

1.1. Trapez ve Orta Nokta Yaklaşıklıklarının Genel Formülleri. Genel olarak $\forall p \in \mathbb{N}$ için $q|p$ ya da $q = 1, \dots, p$ bölenlerine göre aralığın $h = b - a$ boyu için

$$(1.1) \quad T_q = h \sum_{k=0}^{q-1} f_{\frac{p}{q}k} = \frac{h}{q} \sum_{k=0}^{q-1} f_{\frac{p}{q}k}, U_q = h \sum_{k=0}^{q-1} f_{f_{\frac{p}{q}(k+\frac{1}{2})}} = \frac{h}{q} \sum_{k=0}^{q-1} f_{\frac{p}{q}(k+\frac{1}{2})}$$

şeklinde T_q trapez formülü ve U_q orta nokta formülü vardır (Bkz. “4. Piobert-Parmentier Metodu'nun Q Üzerine Genişletilmesi”, S. I, (2.1). Bu, (1.1)'in geliştirilmiş en son şeklidir). Bu formüller **Werner Romberg**'in 1955 tarihli “*Vereinfachte numerische Integration (Basitleştirilmiş Sayısal İntegral)*”¹ tezinde kullandığı formüllerin genel şeklidir. **Romberg** bu formülleri tezinde $p = 8$ 'in $q = 1, 2, 4, 8$ bölenlerine göre yalnızca ana hatlarıyla verdi (ki anlaşmalı notasyon kullanımından dolayı hemen terk edildi ve günümüzde bu formüllerin modifikasyonları kullanılmaktadır. Bkz. (1.14)) ve bu örneği $p = 16$ 'nın bölenlerinin sayısı $v(16) = v(2^4) = 4 + 1 = 5$ olduğundan $q = 1, 2, 4, 8, 16$ bölenlerine göre $T_1, T_2, T_4, T_8, T_{16}$ trapez ve $U_1, U_2, U_4, U_8, U_{16}$ orta nokta yaklaşıklıklarına genişletti. Bir sonraki örnekte $p = 12$ 'nin bölenlerinin sayısı da $v(12) = v(2^2 \cdot 3) = (2 + 1)(1 + 1) = 3 \cdot 2 = 6$ olduğundan $q = 1, 2, 3, 4, 6, 12$ bölenlerine göre $T_1, T_2, T_3, T_4, T_6, T_{12}$ trapez ve $U_1, U_2, U_3, U_4, U_6, U_{12}$ orta nokta yaklaşıklıklarını verdi. Fakat **Romberg** bu formüllerin $2 < a$ asalı için $p = a^n$ 'nin $v(a^n) = n + 1$ bölenlerinin sayısına göre trapez ve orta nokta yaklaşıklıkları için kullanılabileceğini tahmin edemedi (Bkz. “Romberg İntegrali 2016-2019”, 2018). Çünkü elinde böyle bir ekstrapolasyon yoktu!

Şimdi **Romberg**'in bu formüllerini günümüzdeki şekle dönüştürürsem şu sonuçlar çıkar: Eğer (1.1)'deki toplamlardaki fonksiyonlarda

$$(1.2) \quad f_{\frac{p}{q}k} = f\left(a + \frac{p}{q}k \cdot \frac{h}{p}\right) = f\left(a + k \cdot \frac{h}{q}\right) =: f_k, f_{\frac{p}{q}(k+\frac{1}{2})} = f\left(a + \frac{p}{q}\left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{h}{p}\right) = f\left(a + \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{h}{q}\right) =: f_{k+\frac{1}{2}}$$

dönüşümlerini kullanırsam (ki fonksiyonların bu şekildeki yazımı **Sheppard**'da da mevcuttur. Bkz. “W. F. Sheppard: Some quadrature formulas, Proc. London Math. Soc., 32, 1900, pp. 258-277”, S. 259, 268). **Sheppard** anlaşmalı notasyonlar kullanmıştır. Ona göre 259. sayfada $z_m = f(x_m) = f(x_0 + mh)$ ve 268. sayfada $z_{\frac{m}{2}}$ orta ordinatından eşit uzaklık uzaklıktaki (komşuluğundaki) ordinatlar $z_{\frac{m}{2}(1-\alpha)} = f\left(x_{\frac{m}{2}} - \frac{1}{2}mah\right)$ ve $z_{\frac{m}{2}(1+\alpha)} = f\left(x_{\frac{m}{2}} + \frac{1}{2}mah\right)$ 'dir) trapez ve orta nokta formüllerini

$$(1.3) \quad T_q = \frac{h}{q} \sum_{k=0}^{q-1} f_k, U_q = \frac{h}{q} \sum_{k=0}^{q-1} f_{k+\frac{1}{2}}$$

