DET KONGELIGE NORSKE VIDENSKABERS SELSKABS FORHANDLINGER Bind 28, Nr. 7, 1955.

517.61
(517.2)

Vereinfachte numerische Integration

VON

WERNER ROMBERG

(Fremlagt i Fellesmøtet 14de februar 1955 av herr ***S. Selberg***)

Zu berechnen sei ein Integral

$$I = \int_a^b F(x)dx$$

angenähert aus Funktionswerten an äquidistanten Teilpunkten. Am häufigsten benutzt man die Trapezformel und die Simpson Formel. ***Gauss*** hat auch Polynome höheren Grades durch die Punkte F_k gelegt und die zugehörigen Koeffizientenfolgen berechnet. Wir geben hier nur diejenigen für 4 und 8 Intervalle wieder:

Trapez	T:	1	1							
Simpson	S:	1	4	1						
Gauss	G^1:	7	32	12	32	7				
Gauss	G^{11}:	989	5888	−929	10496	−4540	10496	−929	5888	989

Die Gauss'schen Formeln werden, wegen ihrer unbequemeren Gewichte, selten benutzt. Durch eine etwas abgeänderte Berechnungsweise können wir aber ausser S und G^1 auch einen noch besseren Näherungswert für I berechnen, ohne die oben genannten verschiedenen Koeffizienten zu benutzen. Dazu teilen wir das Intervall $a \leq x \leq b$ in 8N Teile, $b - a = 8Nh$, bezeichnen $F(a + kh)$ für $k = 1,2,\cdots,8N-1$ mit F_k, aber speziell den Mittelwert aus $F(a)$ und $F(b)$ mit F_0 und berechnen zunächst die gröbste Approximation nach der Trapezformel

$$T_1 = 8h \sum_{n=0}^{N-1} F_{8n} = (b-a)\overline{\sum_{n=0}^{N-1} F_{8n}}$$

(Überstreichen bedeute das arithmetische Mittel, Intervall-Länge 8h).

Jetzt halbieren wir alle Intervalle, und bilden den Mittelwert der F aller dabei neu auftretenden Teilpunkte, also

$$U_1 = 8h \sum_{n=0}^{N-1} F_{8n+4} = (b-a)\overline{\sum_{n=0}^{N-1} F_{8n+4}}.$$

Bei nochmaligem Halbieren:

$$U_2 = (b-a)\overline{\sum_{n=0}^{N-1}(F_{8n+2} + F_{8n+6})},$$

und schliesslich:

$$U_4 = (b-a)\overline{\sum_{n=0}^{N-1}(F_{8n+1} + F_{8n+3} + F_{8n+5} + F_{8n+7})}.$$

Dann sind die Trapeznäherungen feinerer Teilung

$$T_2 = \overline{T_1 + U_1}, T_4 = \overline{T_2 + U_2}, T_8 = \overline{T_4 + U_4}$$

mit den Intervall-Längen 4h, 2h und h.

Die U und T sind grobe Approximationen an I, da das Restglied prop. h^2 ist. Bekanntlich [1] kann man dann aus je zwei benachbarten Halbierungen eine genauere Näherung gewinnen, also

$$S_2 = T_2 + \frac{T_2 - T_1}{2^2 - 1}, S_4 = T_4 + \frac{T_4 - T_2}{2^2 - 1}, S_8 = T_8 + \frac{T_8 - T_4}{2^2 - 1}$$

und

$$V_2 = U_2 + \frac{U_2 - U_1}{2^2 - 1}, V_4 = U_4 + \frac{U_4 - U_2}{2^2 - 1}.$$

Man scheint nicht bemerkt zu haben, dass die S genau die Näherung nach der Simpson Formel S darstellen.

