

Bölüm 2: Kalan Terimli Romberg İntegrali Yöntemi

ANALOG

Zur Berechnung der Restglied-Reihen.

Wir greifen aus den N Intervallen der Länge 8h eines heraus, und transformieren den Koordinaten-0 Punkt durch $z = 8hn x - 4h$ in die Mitte des Intervalles. Die Näherungswerte an das Integral I über dieses Teilintervall der Länge 8h bezeichnen wir wieder mit großbuchstaben, und $F(x) = F(z)$. Es ist, wegen

$$F(z) = \sum_{m=0}^{\infty} F^{(m)}(0) \cdot \frac{z^m}{m!},$$
$$I = \int_{-4h}^{4h} F(z) dz = 8h \sum_{m=0}^{\infty} \frac{F^{(2m)}(0)}{(2m+1)!} (4h)^{2m},$$
$$T_1 = \frac{8h}{2} (F_{4h} + F_{-4h}) = 8h \sum_{m=0}^{\infty} \frac{F^{(2m)}(0)}{(2m)!} (4h)^{2m}$$

also $I = T_1 + R(T_1)$ mit

$$R(T_1) = -8h \sum_{m=1}^{\infty} F^{(2m)}(0) \frac{(4h)^{2m}}{(2m+1)!} (2m).$$

Da $U_1 = 8hF_0$, wird $I = U_1 + R(U_1)$ mit

$$R(U_1) = 8h \sum_{m=1}^{\infty} F^{(2m)}(0) \frac{(4h)^{2m}}{(2m+1)!}.$$

So erhält man als Restglieder Reihen der Form

$$R = 8h \left(F''(0) \frac{h^2}{3!} a + F^{(4)}(0) \frac{h^4}{5!} b + F^{(6)}(0) \frac{h^6}{7!} c + F^{(8)}(0) \frac{h^8}{9!} d + \dots \right)$$

mit den folgenden Koeffizienten:

	a	b	c	d
R(U₁)	16	256	4096	65536
R(U₂)	4	176	3648	63232
R(U₄)	1	51	1541	36007
R(T₁)	-32	-1024	-24576	-524288
R(T₂)	-8	-384	-10240	-229376
R(T₄)	-2	-104	-3296	-83072
R(T₈)	-0.5	-26.5	-877.5	-23532.5
R(V₂)	0	149. $\overline{3}$	3498. $\overline{6}$	62464
R(V₄)	0	9. $\overline{3}$	838. $\overline{6}$	26932
R(S₂)	0	-170. $\overline{6}$	-5461. $\overline{3}$	-131072
R(S₄)	0	-10. $\overline{6}$	-981. $\overline{3}$	-34304
R(S₈)	0	-0. $\overline{6}$	-71. $\overline{3}$	-3686
R(W₄)	—	0	661. $\overline{3}$	27763.2
R(R₄)	—	0	-682. $\overline{6}$	-27852.8
R(R₈)	—	0	-10. $\overline{6}$	-1644.8
R(Q₈)	—	—	0	-1228.8

Man erkennt auch das abwechselnde Vorzeichen der an U und an T sich anschliessenden Näherungen.

Unsere Methode liefert auf einfache Weise die Näherungen höherer Ordnung. Trotzdem kann gelegentlich eine Näherung niedriger Ordnung im einen Intervallteil das des anderen Intervallteiles kompensiert. Unsere Sätze gelten dann für jeden der einzelnen Intervallteile (Ich habe die Methode und die Tabelle im Anhang entsprechend der “[Kapitel 2: Rombergs Integralmethode mit Restglied](#)” korrigiert).

[1] z.B. [L. COLLATZ: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, S. 61, G. C. A. Springer Verlag 1951](#)

[2] [O. AMBLE: A Set of Formulas for Numerical Integration, DKNVS, BD. 25, 1952 NR. 10, 517.61.](#)

D. PAMUKTULUM

2025

Trykt 28de april 1955

I kommisjon hos [F. Bruns Bokhandel](#)

[Aktietrykkeriet](#) i Trondhjem.

Öncelikle **Romberg**'in "[EK \(ANHANG\): Kalan Terim Serisini Hesaplama \(Zur Berechnung der Restglied-Reihen\)](#)" çalışması tam bir klasiktir ve onu ortaya çıkarana kadar bazı zorluklarla karşılaştım ama üstesinden gelmeyi başardım. Çünkü tezde şu sorunlar vardı:

1. Anlatım Şekli. **Romberg**'in anlatım şekli böyledir çünkü **Romberg** EK'teki yöntemden önceki şimdi adıyla anılan yöntemi ve **Ole Amble**'in yöntemini anlatırken de hep böyleydi (ki **Romberg**'in yöntemini "[Bölüm 1: Kalan Terimsiz Romberg İntegrali Yöntemi](#)" ve **Ole Amble**'in yöntemini "[Ole Amble'in Algoritması, 01.02.2019](#)" ve "[Genelleştirilmiş Ole Amble Algoritması, 31.08.2021, 06:23:28](#)" makalelerimde en açık şekliyle anlattım). Bu nedenle eğer **Romberg**'in yanındaysanız sorun değil ama onu dışarıdan anlamaya çalışırsanız bazı sorunlar yaşarsınız. Eğer buna seviye ve zaman farklarını da eklerseniz **Romberg**'in neden ketum kaldığını anlarsınız. Bu yönüyle **Romberg**'in bize üniversitede ders veren, özellikle Almanyadan gelen, profesörlerden pek bir farkı yok gözükür!

2. Notasyon Sorunu. Tez 2 bölümden oluşur ve **Romberg** ilk bölümde tüm yaklaşıklıkları büyük harflerle yazarken 2. bölümde küçük harflerle yazar (ki notasyon sorununu ortadan kaldırabilmek için 2 bölüm halinde ele aldığım bu tezdeki tüm yaklaşıklıkları büyük harflerle gösterdim) ama her 2 bölümdeki $F(x) = f(x)$ fonksiyonları, $T_1 = t_1, T_2 = t_2, T_4 = t_4, T_8 = t_8$ trapez yaklaşıklıkları ve $U_1 = u_1, U_2 = u_2, U_4 = u_4$ orta nokta yaklaşıklıkları aynıdır (ki **Romberg**'in [son tablo](#)daki ilk sütunda trapez ve orta nokta yaklaşıklıklarını yazması büyük bir talihsizlik olmuştur. Çünkü bu yaklaşıklıklar kalan terimlerdi ve bunlar r kalanına göre gösterilmesi gerekiyordu. Örneğin t_1 yerine $r(t_1)$, u_1 yerine $r(u_1)$ vb. gibi).

3. Hatalar. Tezin başındaki ve sonundaki bilgilere göre, tez Bay [Sigmund Selberg](#) tarafından 14 Şubat 1955 tarihinde Ortak Toplantıda sunuldu (Fremlagt i Fellesmøtet 14de februar 1955 av herr S. Selberg) ve Komisyon Başkanı [F. Bruns Bokhandel](#) tarafından 28 Nisan 1955'te Trondheim'daki [Aktietrykkeriet](#)'te (baskı şirketi) basıldı (Trykt 28de april 1955 I kommisjon hos F. Bruns Bokhandel Aktietrykkeriet i Trondheim). Bu aşamalarda teze dışarıdan herhangi bir müdahale edilmediğine göre, o zaman tezdeki tüm hatalar **Romberg**'e aittir. Tezin ilk bölümünde 1 hata dışında hiç hata yokken 2 sayfaya (ki A3'te 1 sayfa. Bkz. S. 4) sıkıştırdığı 2. bölümünde şu hatalar vardır: Aşağıdaki Tablo 2.1'de gördüğünüz gibi bazı katsayılar ve $z = 8hn x - 4h$ olması gereken değişken dönüşümlerden biri $x = 8hn - 4hz$ şeklinde yanlış verilmişti. İşin kötüsü bu çalışmayı açıklayan bilgiler yetersizdi ve başka bir yerde bulabilmek mümkün değildi!

4. Birinci Çoğul Şahıs Kullanımı. **Romberg** tezinde kullandığı yöntemlerde (**Ole Amble**'in yöntemi hariç) "Metodumuz (unsere Methode)" diyerek 1. çoğul şahıs eki kullanır. Eğer durum ciddiye o zaman bu yöntemleri tek başına keşfetmediğini gösterir (ki ben de makalelerimde 1. çoğul şahıs eki kullanırım ama bunu bilginin doğruluğunu onaylatma anlamında yaparım).

Şimdi geriye dönersem şu sonuçların çıktığını görüyorum: Her yerde aradığım **Romberg**'in tezini 23.12.2018'de Prof. [Byrnjulf Owren](#)'den aldım ve o da 2011'de **Romberg**'in tezi hakkında bir makale yazması nedeniyle bir meslektaşından almış. Dikkatinizi çekerim, aynı yıl yüksek lisans tezi yazan [Alexander Thomaso](#)'da **Romberg**'in tezi yoktu (Bkz. "[Bölüm 1: Kalan Terimsiz Romberg İntegrali Yöntemi](#)", S. 1, Dipnot 1 ve 2). Olay da bu makaleden sonra başlıyor zaten. 2018'de **Romberg**'in tezinin sonundaki EK'teki çalışmaya dikkat etmemiştim ve her şey yolunda zannediyordum ama bu ilk makaleden sonra EK'teki yöntemi anlamaya çalışınca bazı tuhaf şeylerin olduğunu fark ettim. İlk **Romberg**'in tezini 25.12.2018, 23:47:57'de temize çektikten sonra EK'teki çalışmada [2 hata](#) yapmışım: İlk $t_1 = \frac{8h}{2}(f_{4h} + f_{-4h})$ yazmam gerekirken h yerine k yazarak $t_1 = \frac{8h}{2}(f_{4k} + f_{-4k})$ yazmam ve ikincisi 4. sayfadaki [yeşil tablo](#)daki trapez yaklaşıklıklarına ait kalanların ve bunlara Richardson ekstrapolasyonunun uygulanmasıyla elde edilen ekstrapolasyonik yaklaşıklıklarındaki a, b, c ve d katsayıları "- (eksi)" işaretli olması gerekirken, dalgınlıkla mevcut olmayan katsayılardaki "— (tire)" işaretiyle karıştırıp bu işaretleri koymamamdır (Bkz. S. 36). Hadi ilkin kopyalama hatası diyebiliriz ama ikinci hata yani ekstrapolasyonik trapez yaklaşıklıklarındaki a, b, c ve d katsayılarına "- (eksi)" işaretini koymamam yöntemi anlamadığımı, sadece kopyalamaya çalıştığımı gösterir. Ancak şimdi yönteme baktığımda **Romberg** anlatmıyor sanki sabote ediyor gibiydi. Çünkü onun 1 sayfada anlatmaya çalıştığı şeyi ben burada 26 sayfadır sürdürdüm. Neden? EK'teki yöntemi açık bir şekilde ve tüm yönleriyle ele aldığım için böyle oldu ama 20. sayfaya geldiğimde kısa süreli bir şok geçirmedim değil. Anlaşıldığı kadarıyla **Romberg** bu çalışmayı ileride açmak ve onu değerlendirmek üzere tezin sonunda yer vermiş, dolayısıyla sadece bulgularını ve sonuçlarını yayınlamıştı!

Nitekim bunun böyle olduğunu tezin sonundaki **Ole Amble**'in yönteminden elde edilen [2. tablo](#) ya da [turuncu tablonun](#) hemen altındaki şu açıklamalarda görebilirsiniz: "Q₈'in 8 ondalık doğrulukla $I = 1$ 'e (ve **Ole Amble**'in dış noktalardan oluşan yaklaşıklıkları için [2. tablo](#)daki $\hat{Q}_8$ 'in 10 basamak doğrulukla bile $I = 1$ 'e) karşılık geldiğini görebiliriz. Hangi yöntemi kullanacağınız tamamen f_k 'nın nasıl hesaplanabileceğine bağlıdır. Eğer bulmaları kolaysa, daha ince bir bölme kullanmak daha iyidir. Sayısal hesaplamaları çok fazla çalışma gerektiriyorsa, burada belirttiğimiz gibi yüksek yaklaşımlı bir yöntem (2. Yöntem) önerilir.

(Wir sehen, dass Q₈ mit I in 8, $\hat{Q}_8$ sogar in 10 Dezimalen übereinstimmt. Welche Methode man verwendet, hängt ganz davon ab, wie sich die F_k berechnen lassen. Sind sie leicht zu finden, teilt man besser feiner ein. Erfordert ihre numerische Berechnung viel Arbeit, dann empfiehlt sich eine Methode hoher Näherung, wie wir sie hier angeben haben)."

Buna ek olarak **Romberg**'in [yeşil tablonun](#) altında da şu açıklamalarda bulunur:

"Ayrıca u ve t 'yi izleyen yaklaşımların değişen işaretlerini de (yani trapez ve orta nokta yaklaşıklıklarının kalan terimlerinin zıt işaretli olması) görebiliriz.

Yöntemimiz daha yüksek mertebeden yaklaşımları basit bir şekilde sağlar. Bununla birlikte, bazen bir aralık parçasındaki düşük dereceli bir yaklaşım diğer aralık parçasındaki yaklaşımı telafi edebilir. Bu durumda teoremlerimiz her bir aralık parçası için geçerlidir (ki **Romberg**'in bu sonuçları bir makinede (MADAS ATG20) gözlemlendiği anlaşılıyor).

(Man erkennt auch das abwechselnde Vorzeichen der an u und an t sich anschliessenden Näherungen.

Unsere Methode liefert auf einfache Weise die Näherungen höherer Ordnung. Trotzdem kann gelegentlich eine Näherung niedriger Ordnung im einen Intervallteil das des anderen Intervallteiles kompensiert. Unsere Sätze gelten dann für jeden der einzelnen Intervallteile)."

İşte bu şartlar altında geriye tek bir seçenek kalıyordu. O da bu çalışmadaki **Romberg** tarafından verilen yöntemi çözmek. Her ne kadar [rombergintegrali.org](#) adlı web sitem bir kurumu temsil etmiyorsa da benim için son derece kritik bir çalışmaydı ve makalenin bazı yerlerinde verdiğim tarihler bu çalışmanın kilometre taşlarını gösterir. Keşke **Romberg** ilk bölümdeki yöntemler için [mavi tablo](#) ve [turuncu tabloyu](#) verdiği gibi EK'teki yöntem için de bir tablo verseydi, o zaman Tablo 2.2'deki (ilk sütundaki) sonuçları görür ve **Romberg**'in yukarıdaki sözlerinden daha da emin olabilirdik. Fakat tüm olumsuzluklara rağmen **Romberg**'in tezini "[Vereinfachte numerische Integration \(Basitleştirilmiş Sayısal İntegral\)](#), [Det Konglige Norske Videnskabers Selskabs Forhandling](#), Bind 28, 1955, Nr. 7"de düzelttim (ki orijinal tez için linkteki dosyanın ilk sayfasındaki yeşil başlığa tıklayınız) ve bu tezdeki EK'ten önceki yöntemi "[Bölüm 1: Kalan Terimsiz Romberg İntegrali Yöntemi](#)"nde ve EK'teki yöntemi bu makalede "[Bölüm 2: Kalan Terimli Romberg İntegrali Yöntemi](#)" başlığı altında verdim!

2.1. Giriş.....	1
2.1.1. Aritmetik Ortalamalar	2
2.1.2. İndirgeme Bağintıları.....	2
2.2. Trapez ve Orta Nokta Yaklaşıklıklarının Kalan Terimleriyle Birlikte Hesapları	3
2.2.1. Kalan Terimlerin Hesapları	4
2.2.2. Tablo 2.1'in Genişletilmesi	5
2.3. Kalan Terimli Trapez ve Orta Nokta Formülleri.....	6
1. Geleneksel Anlayış	6
2. <i>Romberg</i> 'in Anlayışı	7
2.4. Kalan Terimli Trapez ve Orta Nokta Yaklaşıklıklarının İntegrallere Göre Hesapları	8
1. Yöntem.....	9
2. Yöntem.....	11
2.5. Sonuç.....	13
2.5.1. MADAS Masaüstü Hesap Makinesi	13
2.5.1.1. $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{T}_4, \tilde{T}_8$ ve $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \tilde{U}_4$ Yaklaşıklıklarının MADAS ATG 20'de Hesaplanması.....	14
2.5.1.1.1. T_1, T_2, T_4, T_8 Trapez ve U_1, U_2, U_4 Orta Nokta Yaklaşıklıklarının MADAS ATG 20'deki Hesapları	14
2.5.1.1.2. $K(T_1), K(T_2), K(T_4), K(T_8)$ ve $K(U_1), K(U_2), K(U_4)$ Kalan Terimlerinin MADAS ATG 20'deki Hesapları.....	16
2.5.2. Norveç'in İlk Elektronik Bilgisayarı: NUSSE.....	18
2.5.2.1. <i>Ole Amble</i> 'in Algoritmasını 70 Yıl Sonra En Mükemmel Hale Getirdim ve Geliştirdim!.....	18
2.5.3. $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{T}_4, \tilde{T}_8$ ve $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \tilde{U}_4, \tilde{U}_8$ Yaklaşıklıkları Hakkında	18
1. $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{T}_4, \tilde{T}_8$ ve $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \tilde{U}_4, \tilde{U}_8$ Yaklaşıklıklarının Taylor Serilerine Açılımları	19
2. $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{T}_4, \tilde{T}_8$ ve $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \tilde{U}_4, \tilde{U}_8$ Yaklaşıklıklarına Richardson Ekstrapolasyonunun Uygulanması	19
2.5.4. Süper Yakınsama.....	22
2.5.5. <i>Romberg</i> ve <i>Pamuktulum</i> : Kalan Terimlerin Serilerinde 2. Tür Lineer E-ATA Ekstrapolasyonlarını Yakalamak.....	23
2.5.6. Kalan Terimli Trapez ve Orta Nokta Yaklaşıklıklarının Yakınsakları.....	24
2.5.7. <i>Romberg</i> 'in Richardson Ekstrapolasyonunu Kullanması Hakkında	25
2.5.7.1. Trapez Formüllerini Araştırırken	26
2.5.7.2. Takabe Algoritması	26

2.1. Giriş. Bu yeni yöntem hakkında **Romberg**, “*EK (ANHANG): Kalan Terim Serisini Hesaplama (Zur Berechnung der Restglied-Reihen)*” başlığının altında şu açıklamayı yapar: “Uzunluğu $8h$ olan n aralıktan birini seçiyoruz ve 0 koordinat noktasını (orijin) $x = 8hn - 4hz$ (ki doğrusu $z = 8hnx - 4h$ olacaktı) ile aralığın orta noktasına dönüştürüyoruz. $8h$ uzunluğundaki bu alt aralık üzerindeki I integralinin yaklaşık değerlerini küçük harflerle ve $F(x) = f(z)$ ile gösteriyoruz (ki F ile f aynı fonksiyonlar olduğundan makalede sadece “ f ” ile gösterilecektir).”

Bu açıklamadan sonra **Romberg** şöyle devam eder: $f(z)$ fonksiyonunun $z = 0$ noktasındaki Taylor serisine açılımı (Maclaurin serisi) (bkz. (2.5.8.3))

$$(2.1) \quad f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} f^{(m)}(0) \cdot \frac{z^m}{m!}$$

olduğundan

$$(2.2) \quad I = \int_{-4h}^{4h} f(z) dz = 8h \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(2m)}(0)}{(2m+1)!} \cdot (4h)^{2m}$$

ve

$$(2.3) \quad T_1 = \frac{8h}{2} (f_{4h} + f_{-4h}) = 8h \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(2m)}(0)}{(2m)!} \cdot (4h)^{2m}$$

serilerine göre I 'ya yakınsayan **Ole Amble'in** yöntemindeki gibi ama K kalan teriminde zıt işaretli $\tilde{T}_1$ trapez ve $\tilde{U}_1$ orta nokta yaklaşıklıkları (ki $U_1 = 8hf_0$) mevcuttur:

$$(2.4) \quad \tilde{T}_1 = T_1 - K(T_1) = T_1 - 8h \sum_{m=1}^{\infty} f^{(2m)}(0) \frac{(4h)^{2m}}{(2m+1)!} (2m), \quad \tilde{U}_1 = U_1 + K(U_1) = U_1 + 8h \sum_{m=1}^{\infty} f^{(2m)}(0) \frac{(4h)^{2m}}{(2m+1)!}$$

Bunlar bize aşağıdaki tablodaki (yeşil tablo) katsayılara sahip formdaki serileri verir:

$$(2.5) \quad K = 8h \left(f^{(2)}(0) \frac{h^2}{3!} a + f^{(4)}(0) \frac{h^4}{5!} b + f^{(6)}(0) \frac{h^6}{7!} c + f^{(8)}(0) \frac{h^8}{9!} d + \dots \right).$$

Fakat bu tablodaki orta nokta yaklaşıklıklarına ait bazı katsayılar hatalıdır:

(2.5) Formundaki K Kalanlarının Katsayıları				
	a	b	c	d
$K(U_1)$	16	256	4096	65536
$K(U_2)$	4	176	3648	63232
$K(U_4)$	1	51	1541	36007
$K(T_1)$	32	1024	24576	524288
$K(T_2)$	8	384	10240	229376
$K(T_4)$	2	104	3296	83072
$K(T_8)$	$\frac{1}{2}$	$26\frac{1}{2}$	$877\frac{1}{2}$	$23532\frac{1}{2}$
$K(V_2)$	$\frac{4.4 - 16}{3} = 0$	$\frac{4.176 - 256}{3} = 149\frac{1}{3}$	$\frac{4.3648 - 4096}{3} = 3498\frac{2}{3}$	$\frac{4.63232 - 65536}{3} = 62464$
$K(V_4)$	$\frac{4.1 - 4}{3} = 0$	$\frac{4.51 - 176}{3} = 9\frac{1}{3}$	$\frac{4.1541 - 3648}{3} = 838\frac{2}{3}$	$\frac{4.36007 - 63232}{3} = 26932$
$K(S_2)$	$\frac{4.8 - 32}{3} = 0$	$\frac{4.384 - 1024}{3} = 170\frac{2}{3}$	$\frac{4.10240 - 24576}{3} = 5461\frac{1}{3}$	$\frac{4.229376 - 524288}{3} = 131072$
$K(S_4)$	$\frac{4.2 - 8}{3} = 0$	$\frac{4.104 - 384}{3} = 10\frac{2}{3}$	$\frac{4.3296 - 10240}{3} = 981\frac{1}{3}$	$\frac{4.83072 - 229376}{3} = 34304$
$K(S_8)$	$\frac{4.\frac{1}{2} - 2}{3} = 0$	$\frac{4.26\frac{1}{2} - 104}{3} = \frac{2}{3}$	$\frac{4.877\frac{1}{2} - 3296}{3} = 71\frac{1}{3}$	$\frac{4.23532\frac{1}{2} - 83072}{3} = 3686$
$K(W_4)$		$\frac{16.9\frac{1}{3} - 149\frac{1}{3}}{15} = 0$	$\frac{16.838\frac{2}{3} - 3498\frac{2}{3}}{15} = 661\frac{1}{3}$	$\frac{16.29932 - 62464}{15} = 27763\frac{1}{5}$
$K(R_4)$		$\frac{16.10\frac{2}{3} - 170\frac{2}{3}}{15} = 0$	$\frac{16.981\frac{1}{3} - 5461\frac{1}{3}}{15} = 682\frac{2}{3}$	$\frac{16.34304 - 131072}{15} = 27852\frac{4}{5}$
$K(R_8)$		$\frac{16.\frac{2}{3} - 10\frac{2}{3}}{15} = 0$	$\frac{16.71\frac{1}{3} - 981\frac{1}{3}}{15} = 10\frac{2}{3}$	$\frac{16.3686 - 34304}{15} = 1644\frac{4}{5}$
$K(Q_8)$			$\frac{64.10\frac{2}{3} - 682\frac{2}{3}}{63} = 0$	$\frac{64.1644\frac{4}{5} - 27852\frac{4}{5}}{63} = 1228\frac{4}{5}$

Tablo 2.1. Bu tablodaki 0 olan yerler ve mevcut olmayan katsayılar orijinal tezdeki son tabloda “—” ile gösterilmiştir. Tablodaki kırmızı renkli rakamlar ölümcül hatayı, mavi renkli rakamlar hesap sırasında unutulmuş ama iyi bilinen rakamı ve yeşil renkli rakamlar hesap sonunda karıştırılan rakamları gösterir.

2.1.1. Aritmetik Ortalamalar. Genel olarak $i = 0, 1, 2, 3$ için

$$(2.6) \quad \tilde{T}_{2^i} = T_{2^i} - K(T_{2^i}), \tilde{U}_{2^i} = U_{2^i} + K(U_{2^i})$$

kalan terimli trapez ve orta nokta yaklaşıklıklarında bulunan

$$(2.7) \quad T_{2^{i+1}} = \frac{T_{2^i} + U_{2^i}}{2}$$

kalan terimsiz yaklaşıklıklarında aritmetik ortalama geçerli olduğu gibi (bkz. [\(2.9.2.5\)](#)'in altındaki bağıntıya),

$$(2.8) \quad \tilde{T}_{2^{i+1}} = \frac{\tilde{T}_{2^i} + \tilde{U}_{2^i}}{2}$$

kalan terimli yaklaşıklıklarında da aritmetik ortalama geçerlidir.

Buna göre örneğin $i = 0$ için

$$T_2 - K(T_2) = \tilde{T}_2 = \frac{\tilde{T}_1 + \tilde{U}_1}{2} = \frac{T_1 - K(T_1) + U_1 + K(U_1)}{2} = \frac{T_1 + U_1}{2} - \frac{K(T_1) - K(U_1)}{2}$$

aritmetik ortalama bağıntısı geçerlidir ve $T_2 = \frac{T_1 + U_1}{2}$ aritmetik ortalaması geçerli olduğundan

$$K(T_2) = \frac{K(T_1) - K(U_1)}{2}$$

sonucu geçerli olur ve işleme $i = 2, 3$ için devam edilirse kalan terimler arasındaki aritmetik ortalama (ki aradaki eksi işareti trapez yaklaşıklıklarının kalan terimlerinden gelir) şöyle ortaya çıkar:

$$(2.9) \quad K(T_2) = \frac{K(T_1) - K(U_1)}{2}, K(T_4) = \frac{K(T_2) - K(U_2)}{2}, K(T_8) = \frac{K(T_4) - K(U_4)}{2}.$$

İşte bu eşitliklerinden ikincisine göre $K(T_2)$ 'nin c katsayısı $c = 10240$ ve $K(T_4)$ 'ün $c = 3296$ olduğundan $K(U_2)$ 'nin c katsayısı $\frac{10240-c}{2} = 3296$ eşitliğinden 3649 değil $c = 3648$ olur. Bu, tablodaki ölümcül hatayı gösterir. Çünkü tablodaki trapez ve orta nokta yaklaşıklıklarına ait K kalanlarındaki a, b, c ve d katsayıları doğru olmadan yöntemi araştırmak nafil bir çaba olur. Tablodaki bu ve diğer hatalar makale müsvedde kâğıttan daktiloya aktarılırken meydana gelmedi; müsvedde kâğıtta da vardı. Anlaşılan o ki, **Romberg** makaleyi daktiloya çektirirken bir dizi anlaşmazlık yaşamış. Örneğin I integrali makalede doğru bir şekilde yazılırken (ki 9 kez yazılmıştır) “[EK \(ANHANG\)](#)”te “i” olarak yazılmıştır (ki 4 kez yazılmıştır) ve bu da konuya yabancı olanların kafasını karıştırabilir!