şeklinde günümüzdeki gibi yazmış olurum. Bu formüller Prof. **Byrnjulf Owren** (Norveç Bilim ve Teknoloji Üniversitesi) tarafından 2011 tarihli “*Werner Romberg: Vereinfachte numerische Integration*” tezinin 4. (dergide 152) sayfasında verildi. Ayrıca bu formülleri **Romberg**'in tezindeki formüllerinden nasıl elde edildiğini RİK 3'ün 5-10. sayfalarında yer alan “1.6. Romberg'in Orijinal Metodu”nda 3 dönüşümle vermiştim ama en kısa şekli bu oldu!

Romberg'e göre bu formüller için aritmetik ortalama şöyle mevcuttur (ki bunu 2018'de p-trapez yaklaşıklığı için genelleştirmiştim. Bkz. S. I, (2.3)):

$$(1.4) \quad T_{2q} = \frac{T_q + U_q}{2}.$$

1.2. Romberg'in Trapez ve Orta Nokta Yaklaşıklıkları. (1.1)'e göre $p = 8$ 'in $q = 1, 2, 4, 8$ bölenleri için T_q trapez formülü ve U_q orta nokta formülü şu şekilde olurlar:

$$(1.5) \quad \begin{aligned} T_1 &= h \sum_{k=0}^0 f_{8k} = h \sum_{k=0}^0 f_{8k} = hf_0, & U_1 &= h \sum_{k=0}^0 f_{8k+4} = h \sum_{k=0}^0 f_{8k+4} = hf_4, \\ T_2 &= h \sum_{k=0}^1 f_{4k} = \frac{h}{2} \sum_{k=0}^1 f_{4k} = \frac{h}{2} (f_0 + f_4), & U_2 &= h \sum_{k=0}^1 f_{4k+2} = \frac{h}{2} \sum_{k=0}^1 f_{4k+2} = \frac{h}{2} (f_2 + f_6), \\ T_4 &= h \sum_{k=0}^3 f_{2k} = \frac{h}{4} \sum_{k=0}^3 f_{2k} = \frac{h}{4} (f_0 + f_2 + f_4 + f_6), & U_4 &= h \sum_{k=0}^3 f_{2k+1} = \frac{h}{4} \sum_{k=0}^3 f_{2k+1} = \frac{h}{4} (f_1 + f_3 + f_5 + f_7), \\ T_8 &= h \sum_{k=0}^7 f_k = \frac{h}{8} \sum_{k=0}^7 f_k = \frac{h}{8} (f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7), & U_8 &= h \sum_{k=0}^7 f_{k+\frac{1}{2}} = \frac{h}{8} \sum_{k=0}^7 f_{k+\frac{1}{2}} = \frac{h}{8} \left(f_{\frac{1}{2}} + f_{\frac{3}{2}} + f_{\frac{5}{2}} + f_{\frac{7}{2}} + f_{\frac{9}{2}} + f_{\frac{11}{2}} + f_{\frac{13}{2}} + f_{\frac{15}{2}} \right). \end{aligned}$$

Bu yaklaşıklıklardaki h farkları için şuna dikkat etmek gerekir: Toplamların dışında $h = b - a$ iken fonksiyonların içlerinde $h = \frac{b-a}{8}$ yani $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \frac{11}{2}, \frac{13}{2}, \frac{15}{2}$ için $f_r = f\left(a + r \cdot \frac{h}{8}\right)$ 'dir. Yani bu yaklaşıklıkları h farklarına göre bu şekilde hesapladığınız zaman **Romberg**'in hesapladığı gibi hesaplamış olursunuz ki bunları nasıl deşifre ettiğimi RİK 3'teki S. 8-10'daki “1.6.1. Romberg'in Metodu'nun Deşifreyonu” ve RİK 4'teki S. 23-24'teki “1.2.1. Romberg Metodu Hakkındaki İlk Gözlemim” göstermiştim. Tek bir kusurum var (ki bu aslında bir hata değil **Romberg**'in uygulamasından elde edilen sonuçtur): (1.31) ve (1.42)'deki toplamların dışındaki kesirlerin paylarında 1 yerine $h = b - a$ yazılması gerekiyordu ama o yaklaşıklıkları f fonksiyonlarına göre çözerken **Romberg**'in örneğinde $h = 1 - 0 = 1$ idi ve bu hatayı şimdi (1.5)'te düzelttim!

