir fasık (yalan haber taşıyan) size bir haber getirirse onun aslını araştırın. Yoksa bilmeden bir topluluğa sataşırsınız da yaptığınıza pişman olursunuz."*

O, bu makalelerin ilkinde genele ve ikincisinde medya şarlatanlarına sesleniyor. Yani fasık temelde *"Allah'ın emirlerine karşı gelen kimse"* dini anlamından çok, günlük anlamda *"yalan haber taşıyan, şarlatan"* gibi daha çok kullanılıyormuş. Bu nedenle *"acaba ben mi bir hata yapıyorum?"* diye kendimi kontrol ettim ve bu konudaki bulgularımı ve düşüncelerimi 2016-2017'deki EK 1'de vermiştim zaten. Ama şimdi, EK 3'teki bulgularımın çok sağlam olduğunu ve bunun tersini düşünmemin mümkün olmadığını görüyorum. İşin ilginç yanı şu ki, ***Sör THOMAS L. HEAT***, "*A History of Grek Mathematics, Vol. I/Approximations to the value of π*"nin 232-233. sayfalarında ***HERON***'un kesirleri verdikten sonra hemen altındaki paragrafta ***PTOLEMÆUS***'un, 3;8,30 değerini nasıl bulmuş olduğunu anlatır. Fakat ne onun ne de bir başkasının, yani kimsenin aklından ***HERON***'un kesirlerinin ***PTOLEMÆUS***'un 3;8,30 değerini bulmasındaki gibi ama biraz daha spesifik olarak kullanılmış olduğu geçmemiş. Yani ben de şaştım kaldım bu işe!

Derya PAMUKTULUM