2.1.2. İndirgeme Bağıntıları. Eğer (2.9)'daki eşitliklerdeki kalan terimlerde indirgeme yaparsak,

$$K(T_4) = \frac{\frac{K(T_1) - K(U_1)}{2} - K(U_2)}{2} = \frac{K(T_1) - K(U_1) - 2K(U_2)}{4}$$

ve

$$K(T_8) = \frac{\frac{K(T_1) - K(U_1) - 2K(U_2)}{4} - K(U_4)}{2} = \frac{K(T_1) - K(U_1) - 2K(U_2) - 4K(U_4)}{8}$$

eşitliklerinden (2.9)'daki ilk eşitlikle birlikte

$$(2.10) \quad K(T_2) = \frac{K(T_1) - K(U_1)}{2}, K(T_4) = \frac{K(T_1) - K(U_1) - 2K(U_2)}{4}, K(T_8) = \frac{K(T_1) - K(U_1) - 2K(U_2) - 4K(U_4)}{8}$$

ya da $i = 1, 2, 3$ için

$$(2.11) \quad \sum_{k=0}^{i-1} \frac{K(U_{2^k})}{2^{i-k}} = K(T_1) - K(T_{2^i})$$

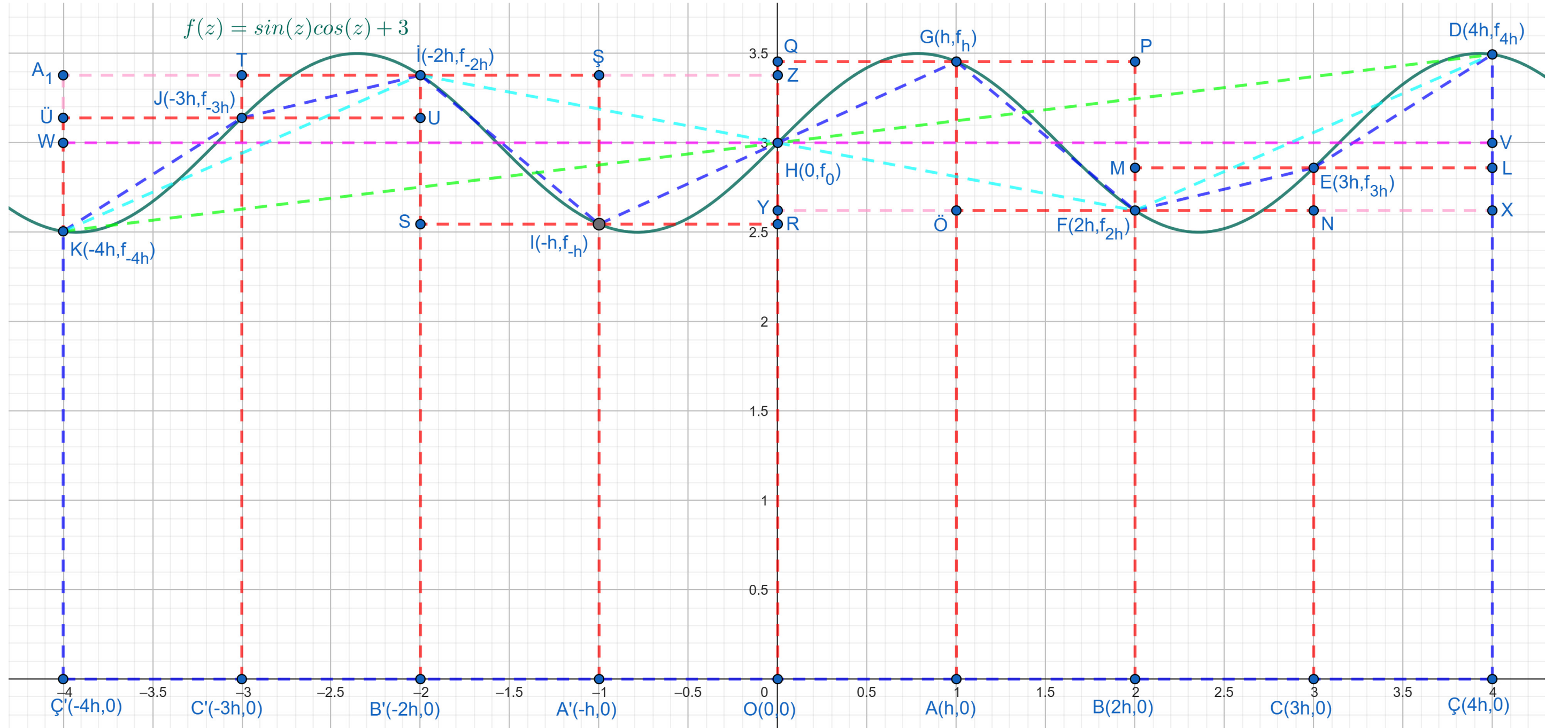
bağıntıları geçerli olur.

Eğer bu son bağıntıyı

$$(2.12) \quad \sum_{k=0}^{i-1} \frac{K(U_{2^{i-k}})}{2^{k+1}} = K(T_1) - K(T_{2^i})$$

şeklinde yazarsak [\(1.28\)](#) ya da [\(1.29\)](#)'daki bağıntıya benzer. Ayrıca tablodaki her K kalanındaki a, b, c ve d katsayılarında $32|K(T_1), 16|K(T_1) + 2K(T_2), 8|K(T_1) + 2K(T_2) + 4K(T_4), 4|K(T_1) + 2K(T_2) + 4K(T_4) + 8K(T_8)$ ve $16|K(U_1), 8|K(U_1) + 2K(U_2), 4|K(U_1) + 2K(U_2) + 4K(U_4)$ olması bu katsayılar arasındaki güçlü bağları gösterir!

2.2. Trapez ve Orta Nokta Yaklaşıklıklarının Kalan Terimleriyle Birlikte Hesapları. $f(z)$ fonksiyonunun $[-4h, 4h]$ aralığında tanımlı $\tilde{T}_1 = T_1 - K(T_1)$, $\tilde{T}_2 = T_2 - K(T_2)$, $\tilde{T}_4 = T_4 - K(T_4)$, $\tilde{T}_8 = T_8 - K(T_8)$ trapez ve $\tilde{U}_1 = U_1 + K(U_1)$, $\tilde{U}_2 = U_2 + K(U_2)$, $\tilde{U}_4 = U_4 + K(U_4)$ orta nokta yaklaşıkliklarını hesaplayabilmek için şu grafiğe ihtiyaç vardır:



Şekil 2.1. Romberg $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{T}_4, \tilde{T}_8$ trapez ve $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \tilde{U}_4$ orta nokta yaklaşıkliklarını hesaplayabilmek için uzunluğu $8h = b - a$ olan n aralıktan birini seçti ve $n = 1$ için seçtiği aralığın orta noktasını başlangıç noktası ve uç noktalarını (2.2)'deki integralin sınırlarına göre $-4h$ ve $4h$ aldı (Bkz. “Trapez Yöntemi (8 Eşit Bölmeli)”).

Şekle göre ilkin Ç'ÇDK trapezinin alanı $\frac{f_{4h} + f_{-4h}}{2} \cdot 8h$ olduğundan

$$(2.13) \quad T_1 = \frac{8h}{2} (f_{4h} + f_{-4h})$$

şeklinde yazabiliriz. Bu Ç'ÇDK trapezine yapılan bir ilk yaklaşımı gösterir ve $K(T_1)$ kalan teriminin seriye açılımı (2.4)'teki ilk seri ya da (2.15)'teki seridir. Aynı şekilde, eğer O orta noktasını göz önüne alırsak Ç'ÇVW dikdörtgeninin alanından $U_1 = 8hf_0$ şeklinde bir yaklaşıklık daha geçerli olacaktır ve $K(U_1)$ kalan teriminin seriye açılımı (2.2) yani (2.4)'teki ya da (2.14)'teki gibidir!

2.2.1. Kalan Terimlerin Hesapları. Şekil 2.1'e göre ilkin trapez ve orta nokta yaklaşıklıklarına ait kalan terimlerin nasıl hesaplandıklarını yani bu kalan terimlere ait serilerin nasıl bulunduklarını göstereceğim.

Ananas Ekspres gibi!

Şimdi $K(T_1), K(T_2), K(T_4), K(T_8)$ trapez ve $K(U_1), K(U_2), K(U_4)$ orta nokta kalan terimlerinin hesaplarına geçmeden önce, **Romberg** ilk kalan terimlerin serilerini şöyle seçiyor: İlkin (2.2)'deki I 'ya yakınsayan

$$(2.14) \quad K(U_1) = 8h \sum_{m=0}^{\infty} f^{(2m)}(0) \frac{(4h)^{2m}}{(2m+1)!}$$

serisini alıyor ve (2.3)'teki T_1 'e, daha doğrusu kalan terimine ait seriden bunu çıkartarak (ki bu işlemi kalan terimli trapez yaklaşıklıklarının işaretlerini “-” aldığından ters şekilde yapar) şu sonuca varıyor:

$$(2.15) \quad 8h \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(2m)}(0)}{(2m)!} \cdot (4h)^{2m} - 8h \sum_{m=0}^{\infty} f^{(2m)}(0) \frac{(4h)^{2m}}{(2m+1)!} = 8h \sum_{m=0}^{\infty} f^{(2m)}(0) \frac{(4h)^{2m}}{(2m+1)!} (2m) = 8h \sum_{m=1}^{\infty} f^{(2m)}(0) \frac{(4h)^{2m}}{(2m+1)!} (2m) = K(T_1).$$

Fakat $K(T_1)$ 'in seriye açılımı (2.3)'te verilmesine rağmen **Romberg**'in (2.4) veya (2.15)'i seçmesi ilk başta kafa karıştırıcı gibi gelse de bunu Richardson ekstrapolasyonu için yapar. Çünkü bunlar Tablo 2.1'de görüldüğü üzere Richardson ekstrapolasyonunda sıfırlamayı başlatan serilerdir!

İkinci olarak Şekil 2.1'de $[Ç'O]$ 'nın orta noktası B' olup apsisi $\frac{-4h}{2} = -2h$ ve bunun $f(z)$ eğrisindeki değeri İ noktasındaki f_{-2h} ve $[OÇ]$ 'nin orta noktası B'deki $\frac{4h}{2} = 2h$ ve bunun da $f(z)$ eğrisindeki değeri F'deki f_{2h} olduklarından her 2 bölgedeki **Ç'OZ_A** ve **OÇXY** dikdörtgenlerinin alanlarının toplamı $U_2 = 4hf_{-2h} + 4hf_{2h} = \frac{8h}{2}(f_{-2h} + f_{2h})$ yani

$$(2.16) \quad U_2 = \frac{8h}{2}(f_{-2h} + f_{2h})$$

olarak elde edilir.

Şimdi (2.1)'e göre $\frac{f_{-z}+f_z}{2}$ merkez fonksiyonunu seriye açar ve z yerine 2h alırsak

$$(2.17) \quad \frac{f_{-2h} + f_{2h}}{2} = f(0) + f''(0) \frac{h^2}{3!} \cdot 12 + f^{(4)}(0) \frac{h^4}{5!} \cdot 80 + f^{(6)}(0) \frac{h^6}{7!} \cdot 448 + f^{(8)}(0) \frac{h^8}{9!} \cdot 2304 + \dots$$

serisini buluruz ve bunu (2.16)'da yerine koyar ve (2.2)'deki

$$(2.18) \quad I = 8h \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(2m)}(0)}{(2m+1)!} \cdot (4h)^{2m} = 8hf(0) + 8h \left(f''(0) \frac{h^2}{3!} \cdot 16 + f^{(4)}(0) \frac{h^4}{5!} \cdot 256 + f^{(6)}(0) \frac{h^6}{7!} \cdot 4096 + f^{(8)}(0) \frac{h^8}{9!} \cdot 65536 + \dots \right)$$

serisinden bunu çıkartırsak

$$(2.19) \quad K(U_2) = 8h \left(f''(0) \frac{h^2}{3!} \cdot 4 + f^{(4)}(0) \frac{h^4}{5!} \cdot 176 + f^{(6)}(0) \frac{h^6}{7!} \cdot 3648 + f^{(8)}(0) \frac{h^8}{9!} \cdot 63232 + \dots \right)$$

elde ederiz ki bunun katsayıları Tablo 2.1'deki gibidir (21.04.2025, 04:31).

Buna karşılık O orta noktasına göre **Ç'OHK** ve **OÇDH** trapezlerinin alanlarının toplamı $T_2 = \frac{f_{-4h}+f_0}{2} \cdot 4h + \frac{f_0+f_{4h}}{2} \cdot 4h = \frac{8h}{4}(f_{-4h} + f_{4h}) + 4hf_0 = \frac{T_1}{2} + \frac{U_1}{2} = \frac{T_1+U_1}{2}$, dolayısıyla

$$(2.20) \quad T_2 = \frac{8h}{4}(f_{-4h} + f_{4h}) + 4hf_0 = \frac{T_1 + U_1}{2}$$

yaklaşıklığı geçerli olur. Burada 2. eşitlikte aritmetik ortalama geçerli olduğundan **Romberg** $K(T_2)$ 'yi seriye açmak için (2.9)'daki ilk aritmetik ortalamayı kullanır.

Buna göre (2.14) ve (2.15)'ten

$$K(T_2) = \frac{K(T_1) - K(U_1)}{2} = \frac{1}{2} \left(8h \sum_{m=1}^{\infty} f^{(2m)}(0) \frac{(4h)^{2m}}{(2m+1)!} (2m) - 8h \sum_{m=1}^{\infty} f^{(2m)}(0) \frac{(4h)^{2m}}{(2m+1)!} \right) = 8h \sum_{m=1}^{\infty} f^{(2m)}(0) \frac{(4h)^{2m}}{(2m+1)!} \cdot \frac{2m-1}{2}$$

olduğundan

$$(2.21) \quad K(T_2) = 8h \sum_{m=1}^{\infty} f^{(2m)}(0) \frac{(4h)^{2m}}{(2m+1)!} \cdot \frac{2m-1}{2} = 8h \left(f''(0) \frac{h^2}{3!} \cdot 8 + f^{(4)}(0) \frac{h^4}{5!} \cdot 384 + f^{(6)}(0) \frac{h^6}{7!} \cdot 10240 + f^{(8)}(0) \frac{h^8}{9!} \cdot 229376 + \dots \right)$$

serisi elde edilir.

Üçüncü olarak U_4 yaklaşıklığı Şekil 2.1'e göre **Ç'B'UÜ**, **B'ORS**, **OBPQ** ve **BÇLM** dikdörtgenlerinin alanlarının toplamı olduğundan yani

$$U_4 = f_{-3h} \cdot 2h + f_{-h} \cdot 2h + f_h \cdot 2h + f_{3h} \cdot 2h = \frac{8h}{4}(f_{-3h} + f_{3h}) + \frac{8h}{4}(f_{-h} + f_h)$$

eşitliklerinden

$$(2.22) \quad U_4 = \frac{8h}{4}(f_{-3h} + f_{3h}) + \frac{8h}{4}(f_{-h} + f_h)$$

elde edilir. Bu eşitliklerde (2.1)'e göre

$$(2.23) \quad \begin{cases} \frac{f_{-3h} + f_{3h}}{2} = f(0) + f''(0)\frac{h^2}{3!} \cdot 27 + f^{(4)}(0)\frac{h^4}{5!} \cdot 405 + f^{(6)}(0)\frac{h^6}{7!} \cdot 5103 + f^{(8)}(0)\frac{h^8}{9!} \cdot 59049 + \dots, \\ \frac{f_{-h} + f_h}{2} = f(0) + f''(0)\frac{h^2}{3!} \cdot 3 + f^{(4)}(0)\frac{h^4}{5!} \cdot 5 + f^{(6)}(0)\frac{h^6}{7!} \cdot 7 + f^{(8)}(0)\frac{h^8}{9!} \cdot 9 + \dots \end{cases}$$

serileri mevcuttur.

Eğer bu serileri (2.22)'de yerine koyar ve (2.2) ya da (2.18)'deki seriden bunu çıkartırsak

$$(2.24) \quad K(U_4) = 8h \left(f''(0)\frac{h^2}{3!} \cdot 1 + f^{(4)}(0)\frac{h^4}{5!} \cdot 51 + f^{(6)}(0)\frac{h^6}{7!} \cdot 1541 + f^{(8)}(0)\frac{h^8}{9!} \cdot 36007 + \dots \right)$$

elde ederiz ki bunun katsayıları da Tablo 2.1'deki gibi olur.

Diğer taraftan T_4 yaklaşıklığı Şekil 1'e göre Ç'B'İK, B'OHİ, OBFH ve BÇDF trapezlerinin alanlarının toplamı olduğundan

$$(2.25) \quad \begin{aligned} T_4 &= \frac{f_{-4h} + f_{-2h}}{2} \cdot 2h + \frac{f_{-2h} + f_0}{2} \cdot 2h + \frac{f_0 + f_{2h}}{2} \cdot 2h + \frac{f_{2h} + f_{4h}}{2} \cdot 2h = \frac{8h}{8}(f_{-4h} + f_{4h}) + \frac{8h}{4}(f_{-2h} + f_{2h}) + \frac{8h}{4}f_0 = \frac{T_1}{4} + \frac{U_2}{2} + \frac{U_1}{4} = \frac{T_1 + U_1}{2} + \frac{U_2}{2} \\ &= \frac{T_2}{2} + \frac{U_2}{2} = \frac{T_2 + U_2}{2} \end{aligned}$$

dir. Burada yine son eşitlikte aritmetik ortalama geçerli olduğundan (2.9)'daki 2. bağıntıda (2.19) ve (2.21)'i koyarsak

$$\begin{aligned} K(T_4) &= \frac{K(T_2) - K(U_2)}{2} = \frac{1}{2} \left[8h \left(f''(0)\frac{h^2}{3!} \cdot 8 + f^{(4)}(0)\frac{h^4}{5!} \cdot 384 + f^{(6)}(0)\frac{h^6}{7!} \cdot 10240 + f^{(8)}(0)\frac{h^8}{9!} \cdot 229376 + \dots \right) - 8h \left(f''(0)\frac{h^2}{3!} \cdot 4 + f^{(4)}(0)\frac{h^4}{5!} \cdot 176 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + f^{(6)}(0)\frac{h^6}{7!} \cdot 3648 + f^{(8)}(0)\frac{h^8}{9!} \cdot 63232 + \dots \right) \right] = 8h \left(f''(0)\frac{h^2}{3!} \cdot 8 + f^{(4)}(0)\frac{h^4}{5!} \cdot 384 + f^{(6)}(0)\frac{h^6}{7!} \cdot 10240 + f^{(8)}(0)\frac{h^8}{9!} \cdot 229376 + \dots \right) \end{aligned}$$

eşitliklerinden şu seri ortaya çıkar:

$$(2.26) \quad K(T_4) = 8h \left(f''(0)\frac{h^2}{3!} \cdot 2 + f^{(4)}(0)\frac{h^4}{5!} \cdot 104 + f^{(6)}(0)\frac{h^6}{7!} \cdot 3296 + f^{(8)}(0)\frac{h^8}{9!} \cdot 83072 + \dots \right).$$

Son olarak T_8 yaklaşıklığı Şekil 2.1'e göre Ç'C'JK, C'B'İJ, B'A'İİ, A'OHİ, OAGH, ABFG, BCEF ve CÇDE trapezlerinin alanlarının toplamı olduğundan

$$\begin{aligned} T_8 &= \frac{f_{-4h} + f_{-3h}}{2} \cdot h + \frac{f_{-3h} + f_{-2h}}{2} \cdot h + \frac{f_{-2h} + f_{-h}}{2} \cdot h + \frac{f_{-h} + f_0}{2} \cdot h + \frac{f_0 + f_h}{2} \cdot h + \frac{f_h + f_{2h}}{2} \cdot h + \frac{f_{2h} + f_{3h}}{2} \cdot h + \frac{f_{3h} + f_{4h}}{2} \cdot h = \frac{8h}{16}(f_{-4h} + f_{4h}) + \frac{8h}{8}(f_{-3h} + f_{3h}) \\ &+ \frac{8h}{8}(f_{-2h} + f_{2h}) + \frac{8h}{8}(f_{-h} + f_h) + \frac{8h}{8}f_0 = \frac{T_1}{8} + \frac{U_2}{4} + \frac{U_4}{2} + \frac{U_1}{8} = \frac{T_1 + U_1}{8} + \frac{U_2}{4} + \frac{U_4}{2} = \frac{T_2}{4} + \frac{U_2}{4} + \frac{U_4}{2} = \frac{T_2 + U_2}{4} + \frac{U_4}{2} = \frac{T_4}{2} + \frac{U_4}{2} = \frac{T_4 + U_4}{2} \end{aligned}$$

dir ve son eşitlikte yine aritmetik ortalama mevcut olduğundan (2.9)'daki 3. bağıntıda (2.24) ve (2.26)'yı koyarsak

$$\begin{aligned} K(T_8) &= \frac{K(T_4) - K(U_4)}{2} = \frac{1}{2} \left[8h \left(f''(0)\frac{h^2}{3!} \cdot 2 + f^{(4)}(0)\frac{h^4}{5!} \cdot 104 + f^{(6)}(0)\frac{h^6}{7!} \cdot 3296 + f^{(8)}(0)\frac{h^8}{9!} \cdot 83072 + \dots \right) - 8h \left(f''(0)\frac{h^2}{3!} \cdot 1 + f^{(4)}(0)\frac{h^4}{5!} \cdot 51 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + f^{(6)}(0)\frac{h^6}{7!} \cdot 1541 + f^{(8)}(0)\frac{h^8}{9!} \cdot 36007 + \dots \right) \right] = 8h \left(f''(0)\frac{h^2}{3!} \cdot \frac{1}{2} + f^{(4)}(0)\frac{h^4}{5!} \cdot 26\frac{1}{2} + f^{(6)}(0)\frac{h^6}{7!} \cdot 877\frac{1}{2} + f^{(8)}(0)\frac{h^8}{9!} \cdot 23532\frac{1}{2} + \dots \right) \end{aligned}$$

eşitliklerinden şu seri elde edilir:

$$(2.27) \quad K(T_8) = 8h \left(f''(0)\frac{h^2}{3!} \cdot \frac{1}{2} + f^{(4)}(0)\frac{h^4}{5!} \cdot 26\frac{1}{2} + f^{(6)}(0)\frac{h^6}{7!} \cdot 877\frac{1}{2} + f^{(8)}(0)\frac{h^8}{9!} \cdot 23532\frac{1}{2} + \dots \right).$$

2.2.2. Tablo 2.1'in Genişletilmesi

Eğer diğer kalan terimlerin hesapları için işleme devam edersek U_8 için Şekil 2.1'deki her bir alt aralık 2'ye bölünecek ve U_8 yaklaşıklığı dikdörtgenlerin alanlarının toplamından yani

$$U_8 = f_{-\frac{7h}{2}} \cdot h + f_{-\frac{5h}{2}} \cdot h + f_{-\frac{3h}{2}} \cdot h + f_{-\frac{h}{2}} \cdot h + f_{\frac{h}{2}} \cdot h + f_{\frac{3h}{2}} \cdot h + f_{\frac{5h}{2}} \cdot h + f_{\frac{7h}{2}} \cdot h = \frac{8h}{8} \left(f_{-\frac{7h}{2}} + f_{\frac{7h}{2}} \right) + \frac{8h}{8} \left(f_{-\frac{5h}{2}} + f_{\frac{5h}{2}} \right) + \frac{8h}{8} \left(f_{-\frac{3h}{2}} + f_{\frac{3h}{2}} \right) + \frac{8h}{8} \left(f_{-\frac{h}{2}} + f_{\frac{h}{2}} \right)$$

eşitliklerinden

$$(2.28) \quad U_8 = \frac{8h}{8} \left(f_{-\frac{7h}{2}} + f_{\frac{7h}{2}} \right) + \frac{8h}{8} \left(f_{-\frac{5h}{2}} + f_{\frac{5h}{2}} \right) + \frac{8h}{8} \left(f_{-\frac{3h}{2}} + f_{\frac{3h}{2}} \right) + \frac{8h}{8} \left(f_{-\frac{h}{2}} + f_{\frac{h}{2}} \right)$$

olarak elde edilecektir. Bu eşitlikte şu seriler mevcuttur:

$$(2.29) \quad \begin{cases} \frac{f\left(\frac{-7h}{2}\right) + f\left(\frac{7h}{2}\right)}{2} = f(0) + f''(0) \frac{h^2}{3!} \cdot 36 \frac{3}{4} + f^{(4)}(0) \frac{h^4}{5!} \cdot 750 \frac{5}{16} + f^{(6)}(0) \frac{h^6}{7!} \cdot 12867 \frac{55}{64} + f^{(8)}(0) \frac{h^8}{9!} \cdot 202668 \frac{201}{256} + \dots, \\ \frac{f\left(\frac{-5h}{2}\right) + f\left(\frac{5h}{2}\right)}{2} = f(0) + f''(0) \frac{h^2}{3!} \cdot 18 \frac{3}{4} + f^{(4)}(0) \frac{h^4}{5!} \cdot 195 \frac{5}{16} + f^{(6)}(0) \frac{h^6}{7!} \cdot 1708 \frac{63}{64} + f^{(8)}(0) \frac{h^8}{9!} \cdot 13732 \frac{233}{256} + \dots, \\ \frac{f\left(\frac{-3h}{2}\right) + f\left(\frac{3h}{2}\right)}{2} = f(0) + f''(0) \frac{h^2}{3!} \cdot 6 \frac{3}{4} + f^{(4)}(0) \frac{h^4}{5!} \cdot 25 \frac{5}{16} + f^{(6)}(0) \frac{h^6}{7!} \cdot 79 \frac{47}{64} + f^{(8)}(0) \frac{h^8}{9!} \cdot 230 \frac{169}{256} + \dots, \\ \frac{f\left(\frac{-h}{2}\right) + f\left(\frac{h}{2}\right)}{2} = f(0) + f''(0) \frac{h^2}{3!} \cdot \frac{3}{4} + f^{(4)}(0) \frac{h^4}{5!} \cdot \frac{5}{16} + f^{(6)}(0) \frac{h^6}{7!} \cdot \frac{7}{64} + f^{(8)}(0) \frac{h^8}{9!} \cdot \frac{9}{256} + \dots \end{cases}$$

O halde bu serileri (2.28)'de yerlerine koyar ve (2.18)'deki seriden elde edilen bunu çıkarırsak

$$(2.30) \quad K(U_8) = 8h \left(f''(0) \frac{h^2}{3!} \cdot \frac{1}{4} + f^{(4)}(0) \frac{h^4}{5!} \cdot 13 \frac{3}{16} + f^{(6)}(0) \frac{h^6}{7!} \cdot 431 \frac{53}{64} + f^{(8)}(0) \frac{h^8}{9!} \cdot 11377 \frac{231}{256} + \dots \right)$$

şeklinde Tablo 2.1'de katsayıları verilmeyen yeni bir kalan terim elde ederiz!

Buna göre bir sonraki kalan terim (2.27) ve (2.30)'a göre

$$K(T_{16}) = \frac{K(T_8) - K(U_8)}{2} = \frac{1}{2} \left[8h \left(f''(0) \frac{h^2}{3!} \cdot \frac{1}{2} + f^{(4)}(0) \frac{h^4}{5!} \cdot 26 \frac{1}{2} + f^{(6)}(0) \frac{h^6}{7!} \cdot 877 \frac{1}{2} + f^{(8)}(0) \frac{h^8}{9!} \cdot 23532 \frac{1}{2} + \dots \right) - 8h \left(f''(0) \frac{h^2}{3!} \cdot \frac{1}{4} + f^{(4)}(0) \frac{h^4}{5!} \cdot 13 \frac{3}{16} + f^{(6)}(0) \frac{h^6}{7!} \cdot 431 \frac{53}{64} + f^{(8)}(0) \frac{h^8}{9!} \cdot 11377 \frac{231}{256} + \dots \right) \right] = 8h \left(f''(0) \frac{h^2}{3!} \cdot \frac{1}{8} + f^{(4)}(0) \frac{h^4}{5!} \cdot 6 \frac{21}{32} + f^{(6)}(0) \frac{h^6}{7!} \cdot 222 \frac{107}{128} + f^{(8)}(0) \frac{h^8}{9!} \cdot 6077 \frac{153}{512} + \dots \right)$$

olduğundan şöyle olur:

$$(2.31) \quad K(T_{16}) = 8h \left(f''(0) \frac{h^2}{3!} \cdot \frac{1}{8} + f^{(4)}(0) \frac{h^4}{5!} \cdot 6 \frac{21}{32} + f^{(6)}(0) \frac{h^6}{7!} \cdot 222 \frac{107}{128} + f^{(8)}(0) \frac{h^8}{9!} \cdot 6077 \frac{153}{512} + \dots \right).$$

2.3. Kalan Terimli Trapez ve Orta Nokta Formülleri. 2 farklı hesaplama yöntemi vardır. İlki geleneksel (modern) ve ikincisi **Romberg**'in hesaplama şeklidir.