¹ **Romberg**'in orijinal tezi “*Vereinfachte numerische Integration, Det Kongelige Norske Videnskabers Selskabs Forhandlinger, Bind 28, 1955, Nr. 7*” dedir. Araştırmalarıma göre bu tez 3 yerde geçiyordu (Bkz. “1.6.4. Romberg'in Orijinal Makalesi Peşinde!”, S. 12). Hepsisiyle temas kurdum ve Heidelberg Üniversitesi Kütüphanesi ile yazışmamda bana şunlar önerildi: “1. Kütüphanemize gelip makaleyi isteyebilirsiniz. Sonra PDF'de tarayabilirsiniz. 2. Almanya'da değilseniz, bir sonraki kütüphanenizden Uluslararası kütüphaneler arası ödünç verme talebinde bulunabilirsiniz, ancak bu pahalıdır. 3. Başka bir olasılık daha var. Makale şu dergide yayınlanmıştır: ‘Det Kongelige Norske Videnskabers Selskab Forhandlinger’, Bd. 28(1955), sayı 7, sayfa 30-36. 4. Belki de çevrenizdeki bir kütüphane bu dergiye sahiptir.” Bunun üzerine ben de **Romberg** gibi 3. yer olan NTNU'ya başvurmak zorunda kaldım ve 2011'de **Romberg**'in makalesi hakkında bir makale yazan **Byrnjulf Owren**'den 23.12.2018, 04:10'da (Trondheim/Norveç'te 02:10) orijinal makaleyi istedim ve 09:11 (Trondheim'da 07:11) bana gönderdi. Söylediğine göre, kendi makalesini yazarken bu makaleyi bir meslektaşından almış ve o da bana gönderdi. Kendisine buradan bir kez daha teşekkür ederim, çünkü **Romberg**'in makalesini dijital olarak bulmak mümkün değildi (Bkz. “Sayısal İntegral Yöntemleri: İntegrallerin Etkin Hesaplanması İçin Yöntemler (Numerische Integration – Verfahren zur effizienten Berechnung von Integralen)”. **Alexander Thomaso** 2018 tarihli bu yüksek lisans tezinde **Romberg**'in makalesini olmadan yazmıştır). Bu nedenle web sitemde yayımladığım **Romberg**'in orijinal makalesi ve yeniden düzenlediğim şekli dijital olarak ilk baskılardır!

Bu yaklaşıklıklar arasında (1.4)'e göre $q = 1,2,4,8$ için

$$(1.6) \quad T_{2q} = \frac{T_q + U_q}{2}$$

aritmetik ortalama bağıntısı vardır. **Romberg** tezinde ilkin T_1 ve U_1 'i hesapladıktan sonra bu bağıntıya göre T_2 'yi hesaplar ve sonra U_2 'yi hesapladıktan sonra T_4 'ü ve sonunda U_4 'ü hesapladıktan sonra T_8 'i hep bu bağıntıya göre hesaplar. Sonra bu yaklaşıkları tablonun ilk sütununa sıralı bir şekilde yazar ve bunlara Richardson ekstrapolasyonunu uygulayarak tablodaki 2-4. sütunlardaki değerleri elde eder!

1.3. 2. Tür Lineer E-ATA Ekstrapolasyonlarının Uygulanması. **Romberg** ilkin **Huygens**'in 1654'teki algoritmasını ya da (2.50)'deki Richardson ekstrapolasyonunu $k = 1$ için trapez yaklaşıklıklarına

$$(1.7) \quad S_2 = T_2 + \frac{T_2 - T_1}{2^2 - 1} = \frac{4T_2 - T_1}{3}, S_4 = T_4 + \frac{T_4 - T_2}{2^2 - 1} = \frac{4T_4 - T_2}{3}, S_8 = T_8 + \frac{T_8 - T_4}{2^2 - 1} = \frac{4T_8 - T_4}{3}$$

ve orta nokta yaklaşıklıklarına

$$(1.8) \quad V_2 = U_2 + \frac{U_2 - U_1}{2^2 - 1} = \frac{4U_2 - U_1}{3}, V_4 = U_4 + \frac{U_4 - U_2}{2^2 - 1} = \frac{4U_4 - U_2}{3}$$

şeklinde **Takabe** ya da **Saigey** formatında uygular (Bkz. “Bölüm 2: Kalan Terimli Romberg İntegrali Yöntemi”, 2.5.7.2. Takabe Algoritması, S. 26).