Da die S und V ein Resglied prop. h^4 besitzen, gewinnt man aus ihnen dann entsprechend [1]

$$R_4 = S_4 + \frac{S_4 - S_2}{2^4 - 1}, R_8 = S_8 + \frac{S_8 - S_4}{2^4 - 1} \text{ und } W_4 = V_4 + \frac{V_4 - V_2}{2^4 - 1}.$$

R_4 und R_8 sind genau die Näherung an I, die sich bei Verwendung der Gewichtsfaktoren G^1 ergeben hätten. R und W haben ein Restglied prop. h^6; daher bilden wir weiter

$$Q_8 = R_8 + \frac{R_8 - R_4}{2^6 - 1}$$

mit einem Restglied prop. h^8, usw.

Der Vorteil dieser Methode beruht darauf, dass jedes neue Halbieren nur den Mittelwert der neuen Funktionenswerte erfordert, multipliziert mit $b - a$; dieses neue U erlaubt, die Folgen der T, S, R, Q und U, V, W je um ein Glied zu verlängern. Da die Restglieder prop. h^2, h^4, h^6, h^8 sind, ergeben sich so einfach Näherungen immer höherer Ordnung.

Die oben angeführte Näherung G^{11} ist nicht in unseren Näherungen Q usw. enthalten, da wir die F in U_4 mit gleichen Gewichten versehen.

Wir setzen voraus, dass F sich in $a \leq x \leq b$ in eine Taylor-Reihe entwickeln lässt; dann kann man die Restglieder aller Näherungen leicht berechnen. Schreibt man diese für ein Teilintervall der Länge 8h auf, so zeigt sich, dass das Glied der niedrigsten h-Potenz im Restgliede von T und U entgegensetztes Vorzeichen hat (Siehe Anhang). Nehmen wir im Folgenden an, dass das Glied niedrigster Ordnung in h gegenüber den höheren h-Potenzen im Restgliede überwiegt, dann wird I zwischen T und U liegen, und zwar etwa in der Mitte zwischen T_1 und U_1, T_2 und U_2, T_4 und U_4. Dasselbe zeigen die Zahlenpaare $S_2, V_2; S_4, V_4; R_4, W_4$. Da nun $S_4 = \overline{S_2 + V_2}$, $S_8 = \overline{S_4 + V_4}, R_8 = \overline{R_4 + W_4}$ sind die durch die Einschliessung zu erwartenden I-Näherungswerte schon in unseren S und R enthalten, und nicht genauer als der zuletzt berechnete Wert unserer Methode (¹). So ist bei obiger Teilung, in je $2^3 = 8$ Teile, obiges Q_8 die genaueste Näherung an I, die sich aus den U_1, U_2, U_4 berechnen lässt; nochmaliges Halbieren gäbe als bestes ein P_{16} u.s.w.

Das Restglied bei P_{16} ist prop. h^{10}, bei einer Einteilung in 16 Teile; 16 ist teilbar durch 5 verschiedene Zahlen: 1,2,4,8,16 also $\nu(16)(= \nu(2^4) = 4 + 1) = 5$, und jede Teilung erlaubt das Entfernen einer h^2-Potenz. Würde man anders einteilen, etwa nur in 12 gleiche Teile $\nu(12)(= \nu(2^2.3) = (2 + 1)(1 + 1) = 3.2) = 6$, so könnte man mit Hilfe der $T_1, T_2, T_3, T_4, T_6, T_{12}$ sogar eine Näherung mit einem Rest prop. h^{12} erreichen. Dann werden die Formeln aber wieder komplizierter.

Auch manche anderen Näherungsmethoden können unser Verfahren entsprechend anpassen, sobald Näherungswerte bei mehrmaliger feinerer Teilung vorliegen. So hat u.A. ***O. AMBLE*** [2] gezeigt, wie man durch Hinzufügen je eines Punktes im Abstande h auf beiden Seiten ausserhalb des Integrationsgebietes $a \leq x \leq b$ eine bessere Annäherung an I finden kann. Er bildet (in unseren Symbolen)

$$(2)\quad \widehat{T}_8 = T_8 + \frac{h}{24}(F_1 - F_{-1} + F_{8N-1} - F_{8N+1}) = T_8 + A_8.$$

Durch Hinzufügen dieser Rand-Korrektur A_8 zur Trapezformel T_8 erhält er eine Näherung, deren Restglied nur noch prop. h^4 ist. Hier seinen die mit Rand-korrektur versehen Näherungen durch Beifügen eines “^” gekennzeichnet. ***Amble*** berechnet auch höhere Näherungen, unter Hinzufügen weiterer Aussenpunkte; diese Formeln werden entsprechend komplizierter.