1. Geleneksel Anlayış. Bu formüller Şekil 2.1'den elde edilebildiği gibi, $j = 0, 1, 2, \dots$ için (1.17) ve (1.19)'da $a = -4h$ ve $8h = b - a$ 'yı alırsak

$$(2.32) \quad T_{2^{j+1}} = \frac{T_{2^j}}{2} + \frac{8h}{2^{j+1}} \sum_{k=1}^{2^j} f\left(-4h + (2k-1) \frac{8h}{2^{j+1}}\right), T_1 = 8h \cdot \frac{f_{-4h} + f_{4h}}{2}, \quad U_{2^j} = \frac{8h}{2^j} \sum_{k=1}^{2^j} f\left(-4h + (2k-1) \frac{8h}{2^{j+1}}\right)$$

formüllerinden de doğrudan elde edilebilir. Buna göre ilk eşitlikteki genel trapez formülünden $j = 0$ için

$$T_2 = T_{2^{0+1}} = \frac{T_{2^0}}{2} + \frac{8h}{2^{0+1}} \sum_{k=1}^{2^0} f\left(-4h + (2k-1) \frac{8h}{2^{0+1}}\right) = \frac{T_1}{2} + \frac{8h}{2} f\left(-4h + (2 \cdot 1 - 1) \frac{8h}{2}\right) = \frac{T_1}{2} + \frac{8h}{2} f(-4h + 4h) = \frac{T_1}{2} + \frac{8h}{2} f(0) = \frac{T_1}{2} + \frac{8h}{2} f_0,$$

$j = 1$ için

$$\begin{aligned} T_4 = T_{2^{1+1}} &= \frac{T_{2^1}}{2} + \frac{8h}{2^{1+1}} \sum_{k=1}^{2^1} f\left(-4h + (2k-1) \frac{8h}{2^{1+1}}\right) = \frac{T_2}{2} + \frac{8h}{4} \sum_{k=1}^2 f\left(-4h + (2k-1) \frac{8h}{4}\right) = \frac{T_2}{2} + \frac{8h}{4} [f(-4h + (2 \cdot 1 - 1)2h) + f(-4h + (2 \cdot 2 - 1)2h)] \\ &= \frac{T_2}{2} + \frac{8h}{4} [f(-4h + 2h) + f(-4h + 6h)] = \frac{T_2}{2} + \frac{8h}{4} (f(-2h) + f(2h)) = \frac{T_2}{2} + \frac{8h}{4} (f_{-2h} + f_{2h}), \end{aligned}$$

$j = 2$ için

$$\begin{aligned} T_8 = T_{2^{2+1}} &= \frac{T_{2^2}}{2} + \frac{8h}{2^{2+1}} \sum_{k=1}^{2^2} f\left(-4h + (2k-1) \frac{8h}{2^{2+1}}\right) = \frac{T_4}{2} + \frac{8h}{8} \sum_{k=1}^4 f\left(-4h + (2k-1) \frac{8h}{8}\right) = \frac{T_4}{2} + \frac{8h}{8} [f(-4h + (2 \cdot 1 - 1)h) + f(-4h + (2 \cdot 2 - 1)h) \\ &+ f(-4h + (2 \cdot 3 - 1)h) + f(-4h + (2 \cdot 4 - 1)h)] = \frac{T_4}{2} + \frac{8h}{8} [f(-4h + h) + f(-4h + 3h) + f(-4h + 5h) + f(-4h + 7h)] = \frac{T_4}{2} + \frac{8h}{8} (f(-3h) + f(-h) \\ &+ f(h) + f(3h)) = \frac{T_4}{2} + \frac{8h}{8} (f_{-3h} + f_{3h}) + \frac{8h}{8} (f_{-h} + f_h) \end{aligned}$$

ve $j = 3$ için

$$\begin{aligned} T_{16} = T_{2^{3+1}} &= \frac{T_{2^3}}{2} + \frac{8h}{2^{3+1}} \sum_{k=1}^{2^3} f\left(-4h + (2k-1) \frac{8h}{2^{3+1}}\right) = \frac{T_8}{2} + \frac{8h}{16} \sum_{k=1}^8 f\left(-4h + (2k-1) \frac{8h}{16}\right) = \frac{T_8}{2} + \frac{8h}{16} \left[f\left(-4h + (2 \cdot 1 - 1) \frac{h}{2}\right) + f\left(-4h + (2 \cdot 2 - 1) \frac{h}{2}\right) \right. \\ &+ f\left(-4h + (2 \cdot 3 - 1) \frac{h}{2}\right) + f\left(-4h + (2 \cdot 4 - 1) \frac{h}{2}\right) + f\left(-4h + (2 \cdot 5 - 1) \frac{h}{2}\right) + f\left(-4h + (2 \cdot 6 - 1) \frac{h}{2}\right) + f\left(-4h + (2 \cdot 7 - 1) \frac{h}{2}\right) + f\left(-4h + (2 \cdot 8 - 1) \frac{h}{2}\right) \left. \right] \\ &= \frac{T_8}{2} + \frac{8h}{16} \left[f\left(-4h + \frac{h}{2}\right) + f\left(-4h + 3 \cdot \frac{h}{2}\right) + f\left(-4h + 5 \cdot \frac{h}{2}\right) + f\left(-4h + 7 \cdot \frac{h}{2}\right) + f\left(-4h + 9 \cdot \frac{h}{2}\right) + f\left(-4h + 11 \cdot \frac{h}{2}\right) + f\left(-4h + 13 \cdot \frac{h}{2}\right) + f\left(-4h + 15 \cdot \frac{h}{2}\right) \right] \\ &= \frac{T_8}{2} + \frac{8h}{16} \left[f\left(-\frac{7h}{2}\right) + f\left(-\frac{5h}{2}\right) + f\left(-\frac{3h}{2}\right) + f\left(-\frac{h}{2}\right) + f\left(\frac{h}{2}\right) + f\left(\frac{3h}{2}\right) + f\left(\frac{5h}{2}\right) + f\left(\frac{7h}{2}\right) \right] = \frac{T_8}{2} + \frac{8h}{16} \left(f_{-\frac{7h}{2}} + f_{\frac{7h}{2}} \right) + \frac{8h}{16} \left(f_{-\frac{5h}{2}} + f_{\frac{5h}{2}} \right) + \frac{8h}{16} \left(f_{-\frac{3h}{2}} + f_{\frac{3h}{2}} \right) \\ &+ \frac{8h}{16} \left(f_{-\frac{h}{2}} + f_{\frac{h}{2}} \right) \end{aligned}$$

formülleri elde edilirken ikinci eşitlikteki genel orta nokta formülünden $j = 0$ için

$$U_1 = U_{2^0} = \frac{8h}{2^0} \sum_{k=1}^{2^0} f\left(-4h + (2k-1)\frac{8h}{2^{0+1}}\right) = 8hf\left(-4h + (2.1-1)\frac{8h}{2}\right) = 8hf(-4h + 4h) = 8hf(0) = 8hf_0,$$

$j = 1$ için

$$\begin{aligned} U_2 = U_{2^1} &= \frac{8h}{2^1} \sum_{k=1}^{2^1} f\left(-4h + (2k-1)\frac{8h}{2^{1+1}}\right) = \frac{8h}{2} \sum_{k=1}^2 f\left(-4h + (2k-1)\frac{8h}{4}\right) = \frac{8h}{2} [f(-4h + (2.1-1)2h) + f(-4h + (2.2-1)2h)] \\ &= \frac{8h}{2} [f(-4h + 2h) + f(-4h + 6h)] = \frac{8h}{2} (f(-2h) + f(2h)) = \frac{8h}{2} (f_{-2h} + f_{2h}), \end{aligned}$$

$j = 2$ için

$$\begin{aligned} U_4 = U_{2^2} &= \frac{8h}{2^2} \sum_{k=1}^{2^2} f\left(-4h + (2k-1)\frac{8h}{2^{2+1}}\right) = \frac{8h}{4} \sum_{k=1}^4 f\left(-4h + (2k-1)\frac{8h}{8}\right) = \frac{8h}{4} [f(-4h + (2.1-1)h) + f(-4h + (2.2-1)h) + f(-4h + (2.3-1)h) \\ &+ f(-4h + (2.4-1)h)] = \frac{8h}{4} [f(-4h + h) + f(-4h + 3h) + f(-4h + 5h) + f(-4h + 7h)] = \frac{8h}{4} (f(-3h) + f(-h) + f(h) + f(3h)) \\ &= \frac{8h}{4} (f_{-3h} + f_{3h}) + \frac{8h}{4} (f_{-h} + f_h) \end{aligned}$$

ve $j = 3$ için

$$\begin{aligned} U_8 = U_{2^3} &= \frac{8h}{2^3} \sum_{k=1}^{2^3} f\left(-4h + (2k-1)\frac{8h}{2^{3+1}}\right) = \frac{8h}{8} \sum_{k=1}^8 f\left(-4h + (2k-1)\frac{8h}{16}\right) = \frac{8h}{8} \left[f\left(-4h + (2.1-1)\frac{h}{2}\right) + f\left(-4h + (2.2-1)\frac{h}{2}\right) + f\left(-4h + (2.3-1)\frac{h}{2}\right) \right. \\ &+ f\left(-4h + (2.4-1)\frac{h}{2}\right) + f\left(-4h + (2.5-1)\frac{h}{2}\right) + f\left(-4h + (2.6-1)\frac{h}{2}\right) + f\left(-4h + (2.7-1)\frac{h}{2}\right) + f\left(-4h + (2.8-1)\frac{h}{2}\right) \left. \right] \\ &= \frac{8h}{8} \left[f\left(-4h + \frac{h}{2}\right) + f\left(-4h + 3\frac{h}{2}\right) + f\left(-4h + 5\frac{h}{2}\right) + f\left(-4h + 7\frac{h}{2}\right) + f\left(-4h + 9\frac{h}{2}\right) + f\left(-4h + 11\frac{h}{2}\right) + f\left(-4h + 13\frac{h}{2}\right) + f\left(-4h + 15\frac{h}{2}\right) \right] \\ &= \frac{8h}{8} \left[f\left(-\frac{7h}{2}\right) + f\left(-\frac{5h}{2}\right) + f\left(-\frac{3h}{2}\right) + f\left(-\frac{h}{2}\right) + f\left(\frac{h}{2}\right) + f\left(\frac{3h}{2}\right) + f\left(\frac{5h}{2}\right) + f\left(\frac{7h}{2}\right) \right] = \frac{8h}{8} (f_{-\frac{7h}{2}} + f_{\frac{7h}{2}}) + \frac{8h}{8} (f_{-\frac{5h}{2}} + f_{\frac{5h}{2}}) + \frac{8h}{8} (f_{-\frac{3h}{2}} + f_{\frac{3h}{2}}) + \frac{8h}{8} (f_{-\frac{h}{2}} + f_{\frac{h}{2}}) \end{aligned}$$

formülleri elde edilir.

Eğer bu trapez ve orta nokta yaklaşıklıklarının hepsini bir arada görmek istersek şu tabloyu verebiliriz:

$$\begin{aligned} T_1 &= 8h \cdot \frac{f_{-4h} + f_{4h}}{2}, \\ T_2 &= \frac{T_1}{2} + \frac{8h}{2} f_0, \\ T_4 &= \frac{T_2}{2} + \frac{8h}{4} (f_{-2h} + f_{2h}), \\ T_8 &= \frac{T_4}{2} + \frac{8h}{8} (f_{-3h} + f_{3h}) + \frac{8h}{8} (f_{-h} + f_h), \\ (2.33) \quad T_{16} &= \frac{T_8}{2} + \frac{8h}{16} (f_{-\frac{7h}{2}} + f_{\frac{7h}{2}}) + \frac{8h}{16} (f_{-\frac{5h}{2}} + f_{\frac{5h}{2}}) + \frac{8h}{16} (f_{-\frac{3h}{2}} + f_{\frac{3h}{2}}) + \frac{8h}{16} (f_{-\frac{h}{2}} + f_{\frac{h}{2}}), \\ &\vdots \\ U_1 &= 8hf_0, \\ U_2 &= \frac{8h}{2} (f_{-2h} + f_{2h}), \\ U_4 &= \frac{8h}{4} (f_{-3h} + f_{3h}) + \frac{8h}{4} (f_{-h} + f_h), \\ U_8 &= \frac{8h}{8} (f_{-\frac{7h}{2}} + f_{\frac{7h}{2}}) + \frac{8h}{8} (f_{-\frac{5h}{2}} + f_{\frac{5h}{2}}) + \frac{8h}{8} (f_{-\frac{3h}{2}} + f_{\frac{3h}{2}}) + \frac{8h}{8} (f_{-\frac{h}{2}} + f_{\frac{h}{2}}), \\ &\vdots \end{aligned}$$

2. Romberg'in Anlayışı. Fakat **Romberg** bunları (2.32)'ye göre değil (1.1)'e göre şu formüllerle hesaplıyordu:

$$(2.34) \quad T_{2^j} = 8h \overline{\sum_{k=0}^{2^j-1} f_{\frac{8}{2^j}k}}, U_{2^j} = 8h \overline{\sum_{k=0}^{2^j-1} f_{\frac{8}{2^j}(k+\frac{1}{2})}}$$

Toplam içlerindeki fonksiyonlar (1.2)'ye göre $f_{\frac{8}{2^j}k} = f\left(-4h + \frac{8}{2^j}k \cdot \frac{8h}{8}\right) = f\left(-4h + \frac{8}{2^j}k \cdot h\right)$ ve $f_{\frac{8}{2^j}(k+\frac{1}{2})} = f\left(-4h + \frac{8}{2^j}\left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{8h}{8}\right) = f\left(-4h + \frac{8}{2^j}\left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot h\right)$ şeklinde tanımlıdır.

Romberg'in örneği yani $j = 0, 1, 2, 3$ için (1.5)'e bakınız ya da açık bir şekilde ilk eşitlikteki genel trapez formülünden $j = 0$ için (ki tanım gereği $f_0 := \frac{f_{-4h} + f_{4h}}{2}$ dir)

$$T_1 = T_{2^0} = 8h \overline{\sum_{k=0}^{2^0-1} f_{\frac{8}{2^0}k}} = 8h \overline{\sum_{k=0}^0 f_{8k}} = 8hf_0 = 8h \cdot \frac{f_{-4h} + f_{4h}}{2},$$

$j = 1$ için

$$T_2 = T_{2^1} = 8h \sum_{k=0}^{\overline{2^1-1}} f_{\frac{8}{2^1}k} = 8h \sum_{k=0}^{\overline{1}} f_{4k} = 8h \cdot \frac{f_0 + f_4}{2} = \frac{8h}{2} f_0 + \frac{8h}{2} f_4 = \frac{T_1}{2} + \frac{8h}{2} f(-4h + 4h) = \frac{T_1}{2} + \frac{8h}{2} f(0) = \frac{T_1}{2} + \frac{8h}{2} f_0,$$

$j = 2$ için

$$\begin{aligned} T_4 = T_{2^2} &= 8h \sum_{k=0}^{\overline{2^2-1}} f_{\frac{8}{2^2}k} = 8h \sum_{k=0}^{\overline{3}} f_{2k} = 8h \cdot \frac{f_0 + f_2 + f_4 + f_6}{4} = \frac{8h}{4} (f_0 + f_4) + \frac{8h}{4} (f_2 + f_6) = \frac{T_2}{2} + \frac{8h}{4} (f(-4h + 2h) + f(-4h + 6h)) \\ &= \frac{T_2}{2} + \frac{8h}{4} (f(-2h) + f(2h)) = \frac{T_2}{2} + \frac{8h}{4} (f_{-2h} + f_{2h}) \end{aligned}$$

ve $j = 3$ için

$$\begin{aligned} T_8 = T_{2^3} &= 8h \sum_{k=0}^{\overline{2^3-1}} f_{\frac{8}{2^3}k} = 8h \sum_{k=0}^{\overline{7}} f_k = 8h \cdot \frac{f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7}{8} = \frac{8h}{8} (f_0 + f_2 + f_4 + f_6) + \frac{8h}{8} (f_1 + f_3 + f_5 + f_7) = \frac{T_4}{2} + \frac{8h}{8} [f(-4h + h) \\ &+ f(-4h + 3h) + f(-4h + 5h) + f(-4h + 7h)] = \frac{T_4}{2} + \frac{8h}{8} [f(-3h) + f(-h) + f(h) + f(3h)] = \frac{T_4}{2} + \frac{8h}{8} (f_{-3h} + f_{3h}) + \frac{8h}{8} (f_{-h} + f_h) \end{aligned}$$

formülleri elde edilirken ikinci eşitlikteki genel orta nokta formülünden $j = 0$ için

$$U_1 = U_{2^0} = 8h \sum_{k=0}^{\overline{2^0-1}} f_{\frac{8}{2^0}(k+\frac{1}{2})} = 8h \sum_{k=0}^{\overline{0}} f_{8k+4} = 8h f_4 = 8h f(-4h + 4h) = 8h f(0) = 8h f_0,$$

$j = 1$ için

$$U_2 = U_{2^1} = 8h \sum_{k=0}^{\overline{2^1-1}} f_{\frac{8}{2^1}(k+\frac{1}{2})} = 8h \sum_{k=0}^{\overline{1}} f_{4k+2} = 8h \cdot \frac{f_2 + f_6}{2} = \frac{8h}{2} (f(-4h + 2h) + f(-4h + 6h)) = \frac{8h}{2} (f(-2h) + f(2h)) = \frac{8h}{2} (f_{-2h} + f_{2h}),$$

$j = 2$ için

$$\begin{aligned} U_4 = U_{2^2} &= 8h \sum_{k=0}^{\overline{2^2-1}} f_{\frac{8}{2^2}(k+\frac{1}{2})} = 8h \sum_{k=0}^{\overline{3}} f_{2k+1} = 8h \cdot \frac{f_1 + f_3 + f_5 + f_7}{4} = \frac{8h}{4} [f(-4h + h) + f(-4h + 3h) + f(-4h + 5h) + f(-4h + 7h)] \\ &= \frac{8h}{4} [f(-3h) + f(-h) + f(h) + f(3h)] = \frac{8h}{4} (f_{-3h} + f_{3h}) + \frac{8h}{4} (f_{-h} + f_h) \end{aligned}$$

ve $j = 3$ için

$$\begin{aligned} U_8 = U_{2^3} &= 8h \sum_{k=0}^{\overline{2^3-1}} f_{\frac{8}{2^3}(k+\frac{1}{2})} = 8h \sum_{k=0}^{\overline{7}} f_{k+\frac{1}{2}} = 8h \cdot \frac{f_{\frac{1}{2}} + f_{\frac{3}{2}} + f_{\frac{5}{2}} + f_{\frac{7}{2}} + f_{\frac{9}{2}} + f_{\frac{11}{2}} + f_{\frac{13}{2}} + f_{\frac{15}{2}}}{8} = \frac{8h}{8} \left[f\left(-4h + \frac{1}{2}h\right) + f\left(-4h + \frac{3}{2}h\right) + f\left(-4h + \frac{5}{2}h\right) + f\left(-4h + \frac{7}{2}h\right) \right. \\ &+ f\left(-4h + \frac{9}{2}h\right) + f\left(-4h + \frac{11}{2}h\right) + f\left(-4h + \frac{13}{2}h\right) + f\left(-4h + \frac{15}{2}h\right) \left. \right] = \frac{8h}{8} \left[f\left(-\frac{7h}{2}\right) + f\left(-\frac{5h}{2}\right) + f\left(-\frac{3h}{2}\right) + f\left(-\frac{h}{2}\right) + f\left(\frac{h}{2}\right) + f\left(\frac{3h}{2}\right) + f\left(\frac{5h}{2}\right) + f\left(\frac{7h}{2}\right) \right] \\ &= \frac{8h}{8} \left(f_{-\frac{7h}{2}} + f_{\frac{7h}{2}} \right) + \frac{8h}{8} \left(f_{-\frac{5h}{2}} + f_{\frac{5h}{2}} \right) + \frac{8h}{8} \left(f_{-\frac{3h}{2}} + f_{\frac{3h}{2}} \right) + \frac{8h}{8} \left(f_{-\frac{h}{2}} + f_{\frac{h}{2}} \right) \end{aligned}$$

formülleri elde edilir.

Bu formüllerin ilk yazım şekli **Kepler**'den (1615) günümüze kadar gelir (bkz. "[Keplersche Fassregel \(Kepler'in Fıçı Kuralı\)](#)"). Bu kural (2.24)'teki Snell algoritmasından kolaylıkla elde edilir ama fıçının hacmiyle ilk ilgilenen **Kepler** değildi. Çünkü **Johann-Hartman Beyer** 1603'te [CAPUT 28](#)'de bir şarap fıçısının hacmini hesaplamıştı. Bkz. "[4.3. Johann-Hartman Beyer'den Şok Edici Sonuçlar](#)", S. 50) ve bu yüzden "**Geleneksel Anlayış**" dedim ve 2. yazım şekline diferansiyel analizörlerden kaynaklandığı ve **Romberg** tarafından kullanıldığı için "**Romberg'in Anlayışı**" dedim (ki bu anlayışın büyük bir kıskançlıkla 20. yy'ın başında Almanyadaki üniversitelerde mevcut olduğunu ama Nazi döneminden sonra her şey sıfırlandığı için unutulup gittiğini düşünüyorum. Bkz. "[Bölüm 1: Kalan Terimsiz Romberg İntegrali Yöntemi](#)").

2.4. Kalan Terimli Trapez ve Orta Nokta Yaklaşıklıklarının İntegrallere Göre Hesapları

Genel olarak $\forall t \in [a, b]$ aralığında tanımlı $f(t)$ fonksiyonu için $t = (b - a)x + a$ değişken dönüşümüne göre

$$(2.35) \quad I = \int_a^b f(t)dt = (b - a) \int_0^1 f((b - a)x + a)dx$$

integraline indirgenebilir ve bu integralde $b - a = 8h$ 'dır ve $z = 8hx - 4h$ ikinci değişken dönüşümüne göre **Romberg**'in integrali elde edilir (28.04.2025, 20:16:38):

$$(2.36) \quad I = 8h \int_0^1 f(a + 8hx)dx \left(= \int_{-4h}^{4h} f\left(z + \frac{a+b}{2}\right)dz \right) =: \int_{-4h}^{4h} f(z)dz.$$

Burada hesaplarda kolaylık olması bakımından $f\left(z + \frac{a+b}{2}\right) =: f(z)$ diyelim, çünkü $\forall t \in [a, b]$ için $f(t) = f\left(z + \frac{a+b}{2}\right)$ olacak şekilde $\exists z \in [-4h, 4h]$ 'dir. Fakat **Romberg** bu gösterimin nedenini açıklamaz; sadece $F(x) = f(z)$ ya da $f(t) = f(z)$ yazarak EK'teki ve öncesindeki ([Bölüm 1](#)) her 2 fonksiyonun aynı olduğunu söyler!

1. Yöntem. (2.36)'daki 2. integral için hesaplanan (2.33)'teki z'ye göre tanımlı yaklaşıklıkları $x = \frac{4h+z}{8h}$ değişkenine göre (2.36)'daki ilk integral ya da (2.35)'teki 2. integral için şöyle hesaplarız:

$$\begin{aligned}
T_1 &= 8h \cdot \frac{f_{-4h} + f_{4h}}{2} = 8h \cdot \frac{f\left(\frac{4h-4h}{8h}\right) + f\left(\frac{4h+4h}{8h}\right)}{2} = 8h \cdot \frac{f(0) + f(1)}{2}, \\
T_2 &= \frac{T_1}{2} + \frac{8h}{2} f_0 = \frac{T_1}{2} + \frac{8h}{2} f\left(\frac{4h+0}{8h}\right) = \frac{T_1}{2} + \frac{8h}{2} f\left(\frac{1}{2}\right), \\
T_4 &= \frac{T_2}{2} + \frac{8h}{4} (f_{-2h} + f_{2h}) = \frac{T_2}{2} + \frac{8h}{4} \left(f\left(\frac{4h-2h}{8h}\right) + f\left(\frac{4h+2h}{8h}\right) \right) = \frac{T_2}{2} + \frac{8h}{4} \left(f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) \right), \\
T_8 &= \frac{T_4}{2} + \frac{8h}{8} (f_{-3h} + f_{3h}) + \frac{8h}{8} (f_{-h} + f_h) = \frac{T_4}{2} + \frac{8h}{8} \left(f\left(\frac{4h-3h}{8h}\right) + f\left(\frac{4h+3h}{8h}\right) \right) + \frac{8h}{8} \left(f\left(\frac{4h-h}{8h}\right) + f\left(\frac{4h+h}{8h}\right) \right) \\
&= \frac{T_4}{2} + \frac{8h}{8} \left(f\left(\frac{1}{8}\right) + f\left(\frac{7}{8}\right) \right) + \frac{8h}{8} \left(f\left(\frac{3}{8}\right) + f\left(\frac{5}{8}\right) \right) = \frac{T_4}{2} + \frac{8h}{8} \left(f\left(\frac{1}{8}\right) + f\left(\frac{3}{8}\right) + f\left(\frac{5}{8}\right) + f\left(\frac{7}{8}\right) \right), \\
T_{16} &= \frac{T_8}{2} + \frac{8h}{16} \left(f_{-\frac{7h}{2}} + f_{\frac{7h}{2}} \right) + \frac{8h}{16} \left(f_{-\frac{5h}{2}} + f_{\frac{5h}{2}} \right) + \frac{8h}{16} \left(f_{-\frac{3h}{2}} + f_{\frac{3h}{2}} \right) + \frac{8h}{16} \left(f_{-\frac{h}{2}} + f_{\frac{h}{2}} \right) \\
&= \frac{T_8}{2} + \frac{8h}{16} \left(f\left(\frac{4h-\frac{7h}{2}}{8h}\right) + f\left(\frac{4h+\frac{7h}{2}}{8h}\right) \right) + \frac{8h}{16} \left(f\left(\frac{4h-\frac{5h}{2}}{8h}\right) + f\left(\frac{4h+\frac{5h}{2}}{8h}\right) \right) + \frac{8h}{16} \left(f\left(\frac{4h-\frac{3h}{2}}{8h}\right) + f\left(\frac{4h+\frac{3h}{2}}{8h}\right) \right) + \frac{8h}{16} \left(f\left(\frac{4h-\frac{h}{2}}{8h}\right) + f\left(\frac{4h+\frac{h}{2}}{8h}\right) \right) \\
&= \frac{T_8}{2} + \frac{8h}{16} \left(f\left(\frac{1}{16}\right) + f\left(\frac{15}{16}\right) \right) + \frac{8h}{16} \left(f\left(\frac{3}{16}\right) + f\left(\frac{13}{16}\right) \right) + \frac{8h}{16} \left(f\left(\frac{5}{16}\right) + f\left(\frac{11}{16}\right) \right) + \frac{8h}{16} \left(f\left(\frac{7}{16}\right) + f\left(\frac{9}{16}\right) \right) \\
&= \frac{T_8}{2} + \frac{8h}{16} \left(f\left(\frac{1}{16}\right) + f\left(\frac{3}{16}\right) + f\left(\frac{5}{16}\right) + f\left(\frac{7}{16}\right) + f\left(\frac{9}{16}\right) + f\left(\frac{11}{16}\right) + f\left(\frac{13}{16}\right) + f\left(\frac{15}{16}\right) \right), \\
&\vdots \\
U_1 &= 8hf_0 = 8hf_0 = 8hf\left(\frac{4h+0}{8h}\right) = 8hf\left(\frac{1}{2}\right), \\
U_2 &= \frac{8h}{2} (f_{-2h} + f_{2h}) = \frac{8h}{2} \left(f\left(\frac{4h-2h}{8h}\right) + f\left(\frac{4h+2h}{8h}\right) \right) = \frac{8h}{2} \left(f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) \right), \\
U_4 &= \frac{8h}{4} (f_{-3h} + f_{3h}) + \frac{8h}{4} (f_{-h} + f_h) = \frac{8h}{4} \left(f\left(\frac{4h-3h}{8h}\right) + f\left(\frac{4h+3h}{8h}\right) \right) + \frac{8h}{4} \left(f\left(\frac{4h-h}{8h}\right) + f\left(\frac{4h+h}{8h}\right) \right) \\
&= \frac{8h}{4} \left(f\left(\frac{1}{8}\right) + f\left(\frac{7}{8}\right) \right) + \frac{8h}{4} \left(f\left(\frac{3}{8}\right) + f\left(\frac{5}{8}\right) \right) = \frac{8h}{4} \left(f\left(\frac{1}{8}\right) + f\left(\frac{3}{8}\right) + f\left(\frac{5}{8}\right) + f\left(\frac{7}{8}\right) \right), \\
U_8 &= \frac{8h}{8} \left(f_{-\frac{7h}{2}} + f_{\frac{7h}{2}} \right) + \frac{8h}{8} \left(f_{-\frac{5h}{2}} + f_{\frac{5h}{2}} \right) + \frac{8h}{8} \left(f_{-\frac{3h}{2}} + f_{\frac{3h}{2}} \right) + \frac{8h}{8} \left(f_{-\frac{h}{2}} + f_{\frac{h}{2}} \right) \\
&= \frac{8h}{8} \left(f\left(\frac{4h-\frac{7h}{2}}{8h}\right) + f\left(\frac{4h+\frac{7h}{2}}{8h}\right) \right) + \frac{8h}{8} \left(f\left(\frac{4h-\frac{5h}{2}}{8h}\right) + f\left(\frac{4h+\frac{5h}{2}}{8h}\right) \right) + \frac{8h}{8} \left(f\left(\frac{4h-\frac{3h}{2}}{8h}\right) + f\left(\frac{4h+\frac{3h}{2}}{8h}\right) \right) + \frac{8h}{8} \left(f\left(\frac{4h-\frac{h}{2}}{8h}\right) + f\left(\frac{4h+\frac{h}{2}}{8h}\right) \right) \\
&= \frac{8h}{8} \left(f\left(\frac{1}{16}\right) + f\left(\frac{15}{16}\right) \right) + \frac{8h}{8} \left(f\left(\frac{3}{16}\right) + f\left(\frac{13}{16}\right) \right) + \frac{8h}{8} \left(f\left(\frac{5}{16}\right) + f\left(\frac{11}{16}\right) \right) + \frac{8h}{8} \left(f\left(\frac{7}{16}\right) + f\left(\frac{9}{16}\right) \right) \\
&= \frac{8h}{8} \left(f\left(\frac{1}{16}\right) + f\left(\frac{3}{16}\right) + f\left(\frac{5}{16}\right) + f\left(\frac{7}{16}\right) + f\left(\frac{9}{16}\right) + f\left(\frac{11}{16}\right) + f\left(\frac{13}{16}\right) + f\left(\frac{15}{16}\right) \right), \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Şu halde bu yaklaşıklıkları toplu olarak şöyle verebiliriz:

$$\begin{aligned}
T_1 &= 8h \cdot \frac{f(0) + f(1)}{2}, \\
T_2 &= \frac{T_1}{2} + \frac{8h}{2} f\left(\frac{1}{2}\right), \\
T_4 &= \frac{T_2}{2} + \frac{8h}{4} \left(f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) \right), \\
T_8 &= \frac{T_4}{2} + \frac{8h}{8} \left(f\left(\frac{1}{8}\right) + f\left(\frac{3}{8}\right) + f\left(\frac{5}{8}\right) + f\left(\frac{7}{8}\right) \right), \\
T_{16} &= \frac{T_8}{2} + \frac{8h}{16} \left(f\left(\frac{1}{16}\right) + f\left(\frac{3}{16}\right) + f\left(\frac{5}{16}\right) + f\left(\frac{7}{16}\right) + f\left(\frac{9}{16}\right) + f\left(\frac{11}{16}\right) + f\left(\frac{13}{16}\right) + f\left(\frac{15}{16}\right) \right), \\
(2.37) \quad &\vdots \\
U_1 &= 8hf\left(\frac{1}{2}\right), \\
U_2 &= \frac{8h}{2} \left(f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) \right), \\
U_4 &= \frac{8h}{4} \left(f\left(\frac{1}{8}\right) + f\left(\frac{3}{8}\right) + f\left(\frac{5}{8}\right) + f\left(\frac{7}{8}\right) \right), \\
U_8 &= \frac{8h}{8} \left(f\left(\frac{1}{16}\right) + f\left(\frac{3}{16}\right) + f\left(\frac{5}{16}\right) + f\left(\frac{7}{16}\right) + f\left(\frac{9}{16}\right) + f\left(\frac{11}{16}\right) + f\left(\frac{13}{16}\right) + f\left(\frac{15}{16}\right) \right), \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Bu yaklaşıklıklar (2.35)'teki 2. integral için geçerlidir (Bkz. “*Sayısal İntegral Yöntemleri: İntegrallerin Etkin Hesaplanması İçin Yöntemler (Numerische Integration – Verfahren zur effizienten Berechnung von Integralen)*”). Başlığında “Diplomarbeit/Diploma Thesis” yazan bu tez **Alexander Thomaso**'nun 2018 tarihli Viyana Üniversitesi'nin Fen Bilimleri Yüksek Lisansı tezidir. Keşke bu teze daha önceden ulaşsaydım, çünkü makalemi bitirip tam yeniden düzenleyecekken 06.05.2025, 11:05'te anılan linkten alıp incelemeye başladım ve şu sonuçlarla karşılaştım: 1) **Thomaso** 76. sayfada başlayan ve 77. sayfadaki tabloda Newton-Cotes formüllerini verirken 4. satırdaki katsayılarla sahip olan formül için şöyle yazar: “*n = 4 için bu Milne kuralı olarak adlandırılır (nadiren Boole kuralı olarak da adlandırılır) (Für n = 4 spricht man von der Milne-Regel (selten auch Boole-Regel))*”. Ama **Romberg**'in araştırmasına göre bu formül **Gauss**'a aittir. **Romberg** bu formülü tezin başında **G¹** ile gösterir. **Thomaso Romberg**'den habersiz değildir çünkü 85. sayfada başlayan “8. Romberg Prosedürü (Romberg-Verfahren)” nı verir ama 123. sayfada başlayan “Bibliyografya (Literaturverzeichnis)” da **Romberg**'in tezi yok. Böylece **Thomaso** bu formülü (ağırlıklı olarak İngilizce) kaynaklarda geçtiği gibi adlandırmak zorunda kalmış ve bunu tez boyunca sürdürmüştür. Bu formülün nasıl elde edildiğini görmek için 96. sayfadaki **Örnek 2 (Beispiel 2)**'ye bakınız. 2) **Thomaso** 15. sayfadaki 2.26'daki tanımda $T_n f(x)$ ile trapez yaklaşıklığının Taylor serisini yazar ve 16. sayfadaki 2.29'daki tanımda $R_{n+1}(x)$ şeklinde kalan terimini ve bunun 17. sayfadaki 2.32'deki tanımında da Lagrange şeklini verir. Bakın hiç şakası yok, eğer **Romberg**'in tezi **Thomaso**'nun elinde olsaydı (2.35)'teki 2. integral için geçerli olan (2.37) ve (2.39)'daki formülleri elde etmeye çalışır, elde edemese bile uğraşır diye düşünüyorum. 3) **Thomaso** 88. sayfada başlayan Teorem 8.3'te (Satz 8.3) $\int_0^1 g(x)dx$ integralini Euler-Maclaurin Toplam Formülü'ne göre yazar. Bu teoreme göre yazdığı integralin eşitindeki $\frac{g(0)+g(1)}{2}$ ifadesine dikkat ettiniz mi? Bu (2.37)'deki T_1 'e karşılık gelir. **Thomaso** 2 terimden oluşan bu ifadeyi Bernoulli sayılarına göre nasıl elde ettiğini 88. sayfanın sonunda gösterir).

Bunlara karşılık gelen kalan terimler

$$\begin{aligned}
 K(T_1) &= 8h \sum_{m=1}^{\infty} f^{(2m)}(0) \frac{(4h)^{2m}}{(2m+1)!} (2m), \\
 K(T_2) &= 8h \sum_{m=1}^{\infty} f^{(2m)}(0) \frac{h^{2m}}{(2m+1)!} \cdot \frac{(2m-1)2^{4m}}{2}, \\
 K(T_4) &= 8h \sum_{m=1}^{\infty} f^{(2m)}(0) \frac{h^{2m}}{(2m+1)!} \cdot \frac{(2m-3)2^{4m} + (4m+2)2^{2m}}{4}, \\
 K(T_8) &= 8h \sum_{m=1}^{\infty} f^{(2m)}(0) \frac{h^{2m}}{(2m+1)!} \cdot \frac{(2m-7)2^{4m} + (4m+2)2^{2m} + (4m+2)3^{2m} + 4m+2}{8}, \\
 K(T_{16}) &= 8h \sum_{m=1}^{\infty} f^{(2m)}(0) \frac{h^{2m}}{(2m+1)!} \cdot \frac{(2m-15)2^{6m} + (4m+2)2^{4m} + (4m+2)6^{2m} + (4m+2)2^{2m} + 2(2m+1)(1+3^{2m}+5^{2m}+7^{2m})}{2^{2m+4}}, \\
 &\vdots \\
 K(U_1) &= 8h \sum_{m=1}^{\infty} f^{(2m)}(0) \frac{(4h)^{2m}}{(2m+1)!}, \\
 K(U_2) &= 8h \sum_{m=1}^{\infty} f^{(2m)}(0) \frac{h^{2m}}{(2m+1)!} 2^{2m} (2^{2m} - (2m+1)), \\
 K(U_4) &= 8h \sum_{m=1}^{\infty} f^{(2m)}(0) \frac{h^{2m}}{(2m+1)!} \left(4^{2m} - \frac{(2m+1)(3^{2m}+1)}{2} \right), \\
 K(U_8) &= 8h \sum_{m=1}^{\infty} f^{(2m)}(0) \frac{h^{2m}}{(2m+1)!} \frac{1}{4^{m+1}} (4^{3m+1} - (2m+1)(1+3^{2m}+5^{2m}+7^{2m})), \\
 &\vdots
 \end{aligned}
 \tag{2.38}$$

olduklarından f 'nin çift mertebeden türevleri $z = 0$ 'da tanımlıdır, dolayısıyla (2.37)'deki yaklaşıklıkların kalan terimlerinin $x = \frac{4h+0}{8h} = \frac{1}{2}$ değerine göre

$$\begin{aligned}
 K(T_1) &= 8h \sum_{m=1}^{\infty} f^{(2m)}\left(\frac{1}{2}\right) \frac{(4h)^{2m}}{(2m+1)!} (2m), \\
 K(T_2) &= 8h \sum_{m=1}^{\infty} f^{(2m)}\left(\frac{1}{2}\right) \frac{h^{2m}}{(2m+1)!} \cdot \frac{(2m-1)2^{4m}}{2}, \\
 K(T_4) &= 8h \sum_{m=1}^{\infty} f^{(2m)}\left(\frac{1}{2}\right) \frac{h^{2m}}{(2m+1)!} \cdot \frac{(2m-3)2^{4m} + (4m+2)2^{2m}}{4}, \\
 K(T_8) &= 8h \sum_{m=1}^{\infty} f^{(2m)}\left(\frac{1}{2}\right) \frac{h^{2m}}{(2m+1)!} \cdot \frac{(2m-7)2^{4m} + (4m+2)2^{2m} + (4m+2)3^{2m} + 4m+2}{8}, \\
 K(T_{16}) &= 8h \sum_{m=1}^{\infty} f^{(2m)}\left(\frac{1}{2}\right) \frac{h^{2m}}{(2m+1)!} \cdot \frac{(2m-15)2^{6m} + (4m+2)2^{4m} + (4m+2)6^{2m} + (4m+2)2^{2m} + 2(2m+1)(1+3^{2m}+5^{2m}+7^{2m})}{2^{2m+4}}, \\
 &\vdots \\
 K(U_1) &= 8h \sum_{m=1}^{\infty} f^{(2m)}\left(\frac{1}{2}\right) \frac{(4h)^{2m}}{(2m+1)!}, \\
 K(U_2) &= 8h \sum_{m=1}^{\infty} f^{(2m)}\left(\frac{1}{2}\right) \frac{h^{2m}}{(2m+1)!} 2^{2m} (2^{2m} - (2m+1)), \\
 K(U_4) &= 8h \sum_{m=1}^{\infty} f^{(2m)}\left(\frac{1}{2}\right) \frac{h^{2m}}{(2m+1)!} \left(4^{2m} - \frac{(2m+1)(3^{2m}+1)}{2} \right), \\
 K(U_8) &= 8h \sum_{m=1}^{\infty} f^{(2m)}\left(\frac{1}{2}\right) \frac{h^{2m}}{(2m+1)!} \frac{1}{4^{m+1}} (4^{3m+1} - (2m+1)(1+3^{2m}+5^{2m}+7^{2m})), \\
 &\vdots
 \end{aligned}
 \tag{2.39}$$

olarak alınması gerekiyor!

2. Yöntem. Eğer I integralini (2.35)'teki ilk integraldeki gibi hesaplamak istersek ilkin (2.2)'deki veya (2.36)'daki 2. integralde ya da z'de tanımlı (2.33)'teki trapez ve orta nokta yaklaşıklıklarını ve bunların (2.38)'deki kalan terimlerini $z = 8hx - 4h$ değişken dönüşümüne göre x'e çıkartarak (2.37) ve (2.39)'daki gibi hesaplıyoruz. Bu size 1. Yöntem'i verir. Şimdi x'e çıkarttığımız (2.37) ve (2.39)'u $t = (b - a)x + a = a + 8hx$ dönüşümüne göre t'ye çıkartıyoruz ve böylece kalan terimleriyle birlikte trapez ve orta nokta yaklaşıklıklarını (2.35)'teki ilk integraldeki gibi yazmış oluyoruz. Bu da size 2. Yöntem'i verir.

Şu hâlde (2.33)'te z'ye göre tanımlı yaklaşıklıklarda sırasıyla $x = \frac{4h+z}{8h}$ ve $t = a + x.8h$ değişken dönüşümlerini yaparsak trapez ve orta nokta yaklaşıklıkları

$$\begin{aligned}
T_1 &= 8h \cdot \frac{f_{-4h} + f_{4h}}{2} = 8h \cdot \frac{f_{\frac{4h-4h}{8h}} + f_{\frac{4h+4h}{8h}}}{2} = 8h \cdot \frac{f_0 + f_1}{2} = 8h \cdot \frac{f(a + 0.8h) + f(a + 1.8h)}{2} = 8h \cdot \frac{f(a) + f(a + b - a)}{2} = 8h \cdot \frac{f(a) + f(b)}{2}, \\
T_2 &= \frac{T_1}{2} + \frac{8h}{2} f_0 = \frac{T_1}{2} + \frac{8h}{2} f_{\frac{4h+0}{8h}} = \frac{T_1}{2} + \frac{8h}{2} f_{\frac{1}{2}} = \frac{T_1}{2} + \frac{8h}{2} f\left(a + \frac{1}{2} \cdot 8h\right), \\
T_4 &= \frac{T_2}{2} + \frac{8h}{4} (f_{-2h} + f_{2h}) = \frac{T_2}{2} + \frac{8h}{4} \left(f_{\frac{4h-2h}{8h}} + f_{\frac{4h+2h}{8h}}\right) = \frac{T_2}{2} + \frac{8h}{4} \left(f_{\frac{1}{4}} + f_{\frac{3}{4}}\right) = \frac{T_2}{2} + \frac{8h}{4} \left(f\left(a + \frac{1}{4} \cdot 8h\right) + f\left(a + \frac{3}{4} \cdot 8h\right)\right), \\
T_8 &= \frac{T_4}{2} + \frac{8h}{8} (f_{-3h} + f_{3h}) + \frac{8h}{8} (f_{-h} + f_h) = \frac{T_4}{2} + \frac{8h}{8} \left(f_{\frac{4h-3h}{8h}} + f_{\frac{4h+3h}{8h}}\right) + \frac{8h}{8} \left(f_{\frac{4h-h}{8h}} + f_{\frac{4h+h}{8h}}\right) = \frac{T_4}{2} + \frac{8h}{8} \left(f_{\frac{1}{8}} + f_{\frac{7}{8}}\right) + \frac{8h}{8} \left(f_{\frac{3}{8}} + f_{\frac{5}{8}}\right) \\
&= \frac{T_4}{2} + \frac{8h}{8} \left(f_{\frac{1}{8}} + f_{\frac{3}{8}} + f_{\frac{5}{8}} + f_{\frac{7}{8}}\right) = \frac{T_4}{2} + \frac{8h}{8} \left(f\left(a + \frac{1}{8} \cdot 8h\right) + f\left(a + \frac{3}{8} \cdot 8h\right) + f\left(a + \frac{5}{8} \cdot 8h\right) + f\left(a + \frac{7}{8} \cdot 8h\right)\right), \\
T_{16} &= \frac{T_8}{2} + \frac{8h}{16} \left(f_{-\frac{7h}{2}} + f_{\frac{7h}{2}}\right) + \frac{8h}{16} \left(f_{-\frac{5h}{2}} + f_{\frac{5h}{2}}\right) + \frac{8h}{16} \left(f_{-\frac{3h}{2}} + f_{\frac{3h}{2}}\right) + \frac{8h}{16} \left(f_{-\frac{h}{2}} + f_{\frac{h}{2}}\right) = \frac{T_8}{2} + \frac{8h}{16} \left(f_{-\frac{4h-7h}{8h}} + f_{\frac{4h+7h}{8h}}\right) + \frac{8h}{16} \left(f_{\frac{4h-5h}{8h}} + f_{\frac{4h+5h}{8h}}\right) \\
&+ \frac{8h}{16} \left(f_{\frac{4h-3h}{8h}} + f_{\frac{4h+3h}{8h}}\right) + \frac{8h}{16} \left(f_{\frac{4h-h}{8h}} + f_{\frac{4h+h}{8h}}\right) = \frac{T_8}{2} + \frac{8h}{16} \left(f_{\frac{1}{16}} + f_{\frac{15}{16}}\right) + \frac{8h}{16} \left(f_{\frac{3}{16}} + f_{\frac{13}{16}}\right) + \frac{8h}{16} \left(f_{\frac{5}{16}} + f_{\frac{11}{16}}\right) + \frac{8h}{16} \left(f_{\frac{7}{16}} + f_{\frac{9}{16}}\right) \\
&= \frac{T_8}{2} + \frac{8h}{16} \left(f_{\frac{1}{16}} + f_{\frac{3}{16}} + f_{\frac{5}{16}} + f_{\frac{7}{16}} + f_{\frac{9}{16}} + f_{\frac{11}{16}} + f_{\frac{13}{16}} + f_{\frac{15}{16}}\right) \\
&= \frac{T_8}{2} + \frac{8h}{16} \left(f\left(a + \frac{1}{16} \cdot 8h\right) + f\left(a + \frac{3}{16} \cdot 8h\right) + f\left(a + \frac{5}{16} \cdot 8h\right) + f\left(a + \frac{7}{16} \cdot 8h\right) + f\left(a + \frac{9}{16} \cdot 8h\right) + f\left(a + \frac{11}{16} \cdot 8h\right) + f\left(a + \frac{13}{16} \cdot 8h\right) + f\left(a + \frac{15}{16} \cdot 8h\right)\right), \\
&\vdots \\
U_1 &= 8hf_0 = 8hf_0 = 8hf_{\frac{4h+0}{8h}} = 8hf_{\frac{1}{2}} = 8hf\left(a + \frac{1}{2} \cdot 8h\right), \\
U_2 &= \frac{8h}{2} (f_{-2h} + f_{2h}) = \frac{8h}{2} \left(f_{\frac{4h-2h}{8h}} + f_{\frac{4h+2h}{8h}}\right) = \frac{8h}{2} \left(f_{\frac{1}{4}} + f_{\frac{3}{4}}\right) = \frac{8h}{2} \left(f\left(a + \frac{1}{4} \cdot 8h\right) + f\left(a + \frac{3}{4} \cdot 8h\right)\right), \\
U_4 &= \frac{8h}{4} (f_{-3h} + f_{3h}) + \frac{8h}{4} (f_{-h} + f_h) = \frac{8h}{4} \left(f_{\frac{4h-3h}{8h}} + f_{\frac{4h+3h}{8h}}\right) + \frac{8h}{4} \left(f_{\frac{4h-h}{8h}} + f_{\frac{4h+h}{8h}}\right) = \frac{8h}{4} \left(f_{\frac{1}{8}} + f_{\frac{7}{8}}\right) + \frac{8h}{4} \left(f_{\frac{3}{8}} + f_{\frac{5}{8}}\right) \\
&= \frac{8h}{4} \left(f_{\frac{1}{8}} + f_{\frac{3}{8}} + f_{\frac{5}{8}} + f_{\frac{7}{8}}\right) = \frac{8h}{4} \left(f\left(a + \frac{1}{8} \cdot 8h\right) + f\left(a + \frac{3}{8} \cdot 8h\right) + f\left(a + \frac{5}{8} \cdot 8h\right) + f\left(a + \frac{7}{8} \cdot 8h\right)\right), \\
U_8 &= \frac{8h}{8} \left(f_{-\frac{7h}{2}} + f_{\frac{7h}{2}}\right) + \frac{8h}{8} \left(f_{-\frac{5h}{2}} + f_{\frac{5h}{2}}\right) + \frac{8h}{8} \left(f_{-\frac{3h}{2}} + f_{\frac{3h}{2}}\right) + \frac{8h}{8} \left(f_{-\frac{h}{2}} + f_{\frac{h}{2}}\right) \\
&= \frac{8h}{8} \left(f_{-\frac{4h-7h}{8h}} + f_{\frac{4h+7h}{8h}}\right) + \frac{8h}{8} \left(f_{\frac{4h-5h}{8h}} + f_{\frac{4h+5h}{8h}}\right) + \frac{8h}{8} \left(f_{\frac{4h-3h}{8h}} + f_{\frac{4h+3h}{8h}}\right) + \frac{8h}{8} \left(f_{\frac{4h-h}{8h}} + f_{\frac{4h+h}{8h}}\right) = \frac{8h}{8} \left(f_{\frac{1}{16}} + f_{\frac{15}{16}}\right) + \frac{8h}{8} \left(f_{\frac{3}{16}} + f_{\frac{13}{16}}\right) \\
&+ \frac{8h}{8} \left(f_{\frac{5}{16}} + f_{\frac{11}{16}}\right) + \frac{8h}{8} \left(f_{\frac{7}{16}} + f_{\frac{9}{16}}\right) = \frac{8h}{8} \left(f_{\frac{1}{16}} + f_{\frac{3}{16}} + f_{\frac{5}{16}} + f_{\frac{7}{16}} + f_{\frac{9}{16}} + f_{\frac{11}{16}} + f_{\frac{13}{16}} + f_{\frac{15}{16}}\right) \\
&= \frac{8h}{8} \left(f\left(a + \frac{1}{16} \cdot 8h\right) + f\left(a + \frac{3}{16} \cdot 8h\right) + f\left(a + \frac{5}{16} \cdot 8h\right) + f\left(a + \frac{7}{16} \cdot 8h\right) + f\left(a + \frac{9}{16} \cdot 8h\right) + f\left(a + \frac{11}{16} \cdot 8h\right) + f\left(a + \frac{13}{16} \cdot 8h\right) + f\left(a + \frac{15}{16} \cdot 8h\right)\right), \\
&\vdots
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilirler ve bunları da toplu olarak şöyle verebiliriz:

$$\begin{aligned}
T_1 &= 8h \cdot \frac{f(a) + f(b)}{2}, \\
T_2 &= \frac{T_1}{2} + \frac{8h}{2} f\left(a + \frac{1}{2} \cdot 8h\right), \\
T_4 &= \frac{T_2}{2} + \frac{8h}{4} \left(f\left(a + \frac{1}{4} \cdot 8h\right) + f\left(a + \frac{3}{4} \cdot 8h\right)\right), \\
T_8 &= \frac{T_4}{2} + \frac{8h}{8} \left(f\left(a + \frac{1}{8} \cdot 8h\right) + f\left(a + \frac{3}{8} \cdot 8h\right) + f\left(a + \frac{5}{8} \cdot 8h\right) + f\left(a + \frac{7}{8} \cdot 8h\right)\right), \\
T_{16} &= \frac{T_8}{2} + \frac{8h}{16} \left(f\left(a + \frac{1}{16} \cdot 8h\right) + f\left(a + \frac{3}{16} \cdot 8h\right) + f\left(a + \frac{5}{16} \cdot 8h\right) + f\left(a + \frac{7}{16} \cdot 8h\right) + f\left(a + \frac{9}{16} \cdot 8h\right) + f\left(a + \frac{11}{16} \cdot 8h\right) + f\left(a + \frac{13}{16} \cdot 8h\right) + f\left(a + \frac{15}{16} \cdot 8h\right)\right), \\
&\vdots \\
U_1 &= 8hf\left(a + \frac{1}{2} \cdot 8h\right), \\
U_2 &= \frac{8h}{2} \left(f\left(a + \frac{1}{4} \cdot 8h\right) + f\left(a + \frac{3}{4} \cdot 8h\right)\right), \\
U_4 &= \frac{8h}{4} \left(f\left(a + \frac{1}{8} \cdot 8h\right) + f\left(a + \frac{3}{8} \cdot 8h\right) + f\left(a + \frac{5}{8} \cdot 8h\right) + f\left(a + \frac{7}{8} \cdot 8h\right)\right), \\
U_8 &= \frac{8h}{8} \left(f\left(a + \frac{1}{16} \cdot 8h\right) + f\left(a + \frac{3}{16} \cdot 8h\right) + f\left(a + \frac{5}{16} \cdot 8h\right) + f\left(a + \frac{7}{16} \cdot 8h\right) + f\left(a + \frac{9}{16} \cdot 8h\right) + f\left(a + \frac{11}{16} \cdot 8h\right) + f\left(a + \frac{13}{16} \cdot 8h\right) + f\left(a + \frac{15}{16} \cdot 8h\right)\right), \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Bunlara karşılık gelen kalan terimlerdeki f' 'nin çift mertebeden türevleri (2.38)'e göre $z = 0$ 'da

$$\begin{aligned}
 K(T_1) &= 8h \sum_{m=1}^{\infty} f_0^{(2m)} \frac{(4h)^{2m}}{(2m+1)!} (2m), \\
 K(T_2) &= 8h \sum_{m=1}^{\infty} f_0^{(2m)} \frac{h^{2m}}{(2m+1)!} \cdot \frac{(2m-1)2^{4m}}{2}, \\
 K(T_4) &= 8h \sum_{m=1}^{\infty} f_0^{(2m)} \frac{h^{2m}}{(2m+1)!} \cdot \frac{(2m-3)2^{4m} + (4m+2)2^{2m}}{4}, \\
 K(T_8) &= 8h \sum_{m=1}^{\infty} f_0^{(2m)} \frac{h^{2m}}{(2m+1)!} \cdot \frac{(2m-7)2^{4m} + (4m+2)2^{2m} + (4m+2)3^{2m} + 4m+2}{8}, \\
 K(T_{16}) &= 8h \sum_{m=1}^{\infty} f_0^{(2m)} \frac{h^{2m}}{(2m+1)!} \cdot \frac{(2m-15)2^{6m} + (4m+2)2^{4m} + (4m+2)6^{2m} + (4m+2)2^{2m} + 2(2m+1)(1+3^{2m}+5^{2m}+7^{2m})}{2^{2m+4}}, \\
 &\vdots \\
 K(U_1) &= 8h \sum_{m=1}^{\infty} f_0^{(2m)} \frac{(4h)^{2m}}{(2m+1)!}, \\
 K(U_2) &= 8h \sum_{m=1}^{\infty} f_0^{(2m)} \frac{h^{2m}}{(2m+1)!} 2^{2m} (2^{2m} - (2m+1)), \\
 K(U_4) &= 8h \sum_{m=1}^{\infty} f_0^{(2m)} \frac{h^{2m}}{(2m+1)!} \left(4^{2m} - \frac{(2m+1)(3^{2m}+1)}{2} \right), \\
 K(U_8) &= 8h \sum_{m=1}^{\infty} f_0^{(2m)} \frac{h^{2m}}{(2m+1)!} \frac{1}{4^{m+1}} (4^{3m+1} - (2m+1)(1+3^{2m}+5^{2m}+7^{2m})), \\
 &\vdots
 \end{aligned}
 \tag{2.41}$$

tanımlı olduklarından $z = 8hx - 4h$ 'ye göre $x = \frac{4h+0}{8h} = \frac{1}{2}$ ve $t = a + x \cdot 8h$ 'ye göre $t = a + \frac{1}{2} \cdot 8h$ için $\underbrace{f_{0+\frac{1}{2}}^{(2m)} = f_{\frac{1}{2}}^{(2m)}}_{x' \text{te tanımlı}} = \underbrace{f^{(2m)}\left(a + \frac{1}{2} \cdot 8h\right)}_{t' \text{de tanımlı}}$ fonksiyonuna göre

$$\begin{aligned}
 K(T_1) &= 8h \sum_{m=1}^{\infty} f^{(2m)}\left(a + \frac{1}{2} \cdot 8h\right) \frac{(4h)^{2m}}{(2m+1)!} (2m), \\
 K(T_2) &= 8h \sum_{m=1}^{\infty} f^{(2m)}\left(a + \frac{1}{2} \cdot 8h\right) \frac{h^{2m}}{(2m+1)!} \cdot \frac{(2m-1)2^{4m}}{2}, \\
 K(T_4) &= 8h \sum_{m=1}^{\infty} f^{(2m)}\left(a + \frac{1}{2} \cdot 8h\right) \frac{h^{2m}}{(2m+1)!} \cdot \frac{(2m-3)2^{4m} + (4m+2)2^{2m}}{4}, \\
 K(T_8) &= 8h \sum_{m=1}^{\infty} f^{(2m)}\left(a + \frac{1}{2} \cdot 8h\right) \frac{h^{2m}}{(2m+1)!} \cdot \frac{(2m-7)2^{4m} + (4m+2)2^{2m} + (4m+2)3^{2m} + 4m+2}{8}, \\
 K(T_{16}) &= 8h \sum_{m=1}^{\infty} f^{(2m)}\left(a + \frac{1}{2} \cdot 8h\right) \frac{h^{2m}}{(2m+1)!} \cdot \frac{(2m-15)2^{6m} + (4m+2)2^{4m} + (4m+2)6^{2m} + (4m+2)2^{2m} + 2(2m+1)(1+3^{2m}+5^{2m}+7^{2m})}{2^{2m+4}}, \\
 &\vdots \\
 K(U_1) &= 8h \sum_{m=1}^{\infty} f^{(2m)}\left(a + \frac{1}{2} \cdot 8h\right) \frac{(4h)^{2m}}{(2m+1)!}, \\
 K(U_2) &= 8h \sum_{m=1}^{\infty} f^{(2m)}\left(a + \frac{1}{2} \cdot 8h\right) \frac{h^{2m}}{(2m+1)!} 2^{2m} (2^{2m} - (2m+1)), \\
 K(U_4) &= 8h \sum_{m=1}^{\infty} f^{(2m)}\left(a + \frac{1}{2} \cdot 8h\right) \frac{h^{2m}}{(2m+1)!} \left(4^{2m} - \frac{(2m+1)(3^{2m}+1)}{2} \right), \\
 K(U_8) &= 8h \sum_{m=1}^{\infty} f^{(2m)}\left(a + \frac{1}{2} \cdot 8h\right) \frac{h^{2m}}{(2m+1)!} \frac{1}{4^{m+1}} (4^{3m+1} - (2m+1)(1+3^{2m}+5^{2m}+7^{2m})), \\
 &\vdots
 \end{aligned}
 \tag{2.42}$$

elde edilir (06.05.2025, 01:35:40). Bunlar **Romberg**'in 70 yıl önceki hesaplarıydı ve hiçbir kaynakta mevcut değildir!