İkinci olarak yakınsaklığı hızlandırılmış ya da bu ilk ekstrapolasyonik trapez ve orta nokta yaklaşıklıklarına da Richardson ekstrapolasyonunu $k = 2$ için

$$(1.9) \quad R_4 = S_4 + \frac{S_4 - S_2}{2^4 - 1} = \frac{16S_4 - S_2}{15}, R_8 = S_8 + \frac{S_8 - S_4}{2^4 - 1} = \frac{16S_8 - S_4}{15}, W_4 = V_4 + \frac{V_4 - V_2}{2^4 - 1} = \frac{16V_4 - V_2}{15}$$

ve üçüncü olarak bu ikinci ekstrapolasyonik trapez yaklaşık çiftine Richardson ekstrapolasyonunu $k = 3$ için

$$(1.10) \quad Q_8 = R_8 + \frac{R_8 - R_4}{2^6 - 1} = \frac{64S_4 - S_2}{63}$$

şeklinde uygular. Fakat **Romberg** (1.5)'teki trapez ve orta nokta yaklaşıklıklarına (2.50)'deki Richardson ekstrapolasyonunu **Saigey** gibi ortak bir şekilde (iteratif) değil trapezin T'sinden itibaren trapez yaklaşıklarında S, R, Q ve orta nokta yaklaşıklıklarında V, W, (X) değişkenlerini alfabetik olarak atayarak kullandı!

Bu yaklaşık değerler aşağıdaki tabloda listelenmiştir:

Artan Sıralı Yaklaşık Değerler Tablosu (Tabelle der Näherungswerte wachsender Ordnung)				
Aralık Uzunluğu (Intervall-Länge)	Kalan Terim (Rest Prop.)			
	h^2	h^4	h^6	h^8
8h	$T_1 = 0,785398163$			
	$U_1 = 1,110720735$			
4h	$T_2 = 0,948059449$	$S_2 = 1,002279878$		
	$U_2 = 1,026172153$	$V_2 = 0,997989293$		
2h	$T_4 = 0,987115801$	$S_4 = 1,000134584$	$R_4 = 0,999991566$	
	$U_4 = 1,006454543$	$V_4 = 0,999882006$	$W_4 = 1,000008187$	
h	$T_8 = 0,996785172$	$S_8 = 1,000008296$	$R_8 = 0,999999876$	$Q_8 = 1,000000008$
	$U_8 = 1.001608189$	$V_8 = 0.999992737$	$W_8 = 1.000000120$	$X_8 = 0.999999991$

Tablo 1.1. Romberg'in tablosu. Bu tabloda **Romberg** $I = 1$ 'e eriştiği ilk değer olan Q_8 'de tabloyu durdurur. Oysa X_8 'i de hesaplaması gerekiyordu, çünkü aralık uzunluğu sütunundaki her satır bir çift T trapez ve U orta nokta yaklaşıklıklarından oluşuyordu. Yani h 'de 1 satır eksiktir ve bu yüzden kırmızıyla gösterdiğim son satırı ekledim. Tablodaki değerler **MADAS ATG-20** adlı 10 basamaklı, dolayısıyla sondaki rakamlar yuvarlatılmış bir hesap makinesinde hesaplanmıştır (Bkz. “**Romberg'in MADAS ATG-20'si**”, S. 38). Buna göre tablodaki ilk sütundaki aralık uzunluğu $8h = 1$ 'dir ve h^2, h^4, h^6 ve h^8 ifadeleri Richardson ekstrapolasyonundaki katsayıları sıfırlamaya dayanan eliminasyon yöntemine göre kalanları gösterir.

Romberg, 2. tablonun altında şu açıklamaları yapar: “ Q_8 'in 8 ondalık doğrulukla $I = 1$ 'e (ve **Ole Amble**'in dış noktalardan oluşan yaklaşıklıkları için 2. tablodaki $\hat{Q}_8$ 'in 10 ondalık doğrulukla bile $I = 1$ 'e) karşılık geldiğini görebiliriz. Hangi yöntemi kullanacağınız tamamen f_k 'nın nasıl hesaplanabileceğine bağlıdır. Eğer bulmaları kolaysa, daha ince bir bölme kullanmak daha iyidir. Sayısal hesaplamaları çok fazla çalışma gerektiriyorsa, burada belirttiğimiz gibi yüksek yaklaşımlı bir yöntem önerilir (Bkz. “**ANHANG**”).”