Wir können jetzt unsere Methode ganz entsprechend anwenden, indem wir bilden

$$\begin{aligned}\widehat{T}_1 &= T_1 + A_1 = T_1 + \frac{8h}{24}(F_8 - F_{-8} + F_{8N-8} - F_{8N+8}),\\ \widehat{T}_2 &= T_2 + A_2 = T_2 + \frac{4h}{24}(F_4 - F_{-4} + F_{8N-4} - F_{8N+4}),\\ \widehat{T}_4 &= T_4 + A_4 = T_4 + \frac{2h}{24}(F_2 - F_{-2} + F_{8N-2} - F_{8N+2})\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\widehat{U}_1 &= U_1 - 2A_2,\\ \widehat{U}_2 &= U_2 - 2A_4,\\ \widehat{U}_4 &= U_4 - 2A_8\end{aligned}$$

(Weitere Informationen finden Sie in ***Ole Amble***s Algorithmus. Seiten 3–4).

(¹) Siehe aber die Schlussbemerkung im Anhang.

Da ***Amble***s Ansatz symmetrisch ist um F_4, enthält die Restgliedreihe wieder nur gerade h-Potenzen. Da die $\widehat{T}$-Reste schon prop. h^4 sind, ebenso die der $\widehat{U}$, werden die höheren Näherungen:

$$\widehat{S}_4 = \widehat{T}_4 + \frac{\widehat{T}_4 - \widehat{T}_2}{2^4 - 1}, \widehat{S}_8 = \widehat{T}_8 + \frac{\widehat{T}_8 - \widehat{T}_4}{2^4 - 1}, \widehat{V}_4 = \widehat{U}_4 + \frac{\widehat{U}_4 - \widehat{U}_2}{2^4 - 1} \text{ usw.}$$

alle mit einem Restglied prop. h^6, dann

$$\widehat{R}_8 = \widehat{S}_8 + \frac{\widehat{S}_8 - \widehat{S}_4}{2^6 - 1} \text{ usw.}$$

mit einem Restgliede prop. h^8 usw.

Als Beispiel berechnen wir

$$I = \int_0^1 \frac{\pi}{2} \mathrm{Cos}\left(\frac{\pi}{2} x\right) dx = 1 \text{ angenähert,}$$

indem wir das Intervall in 8 gleiche Teile teilen, $N = 1, 8h = 1$.

$F(a) = 1.570796327, F(b) = 0.$
$F_1 = 1.540613916$
$F_2 = 1.451226576$
$F_3 = 1.306069413$
$F_4 = 1.110720735$
$F_5 = 0.872687681$
$F_6 = 0.601117730$
$F_7 = 0.306447161$
$F_0 = 0.785398163$

Hieraus $U_1 = F_4, T_1 = F_0,$
$U_2 = \overline{F_2 + F_6} = 1.026172153$
$U_4 = \overline{F_1 + F_3 + F_5 + F_7} = 1.006454543$
Für ***Amble***s Methode brauchen wir ferner (Siehe Seite 97-98), wegen $F_{-k} = F_k$,
$F_{8+k} = -F_{8-k}, F_{16} = -F(a),$
$$A_1 = \frac{8h}{24}(F(a) - F_{16}) = 0.130899694$$
$$A_2 = \frac{4h}{24}(F_4 - F_{12}) = 0.046280031$$
$$A_4 = \frac{2h}{24}(F_6 - F_{10}) = 0.012523286$$
$$A_8 = \frac{h}{24}(F_7 - F_9) = 0.003192158$$

Die Näherungswerte sind in der folgenden Tabelle aufgeführt:

Tabelle der Näherungswerte wachsender Ordnung				
Intervall-Länge	**Rest Prop.**			
	h^2	h^4	h^6	h^8
8h	$T_1 = 0.785398163$			
	$U_1 = 1.110720735$			
4h	$T_2 = 0.948059449$	$S_2 = 1.002279878$		
	$U_2 = 1.026172153$	$V_2 = 0.997989293$		
2h	$T_4 = 0.987115801$	$S_4 = 1.000134584$	$R_4 = 0.999991566$	
	$U_4 = 1.006454543$	$V_4 = 0.999882006$	$W_4 = 1.000008187$	
h	$T_8 = 0.996785172$	$S_8 = 1.000008296$	$R_8 = 0.999999876$	$Q_8 = 1.000000008$

Näherungswerte, mit Aussenpunkten:

Näherungswerte mit Aussenpunkten				
Intervall-Länge	**Rest Prop.**			
	h^4	h^6	h^8	h^{10}
8h	$\widehat{T}_1 = 0.916297857$			
	$\widehat{U}_1 = 1.018160673$			
4h	$\widehat{T}_2 = 0.994339480$	$\widehat{S}_2 = 0.999542255$		
	$\widehat{U}_2 = 1.001125581$	$\widehat{V}_2 = 0.999989908$		
2h	$\widehat{T}_4 = 0.999639087$	$\widehat{S}_4 = 0.999992394$	$\widehat{R}_4 = 0.999999539$	
	$\widehat{U}_4 = 1.000070227$	$\widehat{V}_4 = 0.999999870$	$\widehat{W}_4 = 1.000000028$	
h	$\widehat{T}_8 = 0.999977330$	$\widehat{S}_8 = 0.999999879$	$\widehat{R}_8 = 0.999999998$	$\widehat{Q}_8 = 1.0$

Wir sehen, dass Q_8 mit I in 8, $\widehat{Q}_8$ sogar in 10 Dezimalen übereinstimmt. Welche Methode man verwendet, hängt ganz davon ab, wie sich die F_k berechnen lassen. Sind sie leicht zu finden, teilt man besser feiner ein. Erfordert ihre numerische Berechnung viel Arbeit, dann empfiehlt sich eine Methode hoher Näherung, wie wir sie hier angegeben haben (Zur Romberg-Methode in diesem Kapitel siehe "*Kapitel 1: Rombergs Integralmethode ohne Restglied*", zur Ole-Amble-Methode siehe "*2. Ole-Amble-Algorithmus*", "*3. Verallgemeinerter Ole-Amble-Algorithmus*" und "*4. Erweiterung der Piobert-Parmentier-Methode auf Q*" und zu den Anwendungen beider Methoden siehe "*2.3. Anwendungen*").

ANHANG

Zur Berechnung der Restglied-Reihen.

Wir greifen aus den N Intervallen der Länge 8h eines heraus, und transformieren den Koordinaten-0 Punkt durch $z = 8hnx - 4h$ in die Mitte des Intervalles. Die Näherungswerte an das Integral I über dieses Teilintervall der Länge 8h bezeichnen wir wieder mit großbuchstaben, und $F(x) = F(z)$. Es ist, wegen

$$\mathrm{F}(\mathrm{z}) = \sum_{\mathrm{m}=0}^{\infty} \mathrm{F}^{(\mathrm{m})}(0) . \frac{\mathrm{z}^{\mathrm{m}}}{\mathrm{m}!},$$

$$\mathrm{I} = \int_{-4\mathrm{h}}^{4\mathrm{h}} \mathrm{F}(\mathrm{z}) \mathrm{dz} = 8\mathrm{h} \sum_{\mathrm{m}=0}^{\infty} \frac{\mathrm{F}^{(2\mathrm{m})}(0)}{(2\mathrm{m}+1)!} (4\mathrm{h})^{2\mathrm{m}},$$

$$\mathrm{T}_1 = \frac{8h}{2} (\mathrm{F}_{4\mathrm{h}} + \mathrm{F}_{-4\mathrm{h}}) = 8\mathrm{h} \sum_{\mathrm{m}=0}^{\infty} \frac{\mathrm{F}^{(2\mathrm{m})}(0)}{(2\mathrm{m})!} (4\mathrm{h})^{2\mathrm{m}}$$

also $\mathrm{I} = \mathrm{T}_1 + \mathrm{R}(\mathrm{T}_1)$ mit

$$\mathrm{R}(\mathrm{T}_1) = -8\mathrm{h} \sum_{\mathrm{m}=1}^{\infty} \mathrm{F}^{(2\mathrm{m})}(0) \frac{(4\mathrm{h})^{2\mathrm{m}}}{(2\mathrm{m}+1)!} (2\mathrm{m}).$$