Not 2.1 (Değişmezlik Özelliği). **Romberg** Şekil 2.1'den görüldüğü üzere $[a, b]$ aralığını 8 eş parçaya bölerek trapez ve orta nokta yaklaşıklıklarını (2.40)'ta ve kalan terimlerini (2.42)'de vermişti. Ama bunları aralığın uzunluğu $8hn = b - a$ olmak üzere $z = 8hnx - 4h$ değişken dönüşümünde $n = 1$ için yapmıştı. Çünkü uzunluğu $8h$ olan n aralıktan birini seçmiş ve $n = 1$ için seçtiği bu aralık $z = 8hx - 4h$ 'ye göre z 'de $[-4h, 4h]$ ve ortası noktası $z = 0$ orijini (ki **Romberg**'e göre "0 koordinat (apsis) noktası"), x 'te $[0, 1]$ ve orta noktası $x = \frac{1}{2}$ iken t 'de $[a, b]$ ve orta noktası $t = \frac{a+b}{2}$ 'dir. Buna göre (2.36)'daki ikinci $I = \int_{-4h}^{4h} f(z)dz$ integrali için Şekil 2.1'deki $[-4h, 4h]$ aralığındaki trapez ve orta nokta yaklaşıklıkları, toplu olarak verildiği, (2.33)'te ve kalan terimleri (2.14), (2.15), (2.19), (2.21), (2.24), (2.26), (2.27), (2.30) ve fazladan (2.31)'de ya da toplu olarak verildiği (2.38)'de; (2.35)'teki ikinci ya da (2.36)'daki ilk $I = 8h \int_0^1 f(a + 8hx)dx$ integrali için $[0, 1]$ aralığındaki trapez ve orta nokta yaklaşıklıkları (2.37)'te ve kalan terimleri (2.39)'da verilirken (2.35)'teki ilk $I = \int_a^b f(t)dt$ integrali için $t = (b-a)x + a$ değişken dönüşümüne göre $[a, b]$ aralığındaki trapez ve orta nokta yaklaşıklıkları (2.40)'ta ve kalan terimleri (2.42)'de verilmiştir. Yani **Romberg** 3 farklı dik koordinat sistemi kullanıyor ve koordinat sistemi geçişlerinde kalan terimleriyle birlikte trapez ve orta nokta yaklaşıklarında değişken dönüşümler kullanıyor. Ama bu değişken dönüşümleri yalnızca f fonksiyonları ve çift mertebeden türevleri için kullanılıyor.

Diğer taraftan burada n yine 2 'nin bir kuvveti, dolayısıyla $8n = 2^i$ 'dir (bkz. "[1.4. Romberg'in Diğer Trapez ve Orta Nokta Yaklaşıklıkları](#)") ve eğer trapez ve orta nokta yaklaşıklıkları için (2.40)'ta ve kalan terimleri için (2.42)'de $8h$ 'deki 8 yerine $8n$ ve bunu da 2^i alırsak bu formüller değişmez. Neden? Çünkü $2^i h = b - a$ 'dır!

2.5. Sonuç. Romberg İntegrali Yöntemi'nde kalan terimsiz T_1, T_2, T_4, T_8 trapez ve U_1, U_2, U_4 orta nokta yaklaşıklıklarını 3. sayfadaki **Romberg**'in $R = \int_0^1 \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx$ integral örneğine uygularsak [mavi tablo](#)daki sonuçlar elde edilirken Yöntem 1 ve 2'ye göre kalan terimli $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{T}_4, \tilde{T}_8$ trapez ve $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \tilde{U}_4, \tilde{U}_8$ orta nokta yaklaşıklıklarını aynı örneğe uygularsak şu tablo elde edilir:

Aralık Uzunluğu	Kalan Terim			
	h^8	h^4	h^6	h^8
8h	$\tilde{T}_1 = 0.9999999753$			
	$\tilde{U}_1 = 1.0000000002$			
4h	$\tilde{T}_2 = 0.9999999889$	$\tilde{S}_2 = 0.9999999934$		
	$\tilde{U}_2 = 1.0000000002$	$\tilde{V}_2 = 1.0000000002$		
2h	$\tilde{T}_4 = 0.9999999957$	$\tilde{S}_4 = 0.9999999979$	$\tilde{R}_4 = 0.9999999982$	
	$\tilde{U}_4 = 1.0000000002$	$\tilde{V}_4 = 1.0000000001$	$\tilde{W}_4 = 1.0000000001$	
H	$\tilde{T}_8 = 0.9999999987$	$\tilde{S}_8 = 0.9999999997$	$\tilde{R}_8 = 0.9999999998$	$\tilde{Q}_8 = 0.9999999998$
	$\tilde{U}_8 = 1.0000000001$	$\tilde{V}_8 = 1.0000000003$	$\tilde{W}_8 = 1.0000000002$	$\tilde{X}_8 = 1.0000000002$

Tablo 2.2. $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{T}_4, \tilde{T}_8$ trapez ve $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \tilde{U}_4, \tilde{U}_8$ orta nokta yaklaşıklıklarında $8h = 1$ ve bu yaklaşıklıkların kalan terimlerinde (2.5)'teki gibi 4 terim alındı.

Bu tablodaki sonuçlar [mavi tablo](#)daki sonuçlardan çok daha iyidir, çünkü [Tablo 1.1](#)'deki T_1, T_2, T_4, T_8 trapez ve U_1, U_2, U_4 orta nokta yaklaşıklıkları kalan terimsiz olarak hesaplanırken bu tablodaki $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{T}_4, \tilde{T}_8$ trapez ve $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \tilde{U}_4, \tilde{U}_8$ orta nokta yaklaşıklıkları Yöntem 1 ya da 2'ye göre kalan terimli olarak hesaplanmıştır (Bkz. "[Havie, T. Kuadratiir, Interpolasyon, Ekstrapolasyon ve Rasyonel Yaklaşıklıklar Hakkında Romberg Semineri Tutanakları \(Ed., Proc. of Romberg Seminar on Quadrature, Interpolation, Extrapolation and Rational Approximations\), Trondheim, Norway, 1989](#)". Bu seminerde Trondheim'dan **Tore Håvie** "[Remarks On Some Modified Romberg Algorithms for Numerical Integration, 1986](#)" makalesini geliştirdiği "[Romberg İntegrali ve Klasik Analizi \(Romberg Integration and Classic Analysis\)](#)"nde Romberg İntegrali'ndeki trapez ve orta nokta yaklaşıklıkların ve bunlara ait kesme hatalarının Bernoulli sayılarına bağlı olarak sunumunu yaptı. Özellikle Teorem 2'deki (14) ve (15)'te $T(h)$ trapez ve $U(h)$ orta nokta yaklaşıklıklarını 1. yöntemdeki gibi $[0,1]$ aralığındaki integrallerinin alınması ve hemen ardından verdiği kesme hatalarına ait ispatları son derece dikkat çekicidirler). Burada her 2 yöntemde $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{T}_4, \tilde{T}_8$ trapez ve $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \tilde{U}_4, \tilde{U}_8$ orta nokta yaklaşıklıklarına ait sonuçların aynı çıkmasının nedeni, (2.35)'teki her 2 integralin de aynı olmasıdır. Buna göre T_1, T_2, T_4, T_8 trapez ve U_1, U_2, U_4, U_8 orta nokta yaklaşıklıkları için (2.37) ve (2.40)'taki değerler ile bunlara ait $K(T_1), K(T_2), K(T_4), K(T_8)$ ve $K(U_1), K(U_2), K(U_4), K(U_8)$ kalan terimleri için (2.39) ve (2.42)'deki değerler aynı olurlar, çünkü çakışır!

Hesaplara geçildiğinde tablodaki sonuçlar MADAS ATG20'den alınmıştır. Çünkü kalan terimli $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{T}_4, \tilde{T}_8$ trapez ve $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \tilde{U}_4, \tilde{U}_8$ orta nokta yaklaşıklıkları 2. yönteme göre şu şekilde elde edilmektedir:

$$\begin{aligned}
 (2.43) \quad \left\{ \begin{aligned}
 \tilde{T}_1 &= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi^3}{96\sqrt{2}} - \frac{\pi^5}{15360\sqrt{2}} + \frac{\pi^7}{6881280\sqrt{2}} - \frac{\pi^9}{5945425920\sqrt{2}} \cong 0.99999997526628118261, \\
 \tilde{T}_2 &= \frac{(1+\sqrt{2})\pi}{8} + \frac{\pi^3}{384\sqrt{2}} - \frac{\pi^5}{40960\sqrt{2}} + \frac{\pi^7}{16515072\sqrt{2}} - \frac{\pi^9}{13589544960\sqrt{2}} \cong 0.99999998887080343856, \\
 \tilde{T}_4 &= \frac{(1+\sqrt{2}+\sqrt{4+2\sqrt{2}})\pi}{16} + \frac{\pi^3}{1536\sqrt{2}} - \frac{13\pi^5}{1966080\sqrt{2}} + \frac{103\pi^7}{5284823040\sqrt{2}} - \frac{649\pi^9}{24352464568320\sqrt{2}} \cong 0.99999999565973231603, \\
 \tilde{T}_8 &= \frac{\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{4+2\sqrt{2}}+\sqrt{4+2\sqrt{2}-\sqrt{2}}+\sqrt{4+2\sqrt{2}+\sqrt{2}}\right)\pi}{32} + \frac{\pi^3}{6144\sqrt{2}} - \frac{53\pi^5}{31457280\sqrt{2}} + \frac{39\pi^7}{7516192768\sqrt{2}} - \frac{9413\pi^9}{1246846185897984\sqrt{2}} \\
 &\cong 0.99999999868368058831, \\
 \tilde{U}_1 &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi^3}{192\sqrt{2}} + \frac{\pi^5}{61440\sqrt{2}} - \frac{\pi^7}{41287680\sqrt{2}} + \frac{\pi^9}{47563407360\sqrt{2}} \cong 1.0000000024753256945, \\
 \tilde{U}_2 &= \frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}\pi}{8} - \frac{\pi^3}{768\sqrt{2}} + \frac{11\pi^5}{983040\sqrt{2}} - \frac{19\pi^7}{880803840\sqrt{2}} + \frac{247\pi^9}{12176232284160\sqrt{2}} \cong 1.0000000024486611935, \\
 \tilde{U}_4 &= \frac{\left(\sqrt{4+2\sqrt{2}-\sqrt{2}}+\sqrt{4+2\sqrt{2}+\sqrt{2}}\right)\pi}{16} - \frac{\pi^3}{3072\sqrt{2}} + \frac{17\pi^5}{5242880\sqrt{2}} - \frac{1541\pi^7}{169114337280\sqrt{2}} + \frac{36007\pi^9}{3117115464744960\sqrt{2}} \cong 1.0000000017076288605, \\
 \tilde{U}_8 &= \frac{\left(\sqrt{4+2\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{2}}+\sqrt{4+2\sqrt{2}-\sqrt{2}-\sqrt{2}}+\sqrt{4+2\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{2}}+\sqrt{4+2\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}}\right)\pi}{32} \\
 &\quad - \frac{\pi^3}{12288\sqrt{2}} + \frac{211\pi^5}{251658240\sqrt{2}} - \frac{27637\pi^7}{10823317585920\sqrt{2}} + \frac{2912743\pi^9}{797981558974709760\sqrt{2}} \cong 1.0000000006214415617.
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Buna göre $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{T}_4, \tilde{T}_8$ ve $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \tilde{U}_4, \tilde{U}_8$ 'in (ki **Romberg** bu yaklaşıklıklardan $\tilde{U}_8$ 'i hesaplamadı çünkü [mavi tablo](#)da T_1, T_2, T_4, T_8 trapez ve U_1, U_2, U_4 orta nokta yaklaşıklıklarının değerleri yer alırken U_8 'in değeri bulunmaz) MADAS ATG 20'de 10 basamaklı olarak hesaplanabilmesi için $\pi = 3.141592653$ (ki o saatte 1949'da [ENIAC](#) ile hesaplanan π 'nin 2037 basamağı biliniyordu. Ayrıca $\frac{355}{113} = 3.141592920$ işlemi MADAS hesap makinesi serilerinde çok iyi bilinen bir örnekti. Bu örneğin bir MADAS hesap makinesinde nasıl yapılacağını Tayvanlı **Huang Pengyu** adlı kullanıcının 6 Nisan 2017'de ebay'dan satın aldığı MADAS AZS 20'nin bir yönergesinde görebilirsiniz. O 1960'larda kullanılan MADAS AZS 20'yi neredeyse sıfır ve kılavuzları ve yönergeleriyle birlikte eksiksiz satın aldı. Bu kılavuzlardan biri [355'in 113'e bölümünün MADAS AZS 20'de nasıl yapılacağına ilişkin yönerge](#)ydi. Bu işlemin MADAS ATG 20'de nasıl yapıldığını görebilmek için [şuraya](#) bakınız) ve T_1, T_2, T_4, T_8 ve U_1, U_2, U_4 'teki $\sqrt{2} = 1.414213562$ değerine ve iç içe geçmiş karekökler nedeniyle karekök hesaplayıcı bir algoritmaya ihtiyaç vardır. Çünkü MADAS ATG 20'de π ve $\sqrt{}$ tuşları yoktu, sadece 4 işlem tuşları vardı!

2.5.1. MADAS Masaüstü Hesap Makinesi

"[MADAS](#)" ismi "Çarpma, Otomatik Bölme, Toplama ve Çıkarma (Multiplication, Automatic Division, Addition, & Subtraction)" kelimelerinin baş harflerinden türetilmiştir. Bir elektrik motoruyla çalışan mekanik bir hesap makinesidir ve 4 standart işlevi (çok fazla vınlama ve tıkırtı ile. Bu sesler her ne kadar rahatsız edici olsa da bazıları sever ve o zaman makineyle bütünleşmiş olursunuz. Örnek vermek gerekirse "[Hayatta en çok sevdiği ses, sigorta ofisimdeki polişe basan yazıcıdan çıkan cirt cirt sesi](#)") otomatik olarak yerine getirir.

Madas'ın tasarımı 1950 civarında yeni kalıplı tuşlar ve gri-yeşil renk şeması ile güncellenmiştir. Kasanın alt kısmı yanlardan ve arkadan kapatılmış, böylece motor ve elektrik aksamı tamamen korunmuştur. Mekanizmada sadece küçük değişiklikler yapılmıştır.

1950'lerden kalma 20ATG modeli, çok ayrıntılı bir "tripleks" şaryo ile donatılmış tam otomatik bir masaüstü hesap makinesidir.

Taşıyıcı, seçici temizlemeli (ancak 10'luk aktarımı olmayan) ikinci bir sayaç kaydı ve 20 basamaklı ikinci bir akümülatör kaydı ekler. İkinci akümülatör için 10'luk taşıma mekanizması tamamen şaryo içinde yer alır ve tam genişlikte bir eksantrik mili ve makinenin arkasındaki uzun bir "tambur dişlisi" tarafından tahrik edilir. İkinci akümülatör, çalışan toplamları ve ara sonuçları biriktirmek için doğrudan veya tamamlayıcı modda bağımsız olarak devreye alınabilir veya devreden çıkarılabilir. Kayıt, sağ üstteki başparmak kolu aracılığıyla manuel olarak temizlenir.



MADAS ATG 20 Modeli

Teknoloji: Kademeli tambur, A sınıfı tam otomatik.

Fonksiyonlar: Otomatik çarpma, otomatik bölme, toplama ve çıkarma.

Rakamlar: 10 klavye, 2 × 10 sayaç, 2 × 20 akümülatör.

2 adet 20 haneli sonuç mekanizmasına (2 × 20 akümülatör) ve 2 adet 10 haneli dönüş mekanizmasına (2 × 10 sayaç) sahiptir. Yani girilen sayılar 10 basamağa kadar olabilirken çıkışta 20 basamağa kadar sonuç gösterilebilir. Makine bir bütün olarak toplam 80 rakam gösterir: Taşıyıcıda 20 + 20 + 10 + 10, klavye kaydında 10 ve çarpanda 10.

Hafıza: 30 kelime.

Romberg 1955'te makinenin hafızası için maksimum kayıt yaparak 30 kelime tespit etti. Ama bu henüz bilgisayar hafızasındaki "word (kelime)" anlamında değildi (Bkz. "Bit, Bayt ve Word Kavramları". Bit en küçük hafıza birimi olmak üzere 1 Bayt = 8 Bit ve 1 Word = 2 Bayt = 16 Bit'tir).

Resim 2.1. MADAS ATG 20 masaüstü hesap makinesi. MADAS ATG 20, AT 20 modeli ile aynı mekanik mühendisliğe sahiptir. Ancak yeni ve modern bir gövdeye, gri renge ve kare tuşlara sahiptir. Bu görünüm "B" serisine (BVG 20, BTG 20, BTZG 20 vb.) ait daha sonraki her modelde olacaktır. AT 20 gibi, bu modele de ek bir kayıt cihazı takılmıştır. Bu, genellikle "Kayıt 4 (Register IV)" olarak adlandırılan bir "Akümülatör Ürün Kaydı"dır. Sadece hemen sağındaki bir "başparmak kolu" vasıtasıyla temizlenebilir.

İnsan ve Makine Etkileşiminden Ortaya Çıkan Bir Ürün: Romberg İntegrali Yöntemi

Bu konuda **Romberg** ile 14.10.1996'da Heidelberg'de röportaj yapan **Seiji Fujino**, şu kritik bilgileri verir (Bkz. "**Seiji Fujino: 'Romberg İntegrali'nin Mucidi Werner Romberg ile Bir Röportaj Gerçekleştirdim', 14.10.1996**"):

"Sonrasında profesöre Romberg İntegrali'ni nasıl bulduğunu sordum. O dönem profesörün kullandığı bilgisayar İsviçre malı 'MADAS' adında (MADAS ATG20) bir hesap makinesiymiş ve hafızası yalnızca 30 kelimeyi barındırabiliyormuş. Bir seferinde sayısal integrali Simpson yöntemiyle denediğinde, kesin sonuca bir türlü ulaşamamış. Bu sebeple Gauss-Legendre yöntemiyle denemiş, fakat bu sefer de katsayıları depolarken hafıza doluvermiş. İşte bu şartlar altında 'Romberg İntegrali' fikri aklına gelmiş. Hem kodlaması kolay hem fazla hafıza gerektirmiyor hem de yakınsaklığı bulmak kolay."

Boyutlar: Genişlik 240 MM x Derinlik 305 MM x Yükseklik 230 MM, şaryo genişliği 380 MM.

Ağırlık: 17.2 KG.

Üretim Yılı ve Yeri: 1940-50'ler, Zürih/İsviçre.

Fiyatı: 1958'de Almanya'da 5825 Mark ve yıl içinde ortalama 5330 Mark idi.

2.5.1.1. $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{T}_4, \tilde{T}_8$ ve $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \tilde{U}_4$ Yaklaşıklıklarının MADAS ATG 20'de Hesaplanması. Bu hesaplamalarda ilkin **Romberg**'in tezindeki mavi tablodaki ilk sütundaki giriş değerlerini veren trapez ve orta nokta yaklaşıklıklarının (2.43)'e göre MADAS ATG 20'de nasıl hesaplanmış olduğunu göstereceğim.

2.5.1.1.1. T_1, T_2, T_4, T_8 Trapez ve U_1, U_2, U_4 Orta Nokta Yaklaşıklıklarının MADAS ATG 20'deki Hesapları

Romberg ilkin Nümerik Analiz kitaplarından birinden $\pi = 3.141592653$ değerini alarak MADAS ATG 20'de

$$(2.44) \quad T_1 = \frac{\pi}{4} \cong \frac{3.141592653}{4} = 0.785398163$$

sonucunu buldu ve bunu mavi tablodaki ilk sütundaki ilk satıra yazdı. Fakat bu işlemin sonucu $\frac{3.141592653}{4} = 0.78539816325$ 'dir ve **Romberg** bunu MADAS ATG 20'de görmesine rağmen (ki makineye maksimumda 10 basamaklı sayılar girilebilirken sonuçlar 20 basamağa kadar gösterilebiliyordu) 10 basamak olarak aldı!

Romberg ikinci olarak yine aynı ya da benzer bir kitaptan $\sqrt{2} = 1.414213562$ değerini aldı ve MADAS ATG 20'de

$$(2.45) \quad T_2 = \frac{T_1}{2} + \frac{\pi\sqrt{2}}{8} \cong \frac{0.785398163}{2} + \frac{3.141592653 \times 1.414213562}{8} = 0.392699082 + 0.555360367 = 0.948059449$$

sonucunu buldu ve bunu da mavi tablodaki ilk sütundaki 3. satıra yazdı.

Romberg üçüncü olarak $T_4 = \frac{T_2}{2} + \frac{\pi\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{16}$ işleminde **Newton-Raphson yöntemi**ne göre $\sqrt{4+2\sqrt{2}} =: x$ dersek $f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 2 = 0$ fonksiyonu için

$$(2.46) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{3x_n^4 - 8x_n^2 - 8}{4x_n^3 - 16x_n}$$

iterasyonuyla yaklaşımlarda bulundu. Bu iterasyonu ilk kez kullanan 13. yy'da (1212'den önce) [Şerafettin El Tusi](#) oldu ve **Newton** türev kavramından habersiz olarak, polinomlarda bir algoritma olarak kullandı. **El Tusi**'nin yöntemi Avrupa'ya geçtikten sonra tek fark, bu iterasyonla elde edilen x kökünün basamaklarındaki rakamların teker teker bulunması yerine her bir yaklaşıklığın olduğu gibi alınması ve bu yaklaşıklıkların köke yakınsaması sayesinde rakamların ortaya çıkarılması oldu (Bkz. “*Babil Algoritmasından Modern Kök Algoritmalarına Doğru 4,000 Yıllık Bir Yolculuk*, 2008”, “*Newton Metodu'nun Tarihçesi*”, S. 155-165. **Newton**'un örnekleri için şuraya bakınız: “*Sayısal Denklemlerin Etkin Çözümü (Numeralis Aequationum Affectarum Resolutio)*”, S. 8-14.

İslam'ın Altın Çağı'nda, özellikle 9. ve 10. yüzyıllarda, [Arap matematiği](#) Yunan matematiği (**Arşimet**, **Öklit**, **Apollonius**) ve Hint matematiği (**Aryabhata**, **Brahmagupta**) üzerine inşa edilirken Araplar, Yunan matematik kitaplarını Yunancadan Arapçaya çevirirlerken kendi atalarının çalışmalarına baktıklarının farkında mıydılar? Bir Hadis-i Şerifte “İlim, müminin yitik malıdır, nerede bulursa alır!” denmesinin nedeni bu muydu acaba? Bana göre bu durum sadece Araplara has değil tüm Arap coğrafyası ve İran için geçerlidir. Şaka gibi ama İsrail bu konuda çok gayretli!

Ayrıca bu kitapta bir fonksiyonun köklerini her mertebeden veren algoritmaları “ATA M Algoritmaları Ver. 3” verdim ve bunların sayısının teoride sonsuz tane olduğunu gösteren birçok örnek verdim. Bu vesileyle şimdiden herkesin 19 Mayıs **Atatürk**'ü Anma ve Gençlik ve Spor Bayramı'nı kutlarım. Burada tekrar hatırlatmak gerekirse “M” algoritmanın mertebesini gösterir ve “ATA” **Atatürk**'ü temsil ettiğinden “ATA M” derken aslında “ATAM” diyordum ve bu zorlu alanda bunu söyleyebilmek o kadar kolay değildi).

Buna göre ilk yaklaşıklığı $1 < \sqrt{2} < 2$ olduğundan $2 < \sqrt{6} = \sqrt{4 + 2.1} < \sqrt{4 + 2\sqrt{2}} < \sqrt{4 + 2.2} = \sqrt{8} < 3 =: x_0$ (ya da $\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{4 + 2 \times 1.414213562} = \sqrt{6.828427124} < 3 =: x_0$) seçersek 2. yaklaşıklığı 10 basamakta şu şekilde elde ederiz:

$$x_1 = \frac{3x_0^4 - 8x_0^2 - 8}{4x_0^3 - 16x_0} = \frac{3.3^4 - 8.3^2 - 8}{4.3^3 - 16.3} = \frac{163}{60} = 2\frac{43}{60} \cong 2.716666667.$$

Romberg bu değeri MADAS ATG 20'ye yazarak 3. yaklaşıklık için şu değeri buldu:

$$x_2 = \frac{3x_1^4 - 8x_1^2 - 8}{4x_1^3 - 16x_1} \cong 2.623389822.$$

Ve bu değerle birlikte 4-6. yaklaşıklıklar için şu değerleri buldu:

$$x_3 = \frac{3x_2^4 - 8x_2^2 - 8}{4x_2^3 - 16x_2} \cong 2.613241522, x_4 = \frac{3x_3^4 - 8x_3^2 - 8}{4x_3^3 - 16x_3} \cong 2.613125944, x_5 = \frac{3x_4^4 - 8x_4^2 - 8}{4x_4^3 - 16x_4} \cong 2.613125930.$$

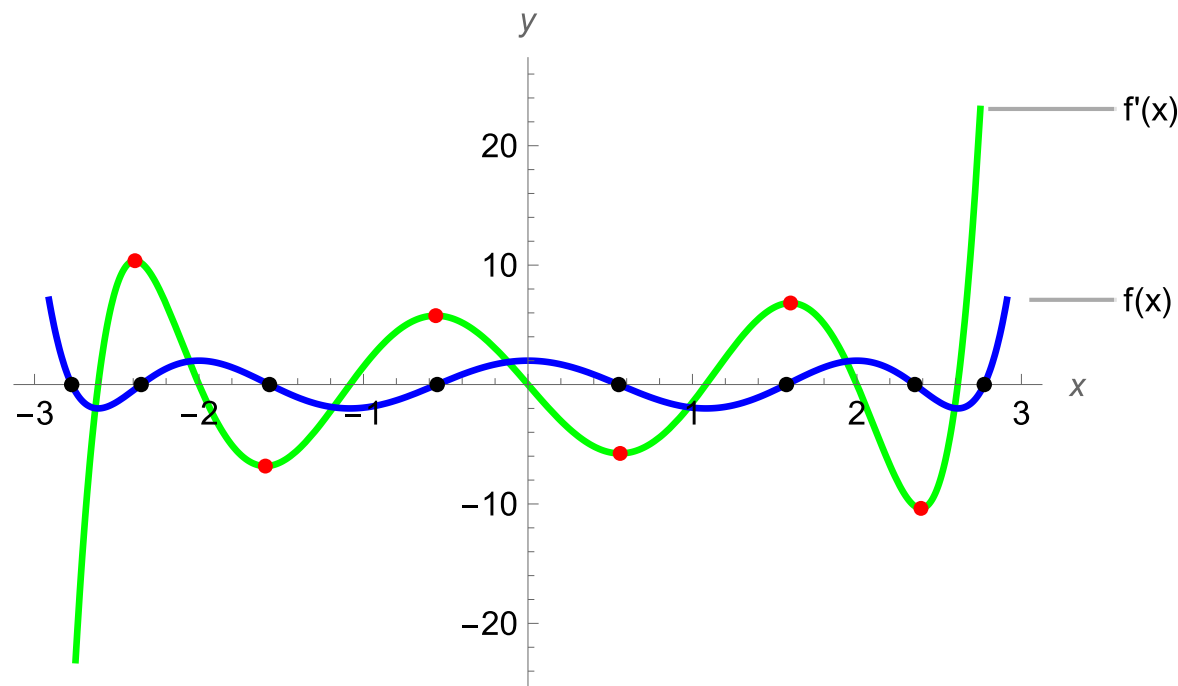
Romberg bundan sonraki yaklaşıklıklar aynı sonuçları verdiğinden, bu son değerle 3. trapez yaklaşıklığın değerini bularak [mavi tablo](#)daki ilk sütundaki 5. satıra yazdı:

$$(2.47) \quad T_4 = \frac{T_2}{2} + \frac{\pi\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}{16} \cong \frac{0.948059449}{2} + \frac{3.141592653 \times 2.613125930}{16} = 0.474029725 + 0.513086076 = 0.987115801.$$

Romberg trapez yaklaşıklıklarında son olarak $T_8 = \frac{T_4}{2} + \frac{\pi(\sqrt{4 + 2\sqrt{2 - \sqrt{2}}} + \sqrt{4 + 2\sqrt{2 + \sqrt{2}}})}{32}$ işleminde yine aynı yöntemle göre ilkin $\sqrt{4 + 2\sqrt{2 \pm \sqrt{2}}} =: x$ dersek $f(x) = \frac{x^8}{16} - x^6 + 5x^4 - 8x^2 + 2 = 0$ fonksiyonu için (ki $\sqrt{4 + 2\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$ ve $\sqrt{4 + 2\sqrt{2 + \sqrt{2}}}$ 'nin her ikisi birden bu denklemin köküdür)

$$(2.48) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{7x_n^8 - 80x_n^6 + 240x_n^4 - 128x_n^2 - 32}{8x_n^7 - 96x_n^5 + 320x_n^3 - 256x_n}$$

iterasyonuyla yaklaşımlarda bulunur. Fakat $\sqrt{4 + 2\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$ ve $\sqrt{4 + 2\sqrt{2 + \sqrt{2}}}$ değerlerine ilk yaklaşımlar doğru bir şekilde belirlenmelidir. Çünkü ilk yaklaşıklıklar doğru şekilde seçilmezlerse $f(x) = 0$ denkleminin diğer kökleri söz konusu olur ve bu iterasyonla hedeflediğiniz bu köklerin yerine diğer kökleri bulursunuz.