Eğer **Romberg**'in bu son uyarısı gereğince 14.5.2003'te (ki bu tarih **Romberg**'in 5.2.2003'teki ölümünden itibaren 98. günü gösterir) keşfettiğim (2.39)'daki E-ATA ekstrapolasyonundan $m = 2$ için elde edilen (2.51)'deki ekstrapolasyonumuzu kullanırsak Tablo 1.1'dekinden daha iyi yaklaşık değerler elde ederiz:

Artan Sıralı Yaklaşık Değerler Tablosu				
Aralık Uzunluğu	Kalan Terim			
	h_j^2	h_{4j+1}^4	h_{4j+2}^6	h_{4j+3}^8
$64h = h_0$	$T_1 = 0.78539816339744830961 \dots$			
	$U_1 = 1.1107207345395915617 \dots$			
$16h = h_2$	$T_4 = 0.98711580097277541227 \dots$	$S_4 = 1.0005636434777972191 \dots$		
	$U_4 = 1.006454542799563932 \dots$	$V_4 = 0.99950346335022875672 \dots$		
$4h = h_4$	$T_{16} = 0.99919668048507229329 \dots$	$S_{16} = 1.000002072452558752 \dots$	$R_{16} = 0.99999987021324409137 \dots$	
	$U_{16} = 1.0004017081549652956 \dots$	$V_{16} = 0.99999818584532538658 \dots$	$W_{16} = 1.0000001259335414518 \dots$	
$h = h_6$	$T_{64} = 0.99994980009210122621 \dots$	$S_{64} = 1.000000008065903155 \dots$	$R_{64} = 0.9999999997026921156 \dots$	$Q_{64} = 1.0000000000019559087 \dots$
	$U_{64} = 1.0000251001429512867 \dots$	$V_{64} = 0.9999999929421503528 \dots$	$W_{64} = 1.0000000000288045683 \dots$	$X_{64} = 0.9999999999805860086 \dots$

Tablo 1.2. Bu yeni tablodaki aralık uzunluğu $h_0 = 64h = 1$ 'dir ve trapez ve orta nokta yaklaşıklıklarını $j = 0,1,2,3$ için T_{2^j} ve U_{2^j} formunda göz önüne alırsanız $h_j^2, h_{4j+1}^4, h_{4j+2}^6$ ve h_{4j+3}^8 ifadeleri (2.51)'deki ekstrapolasyondaki katsayıları sıfırlamaya dayanan eliminasyon yöntemine göre kalanları gösterir. Buna göre R_{64} 'ün 10 ondalığı 9 ve W_{64} 'ün 10 ondalığı 0 iken Q_{64} 'ün 11 ondalığı 1 ve X_{64} 'ün 11 ondalığı 9'dur (Bkz. “**Romberg İntegrali 2: Mathematica İle Sembolik Bir Yaklaşım**”).

Bu tabloyu oluşturabilmek için **Romberg**'in Tablo 1.1'de hesaba katmadığı T_{16}, T_{64} trapez ve U_{16} orta nokta yaklaşıklıklarının da hesaplanması gerekir. Ayrıca trapez ve orta nokta yaklaşıklıkları için **Romberg**'in belirttiği gibi Tablo 1.1 ve 1.2'dekinden daha yüksek bir yaklaşım yöntemi olarak E-ATA ekstrapolasyonumuzda m'nin değerleri arttırılarak elde edilen ekstrapolasyonları verebiliriz!

1.4. Romberg'in Diğer Trapez ve Orta Nokta Yaklaşıklıkları. **Romberg** tezinde 1.2'deki trapez ve orta nokta yaklaşıklıklarının genelleştirilebileceğini de söyledi. Bunun için $[a, b]$ aralığını $8n$ eşit parçaya bölerek $h = \frac{b-a}{8n}$ farkına göre $m = 1, 2, \dots, 8n - 1$ için $f(a + mh)$ fonksiyon değerlerinin mevcut olduğunu ve $n = 1$ için bu fonksiyon değerlerine göre (1.5)'teki T_q trapez ve U_q orta nokta formüllerini verdi. Ancak ona göre $p = 8n = 2^i$ ye karşılık $q = 1, 2, 4, 8, \dots, 2^i$ bölenleri gelecekti ve n sayısını bu şekilde yani hep 2'nin kuvvetleri olarak düşünüyordu. Yani ona göre bir sonraki örnek $i = 4$, ondan sonraki örnek $i = 5$ olacak ve bu böyle devam edecekti!