Da $\mathrm{U}_1 = 8\mathrm{hF}_0$, wird $\mathrm{I} = \mathrm{U}_1 + \mathrm{R}(\mathrm{U}_1)$ mit

$$\mathrm{R}(\mathrm{U}_1) = 8\mathrm{h} \sum_{\mathrm{m}=1}^{\infty} \mathrm{F}^{(2\mathrm{m})}(0) \frac{(4\mathrm{h})^{2\mathrm{m}}}{(2\mathrm{m}+1)!}.$$

So erhält man als Restglieder Reihen der Form

$$\mathrm{R} = 8\mathrm{h} \left(\mathrm{F}''(0) \frac{\mathrm{h}^2}{3!} \mathrm{a} + \mathrm{F}^{(4)}(0) \frac{\mathrm{h}^4}{5!} \mathrm{b} + \mathrm{F}^{(6)}(0) \frac{\mathrm{h}^6}{7!} \mathrm{c} + \mathrm{F}^{(8)}(0) \frac{\mathrm{h}^8}{9!} \mathrm{d} + \cdots \right)$$

mit den folgenden Koeffizienten:

	a	b	c	d
$\mathbf{R(U_1)}$	16	256	4096	65536
$\mathbf{R(U_2)}$	4	176	3648	63232
$\mathbf{R(U_4)}$	1	51	1541	36007
$\mathbf{R(T_1)}$	-32	-1024	-24576	-524288
$\mathbf{R(T_2)}$	-8	-384	-10240	-229376
$\mathbf{R(T_4)}$	-2	-104	-3296	-83072
$\mathbf{R(T_8)}$	-0.5	-26.5	-877.5	-23532.5
$\mathbf{R(V_2)}$	0	$149.\overline{3}$	$3498.\overline{6}$	62464
$\mathbf{R(V_4)}$	0	$9.\overline{3}$	$838.\overline{6}$	26932
$\mathbf{R(S_2)}$	0	$-170.\overline{6}$	$-5461.\overline{3}$	-131072
$\mathbf{R(S_4)}$	0	$-10.\overline{6}$	$-981.\overline{3}$	-34304
$\mathbf{R(S_8)}$	0	$-0.\overline{6}$	$-71.\overline{3}$	-3686
$\mathbf{R(W_4)}$	–	0	$661.\overline{3}$	27763.2
$\mathbf{R(R_4)}$	–	0	$-682.\overline{6}$	-27852.8
$\mathbf{R(R_8)}$	–	0	$-10.\overline{6}$	-1644.8
$\mathbf{R(Q_8)}$	–	–	0	-1228.8

Man erkennt auch das abwechselnde Vorzeichen der an U und an T sich anschliessenden Näherungen.

Unsere Methode liefert auf einfache Weise die Näherungen höherer Ordnung. Trotzdem kann gelegentlich eine Näherung niedriger Ordnung im einen Intervallteil das des anderen Intervallteiles kompensiert. Unsere Sätze gelten dann für jeden der einzelnen Intervallteile (Ich habe die Methode und die Tabelle im Anhang entsprechend der "*Kapitel 2: Rombergs Integralmethode mit Restglied*" korrigiert).

---

[1] z.B. ***L. COLLATZ***: *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, S. 6, Gl. (1.7) Springer-Verlag 1951*.

[2] ***O. AMBLE***: *A Set of Formulas for Numerical Integration, DKNVS, BD. 25, 1952 NR. 10, 517.61*.

Trykt 28de april 1955
I kommisjon hos F. Bruns Bokhandel
Aktietrykkeriet i Trondhjem.