Şekil 2.2. Mathematica'da hazırladığım $f(x)$ ve $f'(x)$ 'in grafikleri. Siyah noktalar $f(x) = 0$ denkleminin köklerini ve kırmızı noktalar $f'(x)$ 'in ekstremum noktalarını gösterir. $f'(x)$ kökler arasında işaret değiştirdiğinden kökler ile ekstremum noktaları düşeyde hemen hemen hizalanmış görünürler.

Şu hâlde yukarıdaki şekilde $f'(x)$ 'in kökleri arasında işaret değiştirdiğine dikkat etmeli ve ilk yaklaşıklıklar için $f'(x)$ 'in işaret değiştirdiği ve $\sqrt{4 + 2\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$ ve $\sqrt{4 + 2\sqrt{2 + \sqrt{2}}}$ köklerinin yer aldığı aralıklarda (ki her kök için şekildeki eğrilerin kesiştiği noktalardan oluşan ve içinde kök bulunan aralıklar) birer değer almak yeterli olacaktır. Buna göre $1 < \sqrt{2} < 2$ olduğundan $\sqrt{2 + 1} < \sqrt{2 + \sqrt{2}} < \sqrt{2 + 2} = 2$ eşitsizlikleri geçerli olur ki şekilde sondaki siyah noktayla gösterilen $\sqrt{4 + 2\sqrt{2 + \sqrt{2}}}$ kökü için ilk yaklaşıklığı $2 < x_0 < \sqrt{6} < \sqrt{4 + 2.1} < \sqrt{4 + 2\sqrt{2 + \sqrt{2}}} < \sqrt{4 + 2.2} = \sqrt{8} < 3 =: x_0$ seçebilirken sondan bir önceki siyah noktayla gösterilen $\sqrt{4 + 2\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$ kökü için $0 = \sqrt{2 - 2} < \sqrt{2 - \sqrt{2}} < \sqrt{2 - 1} = 1$ nedeniyle ilk yaklaşıklığı $2 = \sqrt{4 + 2.0} < \sqrt{4 + 2\sqrt{2 - \sqrt{2}}} < \sqrt{4 + 2.1} = \sqrt{6} < 3$ eşitsizliklerine göre $x_0 = 2$ alamayız çünkü (2.48)'deki iterasyonun paydası sıfır olur, dolayısıyla $x_0 = 2\frac{1}{2}$ almamız yeterli olur. Bu değer şekildeki sondaki 2 kökün orta noktasına yakındır.

Şimdi ilk başlangıç değerini $x_0 = 3$ alırsak 2. yaklaşıklığı (2.48)'e göre şöyle elde ederiz:

$$x_1 = \frac{7x_0^8 - 80x_0^6 + 240x_0^4 - 128x_0^2 - 32}{8x_0^7 - 96x_0^5 + 320x_0^3 - 256x_0} = \frac{7 \cdot 2^8 - 80 \cdot 2^6 + 240 \cdot 2^4 - 128 \cdot 2^2 - 32}{8 \cdot 2^7 - 96 \cdot 2^5 + 320 \cdot 2^3 - 256 \cdot 2} = \frac{5863}{2040} = 2 \frac{1783}{2040} \cong 2.874019608.$$

Romberg bu değeri makineye yazarak sırasıyla $x_2 = \frac{7x_1^8 - 80x_1^6 + 240x_1^4 - 128x_1^2 - 32}{8x_1^7 - 96x_1^5 + 320x_1^3 - 256x_1} \cong 2.802612961$, $x_3 = \frac{7x_2^8 - 80x_2^6 + 240x_2^4 - 128x_2^2 - 32}{8x_2^7 - 96x_2^5 + 320x_2^3 - 256x_2} \cong 2.777245984$, $x_4 = \frac{7x_3^8 - 80x_3^6 + 240x_3^4 - 128x_3^2 - 32}{8x_3^7 - 96x_3^5 + 320x_3^3 - 256x_3} \cong 2.774124505$, $x_5 = \frac{7x_4^8 - 80x_4^6 + 240x_4^4 - 128x_4^2 - 32}{8x_4^7 - 96x_4^5 + 320x_4^3 - 256x_4} \cong 2.774079699$ ve $x_6 = \frac{7x_5^8 - 80x_5^6 + 240x_5^4 - 128x_5^2 - 32}{8x_5^7 - 96x_5^5 + 320x_5^3 - 256x_5} \cong 2.774079691$ değerlerini buldu (ki diğer yaklaşıklıkların makinede $x_6 = x_7 = x_8 = \dots \cong 2.774079691$ şeklinde aynen görüntülendiğine dikkat ediniz).

Eğer ikinci başlangıç değerini $x_0 = 2\frac{1}{2}$ alırsak 2. yaklaşıklığı (2.48)'e göre

$$x_1 = \frac{7x_0^8 - 80x_0^6 + 240x_0^4 - 128x_0^2 - 32}{8x_0^7 - 96x_0^5 + 320x_0^3 - 256x_0} = \frac{7 \cdot \left(2\frac{1}{2}\right)^8 - 80 \cdot \left(2\frac{1}{2}\right)^6 + 240 \cdot \left(2\frac{1}{2}\right)^4 - 128 \cdot \left(2\frac{1}{2}\right)^2 - 32}{8 \cdot \left(2\frac{1}{2}\right)^7 - 96 \cdot \left(2\frac{1}{2}\right)^5 + 320 \cdot \left(2\frac{1}{2}\right)^3 - 256 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{78617}{33840} = 2 \frac{10937}{33840} \cong 2.323197340$$

şeklinde elde eder ve bundan sonraki yaklaşıklıkların değerlerini sırasıyla $x_2 = \frac{7x_1^8 - 80x_1^6 + 240x_1^4 - 128x_1^2 - 32}{8x_1^7 - 96x_1^5 + 320x_1^3 - 256x_1} \cong 2.352326322$, $x_3 = \frac{7x_2^8 - 80x_2^6 + 240x_2^4 - 128x_2^2 - 32}{8x_2^7 - 96x_2^5 + 320x_2^3 - 256x_2} \cong 2.35175136$, $x_4 = \frac{7x_3^8 - 80x_3^6 + 240x_3^4 - 128x_3^2 - 32}{8x_3^7 - 96x_3^5 + 320x_3^3 - 256x_3} \cong 2.351751205$ olarak buluruz (ki diğer yaklaşıklıklar makinede $x_4 = x_5 = x_6 = \dots \cong 2.351751205$ şeklinde böyle görüntülendiğine dikkat ediniz).

İşte **Romberg** bu sonuçlara göre 4. trapez yaklaşıklığının değerini 10 basamaklı olarak şöyle elde etti:

$$(2.49) \quad T_8 = \frac{T_4}{2} + \frac{\pi \left(\sqrt{4 + 2\sqrt{2 - \sqrt{2}}} + \sqrt{4 + 2\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \right)}{32} \cong \frac{0.987115801}{2} + \frac{3.141592653 \cdot (2.351751205 + 2.774079691)}{32} \\ = 0.493557901 + 0.503227271 = 0.996785172.$$

Bu sonuç [mavi tablo](#)daki ilk sütundaki 7. satırda yer alır.

İşte bu sonuçlara göre **Romberg** orta nokta yaklaşıklıklarının değerlerini tezinde verdiği $T_2 = \overline{T_1 + U_1}$, $T_4 = \overline{T_2 + U_2}$, $T_8 = \overline{T_4 + U_4}$ ya da (1.6)'daki aritmetik ortalamalardan buldu:

$$(2.50) \quad \begin{cases} U_1 = 2T_2 - T_1 \cong 2 \times 0.948059449 - 0.785398163 = 1.110720735, \\ U_2 = 2T_4 - T_2 \cong 2 \times 0.987115801 - 0.948059449 = 1.026172153, \\ U_4 = 2T_8 - T_4 \cong 2 \times 0.996785172 - 0.987115801 = 1.006454543. \end{cases}$$

Bu sonuçlar [mavi tablo](#)daki ilk sütundaki 2., 4. ve 6. satırlarda bulunur.

Özetle **Romberg** [mavi tablo](#)daki ilk sütundaki trapez ve orta nokta yaklaşıklıklarının 10 basamaklı değerlerini bu şekilde buldu ve sonra bu değerlere Richardson ekstrapolasyonunu iteratif (tekrarlı) şekilde kullanarak diğer sütunlardaki (2., 3. ve 4. sütunlar) değerleri elde etti.

İkinci olarak (2.43)'teki kalan terimlerin hesapları da şöyle yapıldı.

2.5.1.1.2. $K(T_1), K(T_2), K(T_4), K(T_8)$ ve $K(U_1), K(U_2), K(U_4)$ Kalan Terimlerinin MADAS ATG 20'deki Hesapları

Öncelikle (2.43)'teki kalan terimleri MADAS ATG 20'de hesaplanamaz çünkü 10 basamağı aşan sayılar var. Bu nedenle **Romberg** bu kalan terimleri Tablo 2.1'e göre (2.5) formunda hesapladı!

Buna göre **Romberg** (2.5) formundaki kalan terimleri MADAS ATG 20'de hesaplayabilmek için $R = \int_0^1 \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx$ integraline göre $8h = b - a = 1 - 0 = 1$ ve $f(x) = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ fonksiyonunun çift mertebeden türevlerini $f^{(2m)}(x) = (-1)^{\binom{2m}{2}} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m+1} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ olarak hesapladı ve (2.42)'ye göre $a + \frac{1}{2} \cdot 8h = 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$ için $f^{(2m)}\left(\frac{1}{2}\right) = (-1)^{\binom{2m}{2}} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m+1} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = (-1)^m \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m+1} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = (-1)^m \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m+1}$ olduğundan

$$(2.51) \quad f^{(2m)}\left(\frac{1}{2}\right) = (-1)^m \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m+1}$$

sonucunu buldu!

Bunları (2.5)'e göre $K \cong 8h \left(f^{(2)} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{h^2}{3!} a + f^{(4)} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{h^4}{5!} b + f^{(6)} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{h^6}{7!} c + f^{(8)} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{h^8}{9!} d \right) = 1. \left(f^{(2)} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{\left(\frac{1}{8} \right)^2}{3!} a + f^{(4)} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{\left(\frac{1}{8} \right)^4}{5!} b + f^{(6)} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{\left(\frac{1}{8} \right)^6}{7!} c + f^{(8)} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{\left(\frac{1}{8} \right)^8}{9!} d \right) = f^{(2)} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{a}{3! 2^6} + f^{(4)} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{b}{5! 2^{12}} + f^{(6)} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{c}{7! 2^{18}} + f^{(8)} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{d}{9! 2^{24}}$ olduğundan

$$(2.52) \quad K \cong f^{(2)} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{a}{3! 2^6} + f^{(4)} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{b}{5! 2^{12}} + f^{(6)} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{c}{7! 2^{18}} + f^{(8)} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{d}{9! 2^{24}}$$

kalan terimlerinde kullandı. Burada a, b, c ve d katsayıları Tablo 2.1'de mevcuttur ve

$$f^{(2)} \left(\frac{1}{2} \right) = (-1)^1 \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{2.1+1} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^3 \cong -\frac{1.414213562}{2} \left(\frac{3.141592653}{2} \right)^3 = -2.740593560,$$

$$f^{(4)} \left(\frac{1}{2} \right) = (-1)^2 \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{2.2+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^5 \cong \frac{1.414213562}{2} \left(\frac{3.141592653}{2} \right)^5 = 6.762143563,$$

$$f^{(6)} \left(\frac{1}{2} \right) = (-1)^3 \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{2.3+1} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^7 \cong -\frac{1.414213562}{2} \left(\frac{3.141592653}{2} \right)^7 = -16.68492046,$$

$$f^{(8)} \left(\frac{1}{2} \right) = (-1)^4 \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{2.4+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^9 \cong \frac{1.414213562}{2} \left(\frac{3.141592653}{2} \right)^9 = 41.16839109$$

dur (Bkz. $\sqrt{a}$ için "[ATA M Algoritmaları Ver. 1](#)" makalesine ve "[n = 2,3,4 İçin İterasyonlar](#)" programına).

Şu hâlde (2.52)'deki a, b, c ve d katsayılarını Tablo 2.1'den alırsak kalan terimleri MADAS ATG 20'de şöyle hesaplamış oluruz:

$$(2.53) \quad \begin{cases} K(T_1) \cong f^{(2)} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{32}{3! 2^6} + f^{(4)} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{1024}{5! 2^{12}} + f^{(6)} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{24576}{7! 2^{18}} + f^{(8)} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{524288}{9! 2^{24}} = -2.740593560 \times 0.083333333 + 6.762143563 \times 0.002083333 \\ -16.68492046 \times 0.000018601 + 41.16839109 \times 0.000000086 = -0.228382796 + 0.014087797 - 0.000310356 + 0.000003541 \\ = -0.214601814, \\ K(T_2) \cong f^{(2)} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{8}{3! 2^6} + f^{(4)} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{384}{5! 2^{12}} + f^{(6)} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{10240}{7! 2^{18}} + f^{(8)} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{229376}{9! 2^{24}} = -2.740593560 \times 0.020833333 + 6.762143563 \times 0.000781250 \\ -16.68492046 \times 0.000007750 + 41.16839109 \times 0.000000038 = -0.057095698 + 0.005282925 - 0.000129308 + 0.000001564 \\ = -0.051940517, \\ K(T_4) \cong f^{(2)} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{2}{3! 2^6} + f^{(4)} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{104}{5! 2^{12}} + f^{(6)} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{3296}{7! 2^{18}} + f^{(8)} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{83072}{9! 2^{24}} = -2.740593560 \times 0.005208333 + 6.762143563 \times 0.000211589 \\ -16.68492046 \times 0.000002495 + 41.16839109 \times 0.000000014 = -0.014273924 + 0.001430795 - 0.000041629 + 0.000000576 \\ = -0.012884182, \\ K(T_8) \cong f^{(2)} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{1}{3! 2^6} + f^{(4)} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{26}{5! 2^{12}} + f^{(6)} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{877}{7! 2^{18}} + f^{(8)} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{23532}{9! 2^{24}} = -2.740593560 \times 0.001302083 + 6.762143563 \times 0.000053914 \\ -16.68492046 \times 0.000000664 + 41.16839109 \times 0.000000004 = -0.003568481 + 0.000364577 - 0.000011082 + 0.000000159 \\ = -0.003214827, \\ K(U_1) \cong f^{(2)} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{16}{3! 2^6} + f^{(4)} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{256}{5! 2^{12}} + f^{(6)} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{4096}{7! 2^{18}} + f^{(8)} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{65536}{9! 2^{24}} = -2.740593560 \times 0.041666667 + 6.762143563 \times 0.000520833 \\ -16.68492046 \times 0.000003101 + 41.16839109 \times 0.000000011 = -0.114191398 + 0.003521950 - 0.000051727 + 0.000000443 \\ = -0.110720732, \\ K(U_2) \cong f^{(2)} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{4}{3! 2^6} + f^{(4)} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{176}{5! 2^{12}} + f^{(6)} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{3648}{7! 2^{18}} + f^{(8)} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{63232}{9! 2^{24}} = -2.740593560 \times 0.010416667 + 6.762143563 \times 0.000358073 \\ -16.68492046 \times 0.000002761 + 41.16839109 \times 0.000000010 = -0.028547850 + 0.002421341 - 0.000046069 + 0.000000428 \\ = -0.02617215, \\ K(U_4) \cong f^{(2)} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{1}{3! 2^6} + f^{(4)} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{51}{5! 2^{12}} + f^{(6)} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{1541}{7! 2^{18}} + f^{(8)} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{36007}{9! 2^{24}} = -2.740593560 \times 0.002604167 + 6.762143563 \times 0.000103760 \\ -16.68492046 \times 0.000001166 + 41.16839109 \times 0.000000006 = -0.007136962 + 0.000701638 - 0.000019461 + 0.000000243 \\ = -0.006454542. \end{cases}$$

İşte bu sonuçlara göre trapez ve orta nokta yaklaşıklıklarını kalan terimleriyle birlikte MADAS ATG 20'de şu şekilde hesaplamış oluruz:

$$(2.54) \quad \begin{cases} \tilde{T}_1 = T_1 - K(T_1) \cong 0.785398163 + 0.214601814 = 0.999999977, \\ \tilde{T}_2 = T_2 - K(T_2) \cong 0.948059449 + 0.051940517 = 0.999999966, \\ \tilde{T}_4 = T_4 - K(T_4) \cong 0.987115801 + 0.012884182 = 0.999999983, \\ \tilde{T}_8 = T_8 - K(T_8) \cong 0.996785172 + 0.003214827 (= 0.999999999) = 1, \\ \tilde{U}_1 = U_1 - K(U_1) \cong 1.110720735 - 0.110720732 = 1.000000003, \\ \tilde{U}_2 = U_2 - K(U_2) \cong 1.026172153 - 0.02617215 = 1.000000003, \\ \tilde{U}_4 = U_4 - K(U_4) \cong 1.006454543 - 0.006454542 = 1.000000001. \end{cases}$$

Bu sonuçlardan görüldüğü üzere MADAS ATG 20'de en fazla 10 basamaklı sayılar girilebilir ve 20 basamaklı sonuçlar alınabilirken **Romberg** $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{T}_4, \tilde{T}_8$ ve $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \tilde{U}_4, \tilde{U}_8$ 'in kalan terimlerindeki serileri 4 terimle sınırladığı için 10 basamak yeterli görülmüştür (Bkz. [MADAS AZS 20](#). **Huang Pengyu**, bu makinede 3,331,133,311 ile 88,888,888 sayılarını çarparak [29,610,073,872,594,548,168](#) sonucu buldu. Fakat bu işlemin sonucu 296,100,735,794,548,168'dir). Çünkü **Romberg**'in amacı [mavi tablo](#)daki $Q_8 = 1.000000008$ son değerini $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{T}_4, \tilde{T}_8$ ve $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \tilde{U}_4$ yaklaşıklıklarıyla elde etmekte ve bunu $\tilde{T}_8$ 'de başarırken $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2$ ve $\tilde{U}_4$ 'te yakalamıştır. Fakat bu sonuçları (2.44), (2.45), (2.47), (2.49), (2.50) ve (2.53)'teki hesaplamalarımızdan gördüğünüz üzere her bir terimde ve MADAS ATG'ye göre her bir terimdeki çarpanlarda Mathematica'da ve Windows hesap makinesinde 10 basamak elde etmek için çok zamanımı alırken **Romberg**'in bu hesapları günlerce yapmış ve bu arada makinenin vınlamaları ve tıktırtıları yüzünden kafasının şişmiş olduğunu tahmin etmek zor olmaz. Örneğin **Romberg** kalan terimleri (2.53)'te gördüğünüz gibi (2.5) formuna göre hesaplarken katsayıları Tablo 2.1'den alıyordu ama bu kalan terimlerdeki f'nin çift mertebeden türevlerini $t = \frac{1}{2}$ 'de hesaplarken $\left(\frac{\pi}{2} \right)^3, \left(\frac{\pi}{2} \right)^5, \left(\frac{\pi}{2} \right)^7$ ortaya çıkıyor ve bunları MADAS ATG 20'de hesaplayabilmek için $\frac{\pi}{2}$ 'yi kuvvetleri kadar kendisiyle çarpıp ve sonra elde edilen bu çarpımları $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ile çarpıp gerekiyordu.

Ayrıca **Romberg**'in bu hesapları yaparken önünde bir sürü müsvedde kağıdının olması ve her bir işlemin sonuçlarını bu kağıtlara yazıyor olması gerekiyordu. Sırf bu işlemler bile **Romberg**'i çok yormuş ve zamanını almış olmalı. Buna göre (2.53)'ün hemen üzerinde gösterdiğim bu hesaplar bu kadar zaman alıyorsa varın gerisini siz düşünün. Özetle (2.54)'teki sonuçlar **Romberg**'in günleri almış olmalı ve aynı sonuçlara her ne kadar Mathematica ve Windows hesap makinesiyle ulaşıysam da 1955'teki gibi hareket etmek beni de yordu. Tablo 2.2'deki ilk sütundaki giriş değerlerini ise MADAS ATG 20'de değil Mathematica'da elde ettim!

Bu arada **Romberg**'in matematiksel kodlama ve programlamasında bulunduğu NUSSE'yi de yakından tanıyalım.

2.5.2. Norveç'in İlk Elektronik Bilgisayarı: NUSSE

1948'de genç bilim adamı **Henry Viervoll**, ABD'deki araştırma gezisinden sonra modern bilgisayarların geliştirildiğini Oslo Üniversitesi'ne bildirdi. Norveç'in ilk bilgisayarının geliştirilmesine öncülük etmek üzere 1949'da Norveç Kraliyet Bilimsel ve Endüstriyel Araştırma Konseyi'nde (NTNF) bir Matematiksel Makineler Komitesi kuruldu. Yapımından **Thomas Hysing** sorumluydu. İlk önce bir ZUSE makinesi planladılar, ancak profesör **D. R. Hartree** Cambridge'den, bütçe dahilinde, APEX C'yi oluşturan **Andrew D. Booth**'un bileşenlerine dayalı bir elektronik bilgisayar alabileceklerini keşfetti. Giriş/çıkış cihazlarının yapımı, NTNF'nin 1 yıl önce kurduğu (SI) Norveç Merkez Endüstri Enstitüsü'nde gerçekleştirildi. Stratejideki bu kayma ile zaman çizelgesini 1 yıl kadar (1954) uzattılar. Bilgisayara "**NUSSE**" adını verdiler. 1953-54'te **Ole Amble** ve **Tor Evjen**, Trondheim'dan **Werner Romberg** ile birlikte NUSSE'nin matematiksel kodlamasını ve programlamasını gerçekleştirdiler (Bkz. "[Programlar](#)". Web sitemdeki Romberg İntegrali Yöntemi'ne ait tüm programları bu menüye aldım ve bu programların nasıl kullanılacağını öğrenmek için "[Programların Kullanımı](#)"na bakınız). Diğer kullanıcılar için, 1952'de NTNF, üniversite tesislerinde ve Kjeller'de FFI'de şubeleri olan bir organizasyon olarak saf ve uygulamalı araştırmalar için Norveç Bilgi İşlem Merkezi'ni (Norsk Regnesentral (NR)) kurdu. NR'nin elinde çeşitli delikli kart ekipmanları, UiO'daki diferansiyel analiz cihazı (ki buna "Diferansiyel Analizör" denir) ve daha sonra NUSSE ve DIANA vardı. 1954'ün başlarında, NR'nin Oslo'daki tesislerinde yeni bir tablo oluşturucu, reproduktör, harmanlayıcı ve sıralayıcı kuruldu. Ticari bir bilgi işlem merkezi haline gelmesi ancak 1959-60'ta oldu.

1952'ye Bir Gönderme!

NUSSE'nin ilk kez 1952'de Blindern Üniversitesi'nde (şimdi Oslo Üniversitesi) kuruldu ve ilk kez 1 Ocak 1954'te çalıştırıldı. **Amble**, **Hysing** ve **Evjen** adlı araştırmacılar NUSSE'yi çalıştırdıklarında hepsi sevinçten havalara uçuyordu (Bkz. "[NUSSE, 1954](#)". Soldan sağa **Ole Amble**, **Thomas Hysing**, **Tor Evjen** (ve sağdaki kişiyi çıkartamadım) ve sırtı dönük gülen **Kjell Kveim**'dir. Onlar orada NUSSE'ye karşı NIM oyununu oynuyorlardı. Linkteki resmin altındaki "[2K8KJW3](#)" kodlu resmin renkli halini "[4. Piobert-Parmentier Metodu'nun Q'ya Genişletilmesi](#)" adlı makalemin kapağında ve [Resim 4.2](#)'de görebilirsiniz (ki bu resmi [alamy](#)'den değil Norsk Teknisk Museum'daki "[NTM C 25425](#)" kodlu resim olarak almış ve en mükemmel şekilde renklendirmiştim. Ama şimdi kıymete bindi (ki 2021'de bulmak kolay değildi) ve [alamy](#)'de satışa sunulmuş). Yine aynı yerden aldığım [Resim 4.3](#)'te siyah-beyaz bir fotoğraf ve üzerinde "[NUSSE, 1952](#)" yazısı vardır (Bkz. "[NUSSE](#)"). İşte o fotoğraf NUSSE'nin Blindern Üniversitesi'ne getirildiği tarihi gösterir ve bunun anısına oraya konuldu!

2.5.2.1. Ole Amble'in Algoritmasını 70 Yıl Sonra En Mükemmel Hale Getirdim ve Geliştirdim!

Bu sırada **Romberg** ile birlikte çalışan **Ole Amble**, "[A Set of Formulas for Numerical Integration, DKNVS, BD. 25, 1952 NR. 10, 517.61](#)" adlı tezini yayımladı. **Romberg**'in tezinde [2] no'lu kaynakça olarak geçen bu tezi NTNU'nun profesörlerinden **Brynjulf Owren**'e 2 kez e-posta gönderdim ve 03.10.2021, 04:48'de gönderdiğim 2. e-postada 3 makalemin linklerini de vermiştim (Bkz. "[Nihayet Ole Amble'in tezini bulduk!](#)". **Owren** 1, 2 ve 3. maddelerdeki makalelerimi İngilizceye çevirmemi istedi ama tek çalıştığımı ve fırsatımın olmadığını bilmiyordu!

Bu makalelerden son ikisi **Ole Amble**'in algoritmasıyla ilgiliydi:

2. [Ole Amble'in Algoritması, 01.02.2019](#) (Bu tarih **Romberg**'in tezini **Owren**'den aldıktan (23.12.2018, 09:11) sonra 40. günü gösterir),

3. [Genelleştirilmiş Ole Amble Algoritması, 31.08.2021, 06:23:28](#).

Fakat **Ole Amble**'in tezini bana gönderen **Owren** değil 11.10.2021, 15:28'de **Sven Ström** oldu). **Ole Amble**'in tezini aldıktan sonra şu makaleyi yazdım:

4. [Piobert-Parmentier Metodu'nun Q'ya Genişletilmesi](#), 12.07.2022, 21:03:53.

Bu makalede 3 metot verdim ve Metot 1'de **Ole Amble**'in algoritmasına göre Piobert-Parmentier Metodu'nu Q üzerine genişletirken (ki **W. F. Sheppard**'ın 14.06.1900 tarihli "[Some quadrature formulas, Proc. London Math. Soc., 32, 1900, pp. 258-277](#)" tezinine göre **Ole Amble**'in algoritması **Sheppard**'ınkinden türetilmiş ve o da 19. yy'daki Parmentier kuralından türetmiştir (Bkz. "[III. Miscellaneous Formulas \(III. Çeşitli Formüller\)](#)", S. 267-272). Araştırmalarım sonucu bu algoritmayla ilk uğraşan **Piobert** olduğunu buldum) **Ole Amble**'in tezindeki orta nokta yaklaşıklıklarına ait değerlerin hatalı olarak verilmiş olduklarını gördüm (Bkz. S. 1, [Tablo 4.1](#). Trapez yaklaşıklıklarının değerlerini 20.10.2021, 06:45:20'de doğrularken hemen ardından orta nokta yaklaşıklıklarının değerlerini görmeme rağmen, tüm çözüm yollarını tükettikten sonra 22.10.2021, 05:07:46'da aynı sonuçların geçerli olduğuna karar verdim. Yani hata [Tablo 4.1](#)'in son sütunundaki kırmızı rakamlarla gösterdiğim **Ole Amble**'in verilerindeydi).

Sonra **Ole Amble**'in algoritmasını aşağıdaki çalışmalarımda göreceğiniz üzere en mükemmel forma soktum ve geliştirdim:

4.1. [Metot 1 \(Ole Amble'a Göre Piobert-Parmentier Metodu'nun Q Üzerine Genişletilmesi\)](#):

4.1.1. [Ole Amble Metodu-1952](#),

4.1.2. [Ole Amble'in Yaklaşıklıklarının Hızlandırılması-2021](#),

4.1.3. [Ole Amble'in Yaklaşıklıklarının Tam Yakınsaması-2021](#),

4.2. [Metot 2 \(Ole Amble Metodu'nun Türevleri\)-2021](#).

2.5.3. $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{T}_4, \tilde{T}_8$ ve $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \tilde{U}_4, \tilde{U}_8$ Yaklaşıklıkları Hakkında

Romberg tablodaki bu sonuçlardan görüldüğü üzere T_1, T_2, T_4, T_8 trapez yaklaşıklıklarına kalan terimlerini ekleyerek $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{T}_4, \tilde{T}_8$ ve U_1, U_2, U_4, U_8 orta nokta yaklaşıklıklarına da kalan terimlerini ekleyerek $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \tilde{U}_4, \tilde{U}_8$ yaklaşıklıklarıyla yakınsaklığı daha iyi ve yeni yaklaşıklıklar önerir ama Tablo 2.1'de görüldüğü üzere bu

yeni yaklaşıklıklardaki kalan terimlerin katsayılarını Richardson ekstrapolasyonuna göre düzenlemesine rağmen Tablo 2.2’de gördüğünüz gibi bu ekstrapolasyon etkisiz eleman gibi hiçbir katkı yapmaz. Çünkü tablodaki ilk sütundaki giriş değerlerinin yakınsaklık hızı kalan terimlere göre belirlenmesine ve sonraki sütunlarda Richardson ekstrapolasyonu uygulanmasına rağmen fazladan bir basamak elde edilememiştir ya da solcuların jargonuna göre bir “artı değer” kazanılamamıştır. Oysa [Tablo 1.1](#)’de bunun tam tersi olmuştu ve istediğiniz kadar uygulama yapın bu sonuç hiç değişmeyecektir!