Şu hâlde bu işleme göre $\forall i \in \mathbb{N}$ için $p = 2^i$ ve $j = 0, 1, \dots, i$ için $q = 2^j$ bölenleriyle (1.1)'den

$$(1.11) \quad T_{2^j} = h \sum_{k=0}^{2^j-1} f_{2^{i-j}k} = \frac{h}{2^j} \sum_{k=0}^{2^j-1} f_{2^{i-j}k}, U_{2^j} = h \sum_{k=0}^{2^j-1} f_{\frac{p}{q}(k+\frac{1}{2})} = \frac{h}{2^j} \sum_{k=0}^{2^j-1} f_{2^{i-j}(k+\frac{1}{2})}$$

formülleri elde edilir ki bu toplamlardaki farkları

$$(1.12) \quad \frac{h}{2^j} = \frac{b-a}{2^j} = h_j$$

şeklinde ortaklaştırırsak (ki böylece $T_{2^j} = T_j$ ve $U_{2^j} = U_j$ şeklinde yazabiliriz) (1.2)'ye göre

$$(1.13) \quad f_{2^{i-j}k} = f\left(a + \frac{2^i}{2^j}k \cdot \frac{h}{2^i}\right) = f\left(a + k \cdot \frac{h}{2^j}\right) = f(a + kh_j) = f_k, f_{2^{i-j}(k+\frac{1}{2})} = f\left(a + \frac{2^i}{2^j}\left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{h}{2^i}\right) = f\left(a + \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{h}{2^j}\right) = f\left(a + \left(k + \frac{1}{2}\right) h_j\right) = f_{k+\frac{1}{2}}$$



fonksiyonlarını aynı farka göre yazmış olur ve böylece trapez ve orta nokta formüllerini en sade şekilde şöyle bulmuş oluruz:

$$(1.14) \quad T_j = h_j \sum_{k=0}^{2^j-1} f_k, U_j = h_j \sum_{k=0}^{2^j-1} f_{k+\frac{1}{2}}$$

Bunlar RİK 3'teki (1.43)'teki formüllerdir. Bu yaklaşıklıklardan sadece trapezdeki ilk değer $k = 0$ için $f_0 = f(a + 0 \cdot h_j) = f(a)$ alınamaz, çünkü trapez metodunda tanım gereği

$$(1.15) \quad f_0 := \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

şeklinde alınmak zorundadır. **Romberg** tezinde bunu söylemeden uygulamasını yaparken, **Owren** makalesinde bunun böyle olduğunu açıkça söyler (Bkz. S. 4).

1.5. Romberg'in Trapez ve Orta Nokta Yaklaşıklıklarının Modifikasyonu. (1.14)'teki trapez formülü

$$T_j = h_j \sum_{k=0}^{2^j-1} f_k = h_j f_0 + h_j \sum_{k=1}^{2^j-1} f_k = K_0 + \sum_{k=1}^{2^j-1} f(a + kh_j)$$

eşitliklerine göre (ki $h_0 = \frac{b-a}{2^0} = b-a = h$ için $h_0 f_0 =: K_0$ dersek $h_j f_0 = \frac{b-a}{2^i} f_0 = \frac{(b-a)f_0}{2^j} = \frac{h_0 f_0}{2^j} = \frac{K_0}{2^j}$ olur)

$$(1.16) \quad T_j = \frac{K_0}{2^j} + \sum_{k=1}^{2^j-1} f(a + kh_j)$$

ve orta nokta formülü

$$U_j = h_j \sum_{k=0}^{2^j-1} f_{k+\frac{1}{2}} = h_j \sum_{k=1}^{2^j} f_{k-\frac{1}{2}} = h_j \sum_{k=1}^{2^j} f_{k-\frac{1}{2}} = h_j \sum_{k=1}^{2^j} f\left(a + \left(k - \frac{1}{2}\right) h_j\right) = h_j \sum_{k=1}^{2^j} f(a + (2k-1)h_{j+1})$$