Peki bu sonuç neden ortaya çıktı?

Bu sonucu aşağıda birbirine bağlı olarak 2 başlıkta şöyle açıklayabilirim.

1. $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{T}_4, \tilde{T}_8$ ve $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \tilde{U}_4, \tilde{U}_8$ Yaklaşıklıklarının Taylor Serilerine Açılımları. Bunun için $8h = b - a = h_0 =: h$ dersek (2.40)’taki U_1 ve (2.42)’deki $K(U_1)$ ’e göre

$$(2.55) \quad \begin{aligned} \tilde{U}_1 &= U_1 + K(U_1) = hf\left(a + \frac{h}{2}\right) + h \sum_{m=1}^{\infty} f^{(2m)}\left(a + \frac{h}{2}\right) \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^{2m}}{(2m+1)!} = f(a)h + \frac{1}{2}f'(a)h^2 + \frac{1}{6}f''(a)h^3 + \frac{1}{24}f^{(3)}(a)h^4 + \frac{1}{120}f^{(4)}(a)h^5 + \frac{1}{720}f^{(5)}(a)h^6 + \dots \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(a)}{(m+1)!} h^{m+1} = \int_0^h \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(a)}{m!} t^m dt = \int_0^h f(t+a)dt = \int_a^b f(t)dt = I \end{aligned}$$

(ki **Romberg** bunu ve aşağıdakini orijinalde $i = u_1 + r(u_1)$ ve $i = t_1 + r(t_1)$ ile gösterir ama bunları düzelttim. Bkz. S. 4) ve (2.40)’taki T_1 ve (2.42)’deki $K(T_1)$ ’e göre

$$(2.56) \quad \begin{aligned} \tilde{T}_1 &= T_1 - K(T_1) = h \cdot \frac{f(a) + f(b)}{2} - h \sum_{m=1}^{\infty} f^{(2m)}\left(a + \frac{h}{2}\right) \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^{2m}}{(2m+1)!} (2m) = h \cdot \frac{f(b-h) + f(a+h)}{2} - h \sum_{m=1}^{\infty} f^{(2m)}\left(a + \frac{h}{2}\right) \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^{2m}}{(2m+1)!} (2m) \\ &= \frac{1}{2}(f(a) + f(b))h + \frac{1}{2}(f'(a) - f'(b))h^2 + \frac{1}{12}(2f''(a) + 3f''(b))h^3 + \frac{1}{24}(f^{(3)}(a) - 2f^{(3)}(b))h^4 + \frac{1}{240}(2f^{(4)}(a) + 5f^{(4)}(b))h^5 + \dots \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(a)}{(m+1)!} h^{m+1} - \frac{1}{2}hf(a) + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{f^{(m)}(b)}{m!} h^{m+1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(a)}{(m+1)!} h^{m+1} - \frac{1}{2}hf(a) + \frac{h}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(b)}{m!} (-h)^m \\ &= \int_0^h f(t+a)dt - \frac{1}{2}hf(a) + \frac{h}{2}f(b-h) = \int_a^b f(t)dt - \frac{1}{2}hf(a) + \frac{1}{2}hf(b - (b-a)) = I - \frac{1}{2}hf(a) + \frac{1}{2}hf(a) = I \end{aligned}$$

sonuçları geçerli olur (ki bu sonuç yukarıdaki Ananas Ekspres’in nedenini açıklar), dolayısıyla $\tilde{U}_2, \tilde{U}_4, \tilde{U}_8$ ’in Taylor serileri (2.55)’teki ve $\tilde{T}_2, \tilde{T}_4, \tilde{T}_8$ ’in Taylor serileri (2.56)’daki gibi olduklarından (ki bu işlemleri Mathematica’da yapmak size zaman kazandırır) her ikisinden de (2.35)’teki I integrali benzer şekillerde elde edilirler.

2. $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{T}_4, \tilde{T}_8$ ve $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \tilde{U}_4, \tilde{U}_8$ Yaklaşıklıklarına Richardson Ekstrapolasyonunun Uygulanması. İlk Tablo 2.2’deki ilk sütundaki kalan terimli trapez yaklaşıklıklarına (2.50)’deki Richardson ekstrapolasyonunu $k = 1$ için uygularsak şu sonuç geçerli olur:

$$(2.57) \quad \frac{4\tilde{T}_2 - \tilde{T}_1}{3} = \frac{4(T_2 - K(T_2)) - (T_1 - K(T_1))}{3} = \frac{4T_2 - T_1}{3} - \frac{4K(T_2) - K(T_1)}{3} = \left(I + \frac{f^{(4)}(a)}{15.3!} \left(\frac{h}{2}\right)^5 + \frac{f^{(5)}(a)}{15.3!} \left(\frac{h}{2}\right)^6 + \dots \right) - \left(\frac{f^{(4)}(a)}{15.3!} \left(\frac{h}{2}\right)^5 + \frac{f^{(5)}(a)}{15.3!} \left(\frac{h}{2}\right)^6 + \dots \right) = I.$$

Burada söz konusu olan (2.56)’daki $I = \tilde{U}_1$ ’dir ve $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{T}_4, \tilde{T}_8, \dots$ yaklaşıklarının kalan terimlerin serilerinde kaç tane terim alırsanız I’ya o kadar hızla yakınsarsınız. Yani **Romberg** Tablo 2.1’de her bir kalan terimin serisinde (katsayıları a, b, c ve d olan) 4 tane terim aldığı için (2.42)’deki $K(T_1), K(T_2), K(T_4), K(T_8), \dots$ kalan terimlerin serilerinde 4 terim için $m = 4$ alırsanız son terimlerde $h^{2.4+2} = h^{10}$ çıkar ve bu yüzden ilk $\frac{4T_2 - T_1}{3}$ ile $\frac{4K(T_2) - K(T_1)}{3}$ ekstrapolasyonik yaklaşıklıklardaki yakınsaklık hızı $\frac{10}{2} = 5$ olarak görünür. Bunun için $\frac{4T_2 - T_1}{3} - I = \frac{4T_4 - T_2}{3} - I = \frac{4T_8 - T_4}{3} - I = \dots = \frac{f^{(4)}(a)}{15.3!} \left(\frac{h}{2}\right)^5 + \frac{f^{(5)}(a)}{15.3!} \left(\frac{h}{2}\right)^6 + \dots$ ve $\frac{4K(T_2) - K(T_1)}{3} = \frac{4K(T_4) - K(T_2)}{3} = \frac{4K(T_8) - K(T_4)}{3} = \dots = \frac{f^{(4)}(a)}{15.3!} \left(\frac{h}{2}\right)^5 + \frac{f^{(5)}(a)}{15.3!} \left(\frac{h}{2}\right)^6 + \dots$ yakınsamalarının gerçekleştiğine dikkat ediniz ve bunların farkı size I’yı verir ama bu $m = \infty$ ’da geçerli olur. Tablo 2.2’de ise (2.57)’deki işlemin sonucu I ve bu da (2.55)’teki sonuçla aynı olduğundan $\frac{4\tilde{T}_2 - \tilde{T}_1}{3}, \frac{4\tilde{T}_4 - \tilde{T}_2}{3}, \frac{4\tilde{T}_8 - \tilde{T}_4}{3}, \dots$ ekstrapolasyonik yaklaşıklarının yakınsaklık hızı $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{T}_4, \tilde{T}_8, \dots$ yaklaşıklarının yakınsaklık hızıyla aynı olur: h^8 . İşte bu sonuç **Romberg** tarafından Tablo 2.2’deki ilk sütundaki kalan terimli trapez yaklaşıklıklarıyla daha baştan belirlenmiştir, dolayısıyla Tablo 2.2’yi yapmanın bir anlamı olmaz. Yani **Romberg** diyor ki, “*mavi tablodaki $Q_8 = 1.000000008$ son değerini Richardson ekstrapolasyonunu devre dışı bırakarak $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{T}_4, \tilde{T}_8$ yaklaşıklarında daha baştan elde ettim*”. Fakat yine de Tablo 2.2’ye bakarsak 10 basamaklı $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{T}_4, \tilde{T}_8$ ’in son 3 ya da 2 basamağı yanlış iken $\tilde{S}_2$ ve $\tilde{S}_4$ ’ün son 2 basamağı ve $\tilde{S}_8$ ’in son basamağı hatalı görülür ki, bu durumda $k = 1$ için uygulanan ekstrapolasyonun katkısı yadsınamaz!

Not 2.2. (2.50)’deki Richardson ekstrapolasyonunu $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{T}_4, \tilde{T}_8$ yaklaşıklıklarına $k = 1, 2, 3, 4$ için uygularken (2.40)’taki T_1 ’in Taylor serisine açılımında $T_1 = h \cdot \frac{f(a) + f(a+h)}{2}$ ’yi kullanıyoruz. Çünkü T_2, T_4, T_8 yaklaşıklıklarındaki fonksiyonlar ve $K(T_1), K(T_2), K(T_4), K(T_8)$ kalan terimlerine ait seriler a ve h cinsindendirler.

İkinci olarak Tablo 2.2’deki 2. sütundaki ekstrapolasyonik trapez yaklaşıklıklarına (2.50)’deki Richardson ekstrapolasyonunu $k = 2$ için uygularsak şu sonuç elde edilir:

$$(2.58) \quad \begin{aligned} \frac{16 \frac{4\tilde{T}_4 - \tilde{T}_2}{3} - \frac{4\tilde{T}_2 - \tilde{T}_1}{3}}{15} &= \frac{16 \frac{4(T_4 - K(T_4)) - (T_2 - K(T_2))}{3} - \frac{4(T_2 - K(T_2)) - (T_1 - K(T_1))}{3}}{15} = \frac{16 \frac{4T_4 - T_2}{3} - \frac{4T_2 - T_1}{3}}{15} \\ &- \frac{16 \frac{4K(T_4) - K(T_2)}{3} - \frac{4K(T_2) - K(T_1)}{3}}{15} = \left(I + \frac{f^{(6)}(a)}{21.6!} \left(\frac{h}{2}\right)^7 + \frac{31f^{(7)}(a)}{21.6!} \left(\frac{h}{2}\right)^8 + \dots \right) - \left(\frac{f^{(6)}(a)}{21.6!} \left(\frac{h}{2}\right)^7 + \frac{31f^{(7)}(a)}{21.6!} \left(\frac{h}{2}\right)^8 + \dots \right) = I. \end{aligned}$$

Burada $\frac{16 \frac{4T_4 - T_2}{3} - \frac{4T_2 - T_1}{3}}{15} - I = \frac{16 \frac{4\tilde{T}_8 - \tilde{T}_4}{3} - \frac{4\tilde{T}_4 - \tilde{T}_2}{3}}{15} - I = \dots = \frac{f^{(6)}(a)}{21.6!} \left(\frac{h}{2}\right)^7 + \frac{31f^{(7)}(a)}{21.6!} \left(\frac{h}{2}\right)^8 + \dots$ ve $\frac{16 \frac{4K(T_4) - K(T_2)}{3} - \frac{4K(T_2) - K(T_1)}{3}}{15} = \frac{16 \frac{4K(T_8) - K(T_4)}{3} - \frac{4K(T_4) - K(T_2)}{3}}{15} = \dots = \frac{f^{(6)}(a)}{21.6!} \left(\frac{h}{2}\right)^7 + \frac{31f^{(7)}(a)}{21.6!} \left(\frac{h}{2}\right)^8 + \dots$ olduklarından bu 2. ekstrapolasyonik yaklaşıklıkların yakınsaklık hızı h^7 olarak görünür ama $\frac{16 \frac{4\tilde{T}_4 - \tilde{T}_2}{3} - \frac{4\tilde{T}_2 - \tilde{T}_1}{3}}{15}$ ’in yakınsaklık hızı hala **Romberg**’in seçimine göre h^8 ’dir. Buna göre Tablo 2.2’deki 10 basamaklı $\tilde{R}_4$ ’ün son 2 basamağının ve $\tilde{R}_8$ ’in son basamağının hatalı olduğu görülür ki, bir önceki sütundaki $\tilde{S}_2$ ve $\tilde{S}_4$ ’ün son 2 basamağının ve $\tilde{S}_8$ ’in son basamağının hatalı olması nedeniyle $k = 2$ ’de ekstrapolasyondan hiçbir katkı elde edilemediği sonucu çıkar.

Üçüncü olarak Tablo 2.2'deki 3. sütundaki ekstrapolasyonik trapez yaklaşıklıklarına (2.50)'deki Richardson ekstrapolasyonunu $k = 3$ için uygularsak şu sonuç elde edilir:

$$\begin{aligned}
 (2.59) &= \frac{64 \frac{16 \frac{4\tilde{T}_8 - \tilde{T}_4}{3} - \frac{4\tilde{T}_4 - \tilde{T}_2}{3}}{15} - \frac{16 \frac{4\tilde{T}_4 - \tilde{T}_2}{3} - \frac{4\tilde{T}_2 - \tilde{T}_1}{3}}{15}}{63} \\
 &= \frac{64 \frac{16 \frac{4(T_8 - K(T_8)) - (T_4 - K(T_4))}{3} - \frac{4(T_4 - K(T_4)) - (T_2 - K(T_2))}{3}}{15} - \frac{16 \frac{4(T_4 - K(T_4)) - (T_2 - K(T_2))}{3} - \frac{4(T_2 - K(T_2)) - (T_1 - K(T_1))}{3}}{15}}{63} \\
 &= \frac{64 \frac{16 \frac{4T_8 - T_4}{3} - \frac{4T_4 - T_2}{3}}{15} - \frac{16 \frac{4T_4 - T_2}{3} - \frac{4T_2 - T_1}{3}}{15}}{63} - \frac{64 \frac{16 \frac{4K(T_8) - K(T_4)}{3} - \frac{4K(T_4) - K(T_2)}{3}}{15} - \frac{16 \frac{4K(T_4) - K(T_2)}{3} - \frac{4K(T_2) - K(T_1)}{3}}{15}}{63} \\
 &= \left(I + \frac{f^{(8)}(a)}{3150.3!} \left(\frac{h}{4}\right)^9 + \frac{f^{(9)}(a)}{1575.3!} \left(\frac{h}{4}\right)^{10} + \dots \right) - \left(\frac{f^{(8)}(a)}{3150.3!} \left(\frac{h}{4}\right)^9 + \frac{f^{(9)}(a)}{1575.3!} \left(\frac{h}{4}\right)^{10} + \dots \right) = I.
 \end{aligned}$$

Burada $\frac{64 \frac{16 \frac{4T_8 - T_4}{3} - \frac{4T_4 - T_2}{3}}{15} - \frac{16 \frac{4T_4 - T_2}{3} - \frac{4T_2 - T_1}{3}}{15}}{63} - I = \dots = \frac{f^{(8)}(a)}{3150.3!} \left(\frac{h}{4}\right)^9 + \frac{f^{(9)}(a)}{1575.3!} \left(\frac{h}{4}\right)^{10} + \dots$ ve $\frac{64 \frac{16 \frac{4K(T_8) - K(T_4)}{3} - \frac{4K(T_4) - K(T_2)}{3}}{15} - \frac{16 \frac{4K(T_4) - K(T_2)}{3} - \frac{4K(T_2) - K(T_1)}{3}}{15}}{63} = \dots = \frac{f^{(8)}(a)}{3150.3!} \left(\frac{h}{4}\right)^9 + \frac{f^{(9)}(a)}{1575.3!} \left(\frac{h}{4}\right)^{10} + \dots$ olduklarından bu 3. ekstrapolasyonik yaklaşıklıkların yakınsaklık hızı $\frac{64 \frac{16 \frac{4\tilde{T}_8 - \tilde{T}_4}{3} - \frac{4\tilde{T}_4 - \tilde{T}_2}{3}}{15} - \frac{16 \frac{4\tilde{T}_4 - \tilde{T}_2}{3} - \frac{4\tilde{T}_2 - \tilde{T}_1}{3}}{15}}{63}$ 'ünküyle h^9 olarak aynı ama gerçekte h^8 'dir. Bu, aynı zamanda **Romberg**'in seçimine göre I 'nin yakınsaklık hızıdır. Bu durumda Tablo 2.2'nin son sütunundaki 10 ondalıklı $\tilde{Q}_8$ 'in son basamağı "8" olarak hatalı da olsa $k = 3$ 'te ekstrapolasyondan maksimum katkı elde edilmiştir!

Diğer taraftan orta nokta yaklaşıklıklarına Richardson ekstrapolasyonu aynı şekilde uygularsak şu sonuçlar ortaya çıkar: İlk sütundaki kalan terimli orta nokta yaklaşıklıklarına (2.50)'deki Richardson ekstrapolasyonunu $k = 1$ için uygularsak şu sonuç geçerli olur:

$$\begin{aligned}
 (2.60) \quad \frac{4\tilde{U}_2 - \tilde{U}_1}{3} &= \frac{4(U_2 + K(U_2)) - (U_1 + K(U_1))}{3} = \frac{4U_2 - U_1}{3} + \frac{4K(U_2) - K(U_1)}{3} = \left(I - \frac{7f^{(4)}(a)}{6!} \left(\frac{h}{2}\right)^5 - \frac{7f^{(5)}(a)}{6!} \left(\frac{h}{2}\right)^6 - \dots \right) \\
 &+ \left(\frac{7f^{(4)}(a)}{6!} \left(\frac{h}{2}\right)^5 + \frac{7f^{(5)}(a)}{6!} \left(\frac{h}{2}\right)^6 + \dots \right) = I.
 \end{aligned}$$

Burada $\frac{4\tilde{U}_2 - \tilde{U}_1}{3} - I = \frac{4\tilde{U}_4 - \tilde{U}_2}{3} - I = \frac{4\tilde{U}_8 - \tilde{U}_4}{3} - I = \dots = -\frac{7f^{(4)}(a)}{6!} \left(\frac{h}{2}\right)^5 - \frac{7f^{(5)}(a)}{6!} \left(\frac{h}{2}\right)^6 - \dots$ ve $\frac{4K(U_2) - K(U_1)}{3} = \frac{4K(U_4) - K(U_2)}{3} = \frac{4K(U_8) - K(U_4)}{3} = \dots = \frac{7f^{(4)}(a)}{6!} \left(\frac{h}{2}\right)^5 + \frac{7f^{(5)}(a)}{6!} \left(\frac{h}{2}\right)^6 + \dots$ olduklarından bu ilk orta noktalı ekstrapolasyonik yaklaşıklıkların ve kalan terimlerinin yakınsaklık hızı h^5 olarak görünür ama **Romberg**'in seçimine göre Tablo 2.2'deki $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \tilde{U}_4, \tilde{U}_8$ yaklaşıklıklarının yakınsaklık hızı h^8 'dir. Eğer Tablo 2.2'yi yakından incelersek 10 basamaklı $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \tilde{U}_4, \tilde{U}_8$ 'in son basamakları hatalı görülürken $\tilde{V}_2$ ile $\tilde{V}_4$ 'ün de son basamaklarının aynı şekilde olduğu görülür. Bu sütunda $\tilde{V}_8$ 'i 10 ondalıklı olarak yazmamın nedeni, $\tilde{V}_8$ 'in 10 basamaklı bir hesap makinesinde "1" olarak görüleceğidir. Örneğin bu sonuç **Romberg**'in kullandığı MADAS ATG20'de böyle görünür. Demek ki ekstrapolasyon $k = 1$ 'de katkı yapmış!

İkinci olarak Tablo 2.2'deki 2. sütundaki ekstrapolasyonik orta nokta yaklaşıklıklarına (2.50)'deki Richardson ekstrapolasyonunu $k = 2$ için uygularsak şu sonuç elde edilir:

$$\begin{aligned}
 (2.61) \quad \frac{16 \frac{4\tilde{U}_4 - \tilde{U}_2}{3} - \frac{4\tilde{U}_2 - \tilde{U}_1}{3}}{15} &= \frac{16 \frac{4(U_4 + K(U_4)) - (U_2 + K(U_2))}{3} - \frac{4(U_2 + K(U_2)) - (U_1 + K(U_1))}{3}}{15} = \frac{16 \frac{4U_4 - U_2}{3} - \frac{4U_2 - U_1}{3}}{15} + \\
 &\frac{16 \frac{4K(U_4) - K(U_2)}{3} - \frac{4K(U_2) - K(U_1)}{3}}{15} = \left(I - \frac{31f^{(6)}(a)}{12.8!} \left(\frac{h}{2}\right)^7 - \frac{31f^{(7)}(a)}{24.8!} \left(\frac{h}{2}\right)^8 - \dots \right) + \left(\frac{31f^{(6)}(a)}{12.8!} \left(\frac{h}{2}\right)^7 + \frac{31f^{(7)}(a)}{24.8!} \left(\frac{h}{2}\right)^8 + \dots \right) = I.
 \end{aligned}$$

Burada $\frac{16 \frac{4\tilde{U}_4 - \tilde{U}_2}{3} - \frac{4\tilde{U}_2 - \tilde{U}_1}{3}}{15} - I = \frac{16 \frac{4\tilde{U}_8 - \tilde{U}_4}{3} - \frac{4\tilde{U}_4 - \tilde{U}_2}{3}}{15} - I = \dots = -\frac{31f^{(6)}(a)}{12.8!} \left(\frac{h}{2}\right)^7 - \frac{31f^{(7)}(a)}{24.8!} \left(\frac{h}{2}\right)^8 - \dots$ ve $\frac{16 \frac{4K(U_4) - K(U_2)}{3} - \frac{4K(U_2) - K(U_1)}{3}}{15} = \frac{16 \frac{4K(U_8) - K(U_4)}{3} - \frac{4K(U_4) - K(U_2)}{3}}{15} = \dots = \frac{31f^{(6)}(a)}{12.8!} \left(\frac{h}{2}\right)^7 + \frac{31f^{(7)}(a)}{24.8!} \left(\frac{h}{2}\right)^8 + \dots$ olduklarından bu 2. ekstrapolasyonik yaklaşıklıkların yakınsaklık hızı h^7 olarak görünür ama $\frac{16 \frac{4\tilde{U}_4 - \tilde{U}_2}{3} - \frac{4\tilde{U}_2 - \tilde{U}_1}{3}}{15}$ 'in yakınsaklık hızı hala **Romberg**'in seçimine göre h^8 'dir. Bu durumda Tablo 2.2'deki 10 ondalıklı $\tilde{W}_4$ bir önceki sütundaki $\tilde{V}_4$ ve ondan önceki sütundaki $\tilde{U}_8$ ile aynıyken $\tilde{W}_8$ aynı satırdaki ve bir önceki sütundaki $\tilde{V}_8$ 'den biraz daha iyidir. Yani $k = 2$ için ekstrapolasyon biraz da olsa katkı yapmış!

Üçüncü olarak Tablo 2.2'deki 3. sütundaki ekstrapolasyonik orta nokta yaklaşıklıklarına (2.50)'deki Richardson ekstrapolasyonunu $k = 3$ için uygularsak şu sonuç elde edilir:

$$\begin{aligned}
 (2.62) \quad \frac{64 \frac{16 \frac{4\tilde{U}_8 - \tilde{U}_4}{3} - \frac{4\tilde{U}_4 - \tilde{U}_2}{3}}{15} - \frac{16 \frac{4\tilde{U}_4 - \tilde{U}_2}{3} - \frac{4\tilde{U}_2 - \tilde{U}_1}{3}}{15}}{63} &= \dots \\
 &= \frac{64 \frac{16 \frac{4(U_8 + K(U_8)) - (U_4 + K(U_4))}{3} - \frac{4(U_4 + K(U_4)) - (U_2 + K(U_2))}{3}}{15} - \frac{16 \frac{4(U_4 + K(U_4)) - (U_2 + K(U_2))}{3} - \frac{4(U_2 + K(U_2)) - (U_1 + K(U_1))}{3}}{15}}{63} \\
 &= \frac{64 \frac{16 \frac{4U_8 - U_4}{3} - \frac{4U_4 - U_2}{3}}{15} - \frac{16 \frac{4U_4 - U_2}{3} - \frac{4U_2 - U_1}{3}}{15}}{63} + \frac{64 \frac{16 \frac{4K(U_8) - K(U_4)}{3} - \frac{4K(U_4) - K(U_2)}{3}}{15} - \frac{16 \frac{4K(U_4) - K(U_2)}{3} - \frac{4K(U_2) - K(U_1)}{3}}{15}}{63} \\
 &= \left(I - \frac{254f^{(8)}(a)}{5!.8!} \left(\frac{h}{4}\right)^9 - \frac{508f^{(9)}(a)}{5!.8!} \left(\frac{h}{4}\right)^{10} - \dots \right) + \left(\frac{254f^{(8)}(a)}{5!.8!} \left(\frac{h}{4}\right)^9 + \frac{508f^{(9)}(a)}{5!.8!} \left(\frac{h}{4}\right)^{10} + \dots \right) = I.
 \end{aligned}$$

Burada
$$\frac{64 \frac{16}{3} \frac{4U_8 - U_4}{15} - \frac{16}{3} \frac{4U_4 - U_2}{15} - \frac{16}{3} \frac{4U_2 - U_1}{15}}{63} - I = \dots = -\frac{254f^{(8)}(a)}{5!8!} \left(\frac{h}{4}\right)^9 - \frac{508f^{(9)}(a)}{5!8!} \left(\frac{h}{4}\right)^{10} - \dots$$
 ve
$$\frac{64 \frac{16}{3} \frac{4K(U_8) - K(U_4)}{15} - \frac{16}{3} \frac{4K(U_4) - K(U_2)}{15} - \frac{16}{3} \frac{4K(U_2) - K(U_1)}{15}}{63} = \dots = \frac{254f^{(8)}(a)}{5!8!} \left(\frac{h}{4}\right)^9 + \frac{508f^{(9)}(a)}{5!8!} \left(\frac{h}{4}\right)^{10} + \dots$$
 olduklarından bu 3. ekstrapolasyonik yaklaşıklıkların yakınsaklık hızı h^9 olarak aynı ama gerçekte h^8 'dir. Bu, yine **Romberg**'in seçimine göre I 'nın yakınsaklık hızıdır ve Tablo 2.2'nin son sütunundaki 10 ondalıklı $\tilde{X}_8$ 'in (ki **Romberg** bunu vermez ama kodlama sistemine göre bu yaklaşıklıkla "X" diyecekti) son basamağı "2" olarak hatalı da olsa $k = 3$ 'te ekstrapolasyondan maksimum katkı elde edilmiştir!

Özetle $K(T_1), K(T_2), K(T_4), K(T_8)$ ve $K(U_1), K(U_2), K(U_4), K(U_8)$ kalan terimlerinin Tablo 2.1'den görüldüğü üzere Richardson ekstrapolasyonuna göre yazıldıklarını biliyoruz ve bu kalan terimler T_1, T_2, T_4, T_8 trapez ve U_1, U_2, U_4, U_8 orta nokta yaklaşıklıklarına eklendiklerinde $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{T}_4, \tilde{T}_8$ ve $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \tilde{U}_4, \tilde{U}_8$ yaklaşıklıkları elde edilir ki bu son yaklaşıklardan elde edilen sonuçları Tablo 2.2'de görüyoruz. Yani **Romberg** trapez ve orta nokta yaklaşıklarının kalan terimlerini Richardson ekstrapolasyonuna göre yazmak ve onları trapez ve orta nokta yaklaşıklarına ekleyerek elde ettiği $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{T}_4, \tilde{T}_8$ ve $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \tilde{U}_4, \tilde{U}_8$ yaklaşıklıklarını zaten ekstrapolasyonik yaklaşıklıklar olarak elde etmiştir, dolayısıyla bu ekstrapolasyonik yaklaşıklıkları tekrar Richardson ekstrapolasyonuna sokmak bir şey kazandırmaz. Bu sonuç $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{T}_4, \tilde{T}_8$ ve $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \tilde{U}_4, \tilde{U}_8$ yaklaşıklıklarının Tablo 2.2'de görüldüğü üzere tablosunun yapılmasını anlamsız kılar, çünkü bunlar zaten kendinden ekstrapolasyonlu yaklaşıklıklardır. Prof. Dr. **Tore Håvie** keşke 8-10 Aralık 1988'de Trondheim Üniversitesi'nde düzenlenen "**Romberg Semineri**"nde (ki bu seminerdeki makaleler 16 Mayıs 1989'da **Romberg**'in 80. doğum günü için **Tore Håvie** tarafından bir kitapta toplandı ve yayınlandı) makalesine 2. Yöntem'i de alıp sunumunu yapsaymış. Çünkü **Romberg** aşağıda görüldüğü gibi tezinde bu yönteme sık sık atıf yapıyordu ama bana nasip oldu!

70 Yıl Sonra Romberg'in Sözü Gerçekleşti ve Tezi Düzeltildi! (70 Jahre später erfüllt sich Rombergs Versprechen und seine These wird korrigiert!)

İşbu makaleyle **Romberg**'in aşağıdaki sözlerini (tezin sonundaki [yeşil tablonun altındaki sözler](#)) 70 yıl sonra yerine getirmiş bulunuyorum:

"Ayrıca u ve t 'yi izleyen yaklaşımların değişen işaretlerini de (yani trapez ve orta nokta yaklaşıklıklarının kalan terimlerinin zıt işaretli olması) görebiliriz.