eşitliklerine göre

$$(1.17) \quad U_j = h_j \sum_{k=1}^{2^j} f(a + (2k-1)h_{j+1})$$

Resim 1.1. **Werner Romberg**'in "*Vereinfachte numerische Integration*" adlı makaleyle amacı, standart bir sayısal integral yöntemi olan trapez kuralının yakınsama hızını arttırmaktı. **Lewis Fry Richardson** 1927'de bugün "Richardson Ekstrapolasyonu" olarak adlandırılan yöntemin özel bir durumunu ortaya koyduğu için bu amaca sahip ilk kişi o değildi. Ancak, burada söz konusu olan temel fikirler bundan çok daha eskiye dayanmaktadır; zira **Christiaan Huygens** 1654'te "*De Circuli Magnitudinis Inventis*" adlı eserinde π 'yi hesaparken bu ekstrapolasyonun ilk iterasyonunu kullandı ve **Takabe** π 'nin bir asimptotik formülünde bu ekstrapolasyonu kullanarak 41 ondalığını buldu (Bkz. "*Tetsujutsu Sankei (1722)*"). Bu sonuçla Richardson ekstrapolasyonu **Seki Kowa**'nın öğrencisi **Katahiro Takebe** tarafından 1710'dan önce, muhtemelen 1695'ten önce keşfedildi (Bkz. RİK 4, S. 25, 2.1. Richardson Ekstrapolasyonu). Bu son gelişmeyi şunun için verdim: **Romberg** bu ekstrapolasyonu (1.7)-(1.10)'da **Takabe** ya da **Saigey** gibi kullanırken Richardson ekstrapolasyonunu kullandığı ileri sürülerek tezine gölge düşürmeye çalıştılar. Fakat Tokyo Üniversitesi'nden Doç. Dr. **Naoki Osada** 18.3.2012'de 70. doğum günü için **Claude Brezinski**'ye adanmış "*Yakınsaklığı Hızlandırma Yöntemlerinin Erken Tarihi*" makalesinde bu durumu ifşa edince ekstrapolasyonun tarihi daha da geriye gitti!

şeklinde yazılabilir.

Bunlardan orta nokta formülü bu şekilde modifiye edilmişken trapez formülü ona bağlı olarak şu şekilde modifiye edilebilir: Bu yaklaşıklıklar arasında

$$(1.18) \quad T_{j+1} = \frac{T_j + U_j}{2}$$

aritmetik ortalaması mevcut olduğundan orta nokta formülünü

$$U_j = 2T_{j+1} - T_j$$

şeklinde yazabilir ve bunu (1.17)'de yerine koyar ve gerekli işlemleri yaparsak trapez formülünü

$$(1.19) \quad T_j = \frac{T_{j-1}}{2} + h_j \sum_{k=1}^{2^{j-1}} f(a + (2k-1)h_j)$$

şeklinde yazmış oluruz. Bu, trapez formülünün ilk indirgeme bağıntısıdır ve eğer bu indirgeme işlemine devam edilirse j. adımda (1.16) elde edilecektir (Bkz. “[1.6.3. \$K_n\$ 'nin \$K_0\$ 'a İndirgenmesi](#)”, S. 10-11 ve “[Teorem 1.3](#)”, S. 20-1). Yani (1.16)'daki indirgemelerden (1.19)'a göre

$$(1.20) \quad \sum_{k=1}^j \frac{U_{j-k}}{2^k} = \sum_{k=1}^{2^j-1} f(a + kh_j)$$

özdeşliği elde edilecektir!

1.6. Romberg'in Trapez ve Orta Nokta Yaklaşıklıkları İçin E-ATA Ekstrapolasyonları. (1.14)'teki T_j trapez ve U_j orta nokta yaklaşıklıkları için lineer ekstrapolasyonların

1. [Romberg İntegrali: Mathematica'da Tablolarla Sembolik Bir Yaklaşım](#), 11.6.2023.

Bu programda “Richardson ekstrapolasyonu” olarak bilinen bu ekstrapolasyon **Seki Kowa**'nın öğrencisi **Katahiro Takebe** tarafından 1710'dan önce, muhtemelen 1695'ten önce keşfedildi (Bkz. “[Tetsujutsu Sankei \(1722\)](#)”, “[2.1. Richardson Ekstrapolasyonu](#)”, S. 25). Aynı şey en büyük Japon matematikçi **Seki Kowa**'nın da başına geldi. O da 2^n -genle çemberin çevresini ölçerken “[Aitken \$\delta^2\$ İşlemi](#)” olarak bilinen ekstrapolasyonla $s_{15} = 3.1415926487769856708$, $s_{16} = 3.1415926523865913571$ ve $s_{17} = 3.1415926532889927759$ değerlerini bulmuştu (Bkz. “[Katsuyo Sampo \(1712\)](#)”). Bu konuda S. 8-10'daki “[5.3. Takakazu Seki](#)”den gerekli bilgileri alabilirsiniz. İşte **Seki Kowa**'nın öğrencisi **Katahiro Takabe** burada devreye giriyor ve **Seki Kowa**'nın algoritmasını Richardson ekstrapolasyonuna çevirerek π 'nin 41 ondalığını hesaplıyor (Bkz. “[6.2. Katahiro Takabe](#)”, S. 218-220).

Bu konuda RİK 3'ün 21-22. sayfalarında “[2018 Türk-Japon Dostluğu İçin Katkıları](#)”da sözüne ettiğim çalışmalarımın biri şudur:

1. “[Takabe'nin Algoritması](#)”, Romberg İntegrali 2016-2019, 27.06.2019, 04:14:19, S. 75-80.

Bu çalışmada şimdi “Richardson ekstrapolasyonu” olarak bilinen ekstrapolasyonu ilk keşfedenin **Katahiro Takabe** olduğu anlaşılmaktadır. İngiliz meteorolog [Lewis Fry Richardson](#) bu ekstrapolasyonu 1927'de keşfetti ve **Naoki Osada**'nın bildirdiğine göre **Takabe** bunu 1695'ten önce keşfetmişti. Çünkü **Takabe**'nin bu ekstrapolasyon hakkındaki çalışması **Naoki Osada**'nın “[6.2. Katahiro Takabe](#)”de bildirdiğine göre ve daha açık şekliyle anlattığım yukarıdaki çalışmamdan görüldüğü üzere günümüzdeki gibi açıktır. Aynı şekilde [Alexander Aiken](#)'nin 1926'da keşfettiği algoritma ya da ekstrapolasyon da **Seki Kowa**'ya aittir!

2. [Romberg İntegrali 2: Mathematica İle Sembolik Bir Yaklaşım](#), 16.6.2023,
3. [Romberg İntegrali 3: Mathematica İle Sembolik Bir Yaklaşım](#), 17.6.2023,
4. [Romberg İntegrali m: Mathematica İle Sembolik Bir Yaklaşım](#), 17.6.2023

ve yüksek mertebeden ekstrapolasyonların

5. [Mathematica İle Kuartik Dışkestirim Üzerindeki Trapez Yaklaşıklıklığına Sembolik Bir Yaklaşım](#), 23.6.2023,
6. [Mathematica İle Nonik Dışkestirim Üzerindeki Trapez Yaklaşıklıklığına Sembolik Bir Yaklaşım](#), 24.6.2023,
7. [Mathematica İle p²-inci Mertebeden Dışkestirim Üzerindeki Trapez Yaklaşıklıklığına Sembolik Bir Yaklaşım](#), 24.6.2023

linklerini verebilirim (Bkz. Web sitemin ana sayfasındaki “[Programlar](#)” menüsüne). Fakat bunlar **Romberg**'in tezinde “Eğer bulmaları kolaysa, daha ince bir bölme kullanmak daha iyidir. Sayısal hesaplamaları çok fazla çalışma gerektiriyorsa, burada belirttiğimiz gibi yüksek yaklaşımlı bir yöntem önerilir (Sind sie leicht zu finden, teilt man besser feiner ein. Erfordert ihre numerische Berechnung viel Arbeit, dann empfiehlt sich eine Methode hoher Näherung, wie wir sie hier angegeben haben).” şeklinde ileri sürdüğü türden ama onun tahmin etmediği ekstrapolasyonlardır. Çünkü eğer öyle bir şey olsaydı **Romberg** bu ekstrapolasyonları kendi tezinde söylerdi. **Romberg**'in bu konudaki “[EK \(ANHANG\): Kalan Terim Serisini Hesaplama \(Zur Berechnung der Restglied-Reihen\)](#)” çalışmasını “[Bölüm 2: Kalan Terimli Romberg İntegrali Yöntemi](#)”nde vereceğim. Bu çalışmanın şimdiye kadar ihmal edilmiş olması gerçekten çok yazık olmuş, çünkü **Romberg** (1.14)'teki T_j trapez ve U_j orta nokta yaklaşıklıklarının yakınsaklık hızının nasıl artırılacağını bu çalışmada söylüyordu!

Burada son olarak çalışmalarım sırasında geçirtilen bir noktanın altını çizmek istiyorum: **Romberg**'in tezindeki çalışmalar sonrakiler tarafından “**Romberg ne yaptı?**” diye anlatılmadı, hep bu çalışmaların bir üstü hedeflendi. Ama [EK](#)'teki çalışma hariç. Çünkü bu çalışma **Romberg**'in yanlış ve yetersiz bilgiler vermesi nedeniyle hep bir gizem olarak kalmıştı. Bu nedenle **Romberg**'in tezinden çıkarttığım Bölüm 1 ve 2'deki bilgileri olduğu gibi bir başka kaynaktan bulmanız mümkün değil. Yani **Romberg**'in çalışmalarını ben anlatıyorum size!