Yöntemimiz daha yüksek mertebeden yaklaşımları basit bir şekilde sağlar. Bununla birlikte, bazen bir aralık parçasındaki düşük dereceli bir yaklaşım diğer aralık parçasındaki yaklaşımı telafi edebilir. Bu durumda teoremlerimiz her bir aralık parçası için geçerlidir (ki **Romberg**'in bu sonuçları bir makinede (MADAS ATG20) gözlemlediği anlaşılıyor).

(Man erkennt auch das abwechselnde Vorzeichen der an u und an t sich anschliessenden Näherungen.

Unsere Methode liefert auf einfache Weise die Näherungen höherer Ordnung. Trotzdem kann gelegentlich eine Näherung niedriger Ordnung im einen Intervallteil das des anderen Intervallteiles kompensiert. Unsere Sätze gelten dann für jeden der einzelnen Intervallteile).

Ayrıca "[Basitleştirilmiş Sayısal İntegral](#)" tezindeki tüm hataları düzelttim ve kaynakçalara (ve ilgili tüm yerlere) link vererek ilk kez için dijital ortama aktardım.

Romberg Tezinde Sık Sık EK'teki Yönteme Atıfta Bulunur!

Romberg, tezinin sonunda **Ole Amble**'in yönteminden elde edilen [2. tablo](#) ya da [turuncu tablonun](#) hemen altında şu açıklamalarda bulunur: " Q_8 'in 8 ondalık doğrulukla $I = 1$ 'e (ve **Ole Amble**'in dış noktalardan oluşan yaklaşıklıkları için [2. tablo](#)daki $\hat{Q}_8$ 'in 10 basamak doğrulukla bile $I = 1$ 'e) karşılık geldiğini görebiliriz. Hangi yöntemi kullanacağınız tamamen f_k 'nin nasıl hesaplanabileceğine bağlıdır. Eğer bulmaları kolaysa, daha ince bir bölme kullanmak daha iyidir. Sayısal hesaplamaları çok fazla çalışma gerektiriyorsa, burada belirttiğimiz gibi yüksek yaklaşımlı bir yöntem (2. Yöntem) önerilir.

(Wir sehen, dass Q_8 mit I in 8, $\hat{Q}_8$ sogar in 10 Dezimalen übereinstimmt. Welche Methode man verwendet, hängt ganz davon ab, wie sich die F_k berechnen lassen. Sind sie leicht zu finden, teilt man besser feiner ein. Erfordert ihre numerische Berechnung viel Arbeit, dann empfiehlt sich eine Methode hoher Näherung, wie wir sie hier angegeben haben)."

Romberg'in burada "Yüksek Yaklaşımlı Bir Yöntem (eine Methode hoher Näherung)" dediği şey, "[ANHANG \(EK\)](#)"teki yani buradaki 2. yöntemdir ve bu yöntemi ilk kez bu makalede gördüğünüz gibi tamamen deşifre ettim ve sonuç **Romberg**'in söylediği gibi çıktı!

Bununla birlikte [2. sayfada](#) daha sonra adıyla anılan yöntemi anlatırken 2. yönteme 2 yerde daha gönderme yapar:

"Bu yöntemin avantajı, her yeni 2'ye bölmenin yalnızca yeni fonksiyon değerlerinin ortalama değerini gerektirmesi ve bunun $b - a$ ile çarpılmasıdır; bu yeni U, T, S, R, Q ve U, V, W dizilerinin her birinin bir terim genişletilmesine izin verir. Kalan terimler h^2, h^4, h^6, h^8 olduğundan, bu basitçe giderek daha yüksek mertebeden yaklaşımlarla sonuçlanır.



Resim 2.2. **Werner Romberg**'in "[Vereinfachte numerische Integration](#)" adlı makaleyle amacı, standart bir sayısal integral yöntemi olan trapez kuralının yakınsama hızını artırmaktı. **Lewis Fry Richardson** 1927'de şimdi "Richardson Ekstrapolasyonu" olarak adlandırılan yöntemin özel bir durumunu ortaya koyduğu için bu amaca sahip ilk kişi o değildi. Ancak, burada söz konusu olan temel fikirler bundan çok daha eskiye dayanmaktadır; zira **Christiaan Huygens** 1654'te "[De Circuli Magnitudine Inventa](#)" adlı eserinde π 'yi hesaplarken bu ekstrapolasyonun ilk iterasyonunu kullandı ve **Takabe** π 'nin bir asimptotik formülünde bu ekstrapolasyonu kullanarak 41 ondalığını buldu (Bkz. "[Tetsujutsu Sankei \(1722\)](#)"). Bu sonuçla Richardson ekstrapolasyonu **Seki Kowa**'nın öğrencisi **Katahiro Takebe** tarafından 1710'dan önce, muhtemelen 1695'ten önce keşfedildi. Bu son gelişmeyi şunun için verdim: **Romberg** bu ekstrapolasyonu [\(1.7\)-\(1.10\)](#)'da **Takabe** gibi kullanırken Richardson ekstrapolasyonunu kullandığı ileri sürülerek tezine gölge düşürmeye çalıştılar ve bunu hala yapıyorlar. Fakat Tokyo Üniversitesi'nden Doç. Dr. **Naoki Osada** 18.3.2012'de 70. doğum günü için **Claude Brezinski**'ye adadığı "[Yakınsaklığı Hızlandırma Yöntemlerinin Erken Tarihi](#)" makalesinde bu durumu ifşa edince emperyalistler iyot gibi ortada kaldılar!

Şimdi şu yolu kullanıyorlar: "Yeniden keşfedildi (rediscovered)". **Seki Kowa**'nın algoritmasını 1926'da keşfeden **Aitken** ve **Takabe**'nin algoritmasını 1927'de keşfeden **Richardson** için bu kelimeyi kullanıyorlar. Tabii yerseniz. Bu sonuç İngiliz matematikçilerinin Antik Yunan matematikçilerinden bir farkı olmadığını gösterir. Bu arada uygarlık Avrupa kültürüne yön veren Yunan ve Roma ile değil Sümer, Babil ve Mısır ile başlar (Bkz. "[Greko-Romen](#)").

Yukarıdaki G^{11} yaklaşımı (2. Gauss formülü. **Romberg** bu formüldeki katsayıları ilk sayfadaki tabloda verir. Fakat G^1 ile gösterdiği ilk Gauss formülü tüm kaynaklarda Milne kuralı ([Milne's rule](#). Bkz. S. 1, Newton-Cotes formüllerinden 4. formül) ve Boole kuralı ([Boole's rule](#). Bkz. S. 4, (4.7)) olarak geçer. Ancak **Romberg** bu formülü ilk kez **Gauss**'da gördüğü için öyle demiş ve bu, kronolojik sıralamaya göre doğrudur. Bkz. **Gauss** için "[Bu Paskalya formülü bir matematik sansasyonuydu \(Diese Osterformel war eine Mathe-Sensation\)](#)", U_4 'teki F 'ye eşit ağırlıklar verdiğimizden bizim Q vb. yaklaşımımıza dahil edilmemiştir.

F 'nin $a \leq x \leq b$ şeklinde bir Taylor serisi olarak genişletilebileceğini varsayıyoruz; o zaman tüm yaklaşımların kalanları kolayca hesaplanabilir. Bunlar $8h$ uzunluğundaki bir alt aralık için yazılırsa, T ve U 'nun kalan terimlerdeki en düşük h -kuvveti terimlerinin ters işarete sahip olduğu görülebilir (Bkz. "[EK](#)"). Aşağıda h 'deki en düşük mertebeden terimin kalan teriminin daha yüksek h kuvvetlerine göre baskın olduğunu varsayarsak, I , T ve U arasında, T_1 ve U_1 , T_2 ve U_2 , T_4 ve U_4 arasında yaklaşık olarak ortasında yer alacaktır. Aynı durum $S_2, V_2; S_4, V_4; R_4, W_4$ çiftleri için de geçerlidir. $S_4 = \overline{S_2 + V_2}$, $S_8 = \overline{S_4 + V_4}$, $R_8 = \overline{R_4 + W_4}$ olduğundan, beklenen I -yaklaşım değerleri zaten S ve R 'imizde bulunmaktadır ve yöntemimizin $(^1)$ son hesaplanan değerinden daha doğru değildir. Dolayısıyla, yukarıdaki her biri $2^3 = 8$ parçaya bölünme ile, yukarıdaki Q_8, U_1, U_2, U_4 'ten hesaplanabilen I 'ya en doğru yaklaşımdır; tekrar yarıya indirmekle en iyi sonucu P_{16} vs. verecektir.

(Der Vorteil dieser Methode beruht darauf, dass jedes neue Halbieren nur den Mittelwert der neuen Funktionenswerte erfordert, multipliziert mit $b - a$, dieses neue U erlaubt, die Folgen der T, S, R, Q und U, V, W je um ein Glied zu verlängern. Da die Restglieder prop. h^2, h^4, h^6, h^8 sind, ergeben sich so einfach Näherungen immer höherer Ordnung.

Die oben angeführte Näherung G^{11} ist nicht in unseren Näherung Q usw. enthalten, da wir die F in U_4 mit gleichen Gewichten versehen.

Wir setzen voraus, dass F sich in $a \leq x \leq b$ in eine Taylor-Reihe entwickeln lässt; dann kann man die Restglieder aller Näherungen leicht berechnen. Schreibt man diese für ein Teilintervall der Länge $8h$ auf, so zeigt sich, dass das Glied der niedrigsten h -Potenz im Restgliede von T und U entgegengesetztes Vorzeichen hat (Siehe [Anhang](#)). Nehmen wir im Folgenden an, dass das Glied niedrigster Ordnung in h gegenüber den höheren h -Potenzen im Restgliede überwiegt, dann wird I zwischen T und U liegen, und zwar etwa in der Mitte zwischen T_1 und U_1, T_2 und U_2, T_4 und U_4 . Dasselbe zeigen die Zahlenpaare $S_2, V_2; S_4, V_4; R_4, W_4$. Da nun $S_4 = \overline{S_2 + V_2}$, $S_8 = \overline{S_4 + V_4}$, $R_8 = \overline{R_4 + W_4}$ sind die durch die Einschliessung zu erwartenden I -Näherungswerte schon in unseren S und R enthalten, und nicht genauer als der zuletzt berechnete Wert unserer Methode $(^1)$. So ist bei obiger Teilung, in je $2^3 = 8$ Teile, obiges Q_8 die genaueste Näherung an I , die sich aus den U_1, U_2, U_4 berechnen lässt; nochmaliges Halbieren gäbe als bestes ein P_{16} u.s.w.)"

Burada $(^1)$ ile gösterilen şey, 2. sayfanın sonundaki dipnottur ve $(^1)$ Ancak ekteki sonuç bölümüne bakınız (Siehe aber die Schlussbemerkung im Anhang)" demektir. Ama **Romberg**'in çokça zikrettiği bu yöntemi (2. Yöntem) tezinde adeta sabote eder gibi vermiş olması affedilir bir davranış değildir. Çünkü bu yöntem **Romberg**'in tezinde A3 formatında 1 sayfada (bkz. 3. sayfa sonu ile 4. sayfa. Orijinalde sayfa boyutları nedeniyle 2 sayfa. Bkz. S. 35-36) verilirken hem bazı bilgiler yanlış verilmiştir hem de yöntemi açıklaması gereken bilgiler yetersiz verilmiştir.

2.5.4. Süper Yakınsama

Bu yakınsama kalan terimli trapez ve orta nokta yaklaşıklıklarının en etkin olduğu şu durumda gerçekleşir: $c \rightarrow 0$ iken $t = cx$ değişken dönüşümüne göre

$$(2.63) \quad I = \int_0^c f(t)dt = c \int_0^1 f(cx)dx$$

integrallerindeki $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{T}_4, \tilde{T}_8$ trapez ve $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \tilde{U}_4, \tilde{U}_8$ orta nokta yaklaşıklıklarının yakınsaklık hızları en yüksek olur. Bu integrallerden ikincisinde 1. yöntem kullanılır ve bu yaklaşıklıklara ait formüller (2.37) ve (2.39)'dan $t = cx$ değişken dönüşümüne göre elde edilirler. Bu nedenle bu formülleri burada vermeye gerek duymuyorum ama bu formüllere eşdeğer formülleri aşağıda ilk integral için vereceğim.

İlk integralde 2. yöntemle göre $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{T}_4, \tilde{T}_8$ ve $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \tilde{U}_4, \tilde{U}_8$ 'deki T_1, T_2, T_3, T_4 ve U_1, U_2, U_3, U_4 için (2.40)'taki değerler kullanılır ve bu yaklaşıklıklarda $t = a + x \cdot 8h$ değişken dönüşümüne göre $a = 0$ ve $8h = b - a = c - 0 = c$ olduklarından $t = cx$ geçerli olur. O halde (2.37)'de $t = cx$ değişken dönüşümünü yaparsak trapez ve orta nokta yaklaşıklıklarını

$$(2.64) \quad \begin{aligned} T_1 &= c \cdot \frac{f(0) + f(c)}{2}, \\ T_2 &= \frac{T_1}{2} + \frac{c}{2} f\left(\frac{c}{2}\right), \\ T_4 &= \frac{T_2}{2} + \frac{c}{4} \left(f\left(\frac{c}{4}\right) + f\left(\frac{3c}{4}\right) \right), \\ T_8 &= \frac{T_4}{2} + \frac{c}{8} \left(f\left(\frac{c}{8}\right) + f\left(\frac{3c}{8}\right) + f\left(\frac{5c}{8}\right) + f\left(\frac{7c}{8}\right) \right), \\ T_{16} &= \frac{T_8}{2} + \frac{c}{16} \left(f\left(\frac{c}{16}\right) + f\left(\frac{3c}{16}\right) + f\left(\frac{5c}{16}\right) + f\left(\frac{7c}{16}\right) + f\left(\frac{9c}{16}\right) + f\left(\frac{11c}{16}\right) + f\left(\frac{13c}{16}\right) + f\left(\frac{15c}{16}\right) \right), \\ &\vdots \\ U_1 &= cf\left(\frac{c}{2}\right), \\ U_2 &= \frac{c}{2} \left(f\left(\frac{c}{4}\right) + f\left(\frac{3c}{4}\right) \right), \\ U_4 &= \frac{c}{4} \left(f\left(\frac{c}{8}\right) + f\left(\frac{3c}{8}\right) + f\left(\frac{5c}{8}\right) + f\left(\frac{7c}{8}\right) \right), \\ U_8 &= \frac{c}{8} \left(f\left(\frac{c}{16}\right) + f\left(\frac{3c}{16}\right) + f\left(\frac{5c}{16}\right) + f\left(\frac{7c}{16}\right) + f\left(\frac{9c}{16}\right) + f\left(\frac{11c}{16}\right) + f\left(\frac{13c}{16}\right) + f\left(\frac{15c}{16}\right) \right), \\ &\vdots \end{aligned}$$

şeklinde elde ederken, bunlara karşılık gelen (2.38)'deki $K(T_1), K(T_2), K(T_4), K(T_8)$ ve $K(U_1), K(U_2), K(U_4), K(U_8)$ kalan terimlerdeki f 'nin çift mertebeden türevleri $z = 0$ 'da tanımlıdır, dolayısıyla $x = \frac{4h+0}{8h} = \frac{1}{2}$ ve buradan da $t = \frac{c}{2}$ 'de alırsak kalan terimler serilere şöyle açılırlar:

$$\begin{aligned}
K(T_1) &= c \sum_{m=1}^{\infty} f^{(2m)} \left(\frac{c}{2} \right) \frac{\left(\frac{c}{2} \right)^{2m}}{(2m+1)!} (2m), \\
K(T_2) &= c \sum_{m=1}^{\infty} f^{(2m)} \left(\frac{c}{2} \right) \frac{\left(\frac{c}{2} \right)^{2m}}{(2m+1)!} \cdot \frac{2m-1}{2}, \\
K(T_4) &= c \sum_{m=1}^{\infty} f^{(2m)} \left(\frac{c}{2} \right) \frac{\left(\frac{c}{4} \right)^{2m}}{(2m+1)!} \cdot \frac{(2m-3)2^{2m} + 4m + 2}{4}, \\
K(T_8) &= c \sum_{m=1}^{\infty} f^{(2m)} \left(\frac{c}{2} \right) \frac{\left(\frac{c}{8} \right)^{2m}}{(2m+1)!} \cdot \frac{(2m-7)2^{4m} + (4m+2)2^{2m} + (4m+2)3^{2m} + 4m + 2}{8}, \\
(2.65) \quad K(T_{16}) &= c \sum_{m=1}^{\infty} f^{(2m)} \left(\frac{c}{2} \right) \frac{\left(\frac{c}{8} \right)^{2m}}{(2m+1)!} \cdot \frac{(2m-15)2^{6m} + (4m+2)2^{4m} + (4m+2)2^{2m} + (4m+2)6^{2m} + 2(2m+1)(1+3^{2m}+5^{2m}+7^{2m})}{2^{2m+4}}, \\
&\vdots \\
K(U_1) &= c \sum_{m=1}^{\infty} f^{(2m)} \left(\frac{c}{2} \right) \frac{\left(\frac{c}{2} \right)^{2m}}{(2m+1)!}, \\
K(U_2) &= c \sum_{m=1}^{\infty} f^{(2m)} \left(\frac{c}{2} \right) \frac{\left(\frac{c}{4} \right)^{2m}}{(2m+1)!} (2^{2m} - (2m+1)), \\
K(U_4) &= c \sum_{m=1}^{\infty} f^{(2m)} \left(\frac{c}{2} \right) \frac{\left(\frac{c}{8} \right)^{2m}}{(2m+1)!} \left(4^{2m} - \frac{(2m+1)(3^{2m}+1)}{2} \right), \\
K(U_8) &= c \sum_{m=1}^{\infty} f^{(2m)} \left(\frac{c}{2} \right) \frac{\left(\frac{c}{8} \right)^{2m}}{(2m+1)!} \frac{1}{4^{m+1}} (4^{3m+1} - (2m+1)(1+3^{2m}+5^{2m}+7^{2m})), \\
&\vdots
\end{aligned}$$

2.5.5. Romberg ve Pamuktulum: Kalan Terimlerin Serilerinde 2. Tür Lineer E-ATA Ekstrapolasyonlarını Yakalamak. *Beethoven*, küçük yeğeni *Karl*'ı piyanonun başına oturtuktan sonra “ilk konserimi senin yaşındayken (9) vermiştim” dedi (Bkz. “*Ölümsüz Sevgili*”). Buna göre eğer *Romberg*'in Tablo 2.1'ini *Beethoven*'un yaşındaki gibi büyütürsek bu ekstrapolasyonları yakalayabilmek mümkün olur. Örneğin [Tablo 1.2](#)'de kullandığım ekstrapolasyonu bulabilmek için şu tabloyu yapmanız gerekir:

İndisleri 4^j olan Trapez ve Orta Nokta Yaklaşıklıklarının (2.5) Formundaki K Kalanlarının Katsayıları				
	a	b	c	d
$K(U_1)$	16	256	4096	65536
$K(U_4)$	1	51	1541	36007
$K(U_{16})$	$\frac{1}{16}$	$3\frac{83}{256}$	$110\frac{4021}{4096}$	$3013\frac{44775}{65536}$
$K(U_{64})$	$\frac{1}{256}$	$\frac{13651}{65536}$	$6\frac{16710325}{16777216}$	$191\frac{3308974823}{4294967296}$
$K(T_1)$	32	1024	24576	524288
$K(T_4)$	2	104	3296	83072
$K(T_{16})$	$\frac{1}{8}$	$6\frac{21}{32}$	$222\frac{107}{128}$	$6077\frac{153}{512}$
$K(T_{64})$	$\frac{1}{128}$	$\frac{3413}{8192}$	$13\frac{521899}{524288}$	$383\frac{24750489}{33554432}$
$K(V_4)$	$\frac{16.1-16}{15} = 0$	$\frac{16.51-256}{15} = 37\frac{1}{3}$	$\frac{16.1541-4096}{15} = 1370\frac{2}{3}$	$\frac{16.36007-65536}{15} = 34038\frac{2}{5}$
$K(V_{16})$	$\frac{16.\frac{1}{16}-1}{15} = 0$	$\frac{16.3\frac{83}{256}-51}{15} = \frac{7}{48}$	$\frac{16.110\frac{4021}{4096}-1541}{15} = 15\frac{497}{768}$	$\frac{16.3013\frac{44775}{65536}-36007}{15} = 814\frac{2637}{20480}$
$K(V_{64})$	$\frac{16.\frac{1}{256}-\frac{1}{16}}{15} = 0$	$\frac{16.\frac{13651}{65536}-3\frac{83}{256}}{15} = \frac{7}{12288}$	$\frac{16.6\frac{16710325}{16777216}-110\frac{4021}{4096}}{15} = \frac{200177}{3145728}$	$\frac{16.191\frac{3308974823}{4294967296}-3013\frac{44775}{65536}}{15} = 3\frac{862901837}{1342177280}$
$K(S_4)$	$\frac{16.2-32}{15} = 0$	$\frac{16.104-1024}{15} = 42\frac{2}{3}$	$\frac{16.3296-24576}{15} = 1877\frac{1}{3}$	$\frac{16.83072-524288}{15} = 53657\frac{3}{5}$
$K(S_{16})$	$\frac{16.\frac{1}{8}-2}{15} = 0$	$\frac{16.6\frac{21}{32}-104}{15} = \frac{1}{6}$	$\frac{16.222\frac{107}{128}-3296}{15} = 17\frac{23}{24}$	$\frac{16.6077\frac{153}{512}-83072}{15} = 944\frac{51}{160}$
$K(S_{64})$	$\frac{16.\frac{1}{128}-\frac{1}{8}}{15} = 0$	$\frac{16.\frac{3413}{8192}-6\frac{21}{32}}{15} = \frac{1}{1536}$	$\frac{16.13\frac{521899}{524288}-222\frac{107}{128}}{15} = \frac{7151}{98304}$	$\frac{16.383\frac{24750489}{33554432}-6077\frac{153}{512}}{15} = 4\frac{1749811}{10485760}$
$K(W_{16})$		$\frac{256.\frac{7}{48}-37\frac{1}{3}}{255} = 0$	$\frac{256.15\frac{497}{768}-1370\frac{2}{3}}{255} = 10\frac{1}{3}$	$\frac{256.814\frac{2637}{20480}-34038\frac{2}{5}}{255} = 683\frac{67}{80}$
$K(W_{64})$		$\frac{256.\frac{7}{12288}-\frac{7}{48}}{255} = 0$	$\frac{256.\frac{200177}{3145728}-15\frac{497}{768}}{255} = \frac{31}{12288}$	$\frac{256.3\frac{862901837}{1342177280}-814\frac{2637}{20480}}{255} = \frac{2435507}{5242880}$
$K(R_{16})$		$\frac{256.\frac{1}{6}-42\frac{2}{3}}{255} = 0$	$\frac{256.17\frac{23}{24}-1877\frac{1}{3}}{255} = 10\frac{2}{3}$	$\frac{256.944\frac{51}{160}-53657\frac{3}{5}}{255} = 737\frac{3}{5}$
$K(R_{64})$		$\frac{256.\frac{1}{1536}-\frac{1}{6}}{255} = 0$	$\frac{256.\frac{7151}{98304}-17\frac{23}{24}}{255} = \frac{1}{384}$	$\frac{256.4\frac{1749811}{10485760}-944\frac{51}{160}}{255} = \frac{19661}{40960}$
$K(X_{64})$			$\frac{4096.\frac{31}{12288}-10\frac{1}{3}}{4095} = 0$	$\frac{4096.\frac{2435507}{5242880}-683\frac{67}{80}}{4095} = \frac{512039}{1048320}$
$K(Q_{64})$			$\frac{4096.\frac{1}{384}-10\frac{2}{3}}{4095} = 0$	$\frac{4096.\frac{19661}{40960}-737\frac{3}{5}}{4095} = \frac{3}{5}$

Tablo 2.3. Bu kalanların katsayılarına (2.51)'deki ekstrapolasyon uygulandığında “0” elde edilir ve bunlar ilk 3 sütundaki a, b ve c katsayılarıdır.

Bu tabloyu alabildiğinize uzatabilir yani genel olarak $j = 0, 1, 2, \dots, n$ için $K(T_1), K(T_4), K(T_{16}), \dots, K(T_{4^n})$ ve $K(U_1), K(U_4), K(U_{16}), \dots, K(U_{4^n})$ kalan terimlerinin katsayılarından oluşan tabloyu elde edebilir ve böylece (2.39)'daki 2. Tür Lineer E-ATA Ekstrapolasyonu'ndan $m = 2$ için elde edilen (2.51)'deki ekstrapolasyon bu katsayılara uygulandığında ilk n sütundaki değerlerin sıfırlandığı görürsünüz. Bunun böyle olduğunu **Romberg** 1955'te Tablo 2.1'de indisleri 2^j olan trapez ve orta nokta yaklaşıklıklarının $K(T_1), K(T_2), K(T_4), \dots, K(T_{2^n})$ ve $K(U_1), K(U_2), K(U_4), \dots, K(U_{2^n})$ kalan terimlerinin katsayıları için yaptığından (2.39)'daki 2. Tür Lineer E-ATA Ekstrapolasyonu'ndan $m = 1$ için elde edilen (2.50)'deki ekstrapolasyonu ya da Richardson ekstrapolasyonunu kullanmış oldu. Bu durum genelde Tablo 2.1'deki indisleri 2^j olan trapez ve orta nokta yaklaşıklıklarının $K(T_1), K(T_{2^m}), K(T_{2^{2m}}), \dots, K(T_{2^{nm}})$ ve $K(U_1), K(U_{2^m}), K(U_{2^{2m}}), \dots, K(U_{2^{nm}})$ kalan terimlerinin katsayılarına (2.39)'daki 2. Tür Lineer E-ATA Ekstrapolasyonu uygulandığında tablodaki ilk n sütundaki değerlerin sıfırlanması için de geçerlidir.

Peki **Romberg** bu şekilde tablolamalar yoluyla (2.39)'daki genel ekstrapolasyonu görebilir miydi?

Bunun ne kadar zorlu bir uğraş olduğunu Tablo 2.3'ten açık bir şekilde görüyorsunuz. Bu nedenle **Romberg**'in (2.39)'daki genel ekstrapolasyonu görebilmesi için hem büyük tablolarla çalışması (ki bu durumda akıl almaz büyüklükte sayılar karşınıza çıkacaktır) hem de Tablo 2.1'de olduğu gibi ilk n sütundaki değerleri sıfırlayan ekstrapolasyonları görmesi gerekiyordu. Bunu Tablo 2.1 ve 2.3'teki ilk sütundaki a katsayılarında yapabilmek kolay iken b, c, d ve diğer katsayılar da yapabilmek o kadar kolay değildir. Bunun için içinde bulunduğunuz kabın dışına çıkıp yepyeni bir bakış açısıyla bakmanız gerekir. Fakat **Romberg** eski geleneğe bağlı kaldığından (2.39)'daki genel ekstrapolasyonu görmesi mümkün değildi. Görmesine de gerek yoktu çünkü (2.39)'daki genel ekstrapolasyonu 14.05.2003'te keşfetmiştim. Bu, **Romberg**'in 05.02.2003'ü ölümünden sonra 98. günü gösteriyordu. O sırada "Arşimet'in Metodu M.V." adlı çalışmamdaki düzgün çokgen algoritmalarının yakınsaklık hızını artırabilmek için **Snellius**'tan (1621) **Richardson**'a (1927) kadar tüm algoritmalara bakarak bir çözüm üretmeye çalışıyordum (bkz. "1. Nesil Arktanjanant Fonksiyonu İle II Sayısının Hesabı, Ver. 3". Daha fazla bilgi için RİK 4'teki "2.2. E-ATA 1 Algoritmaları'ndan Transferler", S. 30-31'e bakınız), dolayısıyla **Romberg**'in öldüğünden haberim yoktu. Yani **Romberg**'in öldüğünü o sırada değil "Romberg İntegrali Projesi"ne başladığımda, 2016'nın sonlarında öğrendim. Aynı şekilde 1. Tür Lineer E-ATA Ekstrapolasyonu'nu ve (2.39)'daki 2. Tür Lineer E-ATA Ekstrapolasyonu'nu 2016'da değil 2017'de farkına vardım. Çünkü her 2 ekstrapolasyonu "Romberg Metodu" adlı dosyamdaki 23.01.2017, 07:50:22'de tarihli "3.5. Temel (Richardson) Ekstrapolasyona Yeni Bir Bakış" başlıklı çalışmamda vermeme rağmen 2003'teki "E-ATA 1 Algoritmaları" adlı çalışmamdaki yöntemi unuttum ve bu yöntemi çözmeden (ki yöntemde q -Pochhammer ve q -binom sayıları vardı) elde ettiğim 26 algoritmanın (ekstrapolasyonları) nasıl kullanıldıklarını anlamam mümkün değildi. Bunun için bana yaz gibi geniş bir çalışma zamanı lazımdı ama 19.02.2017'de keşfettiğim yüksek mertebeden ekstrapolasyonlar söz konusu olunca (bkz. "2.4.1. p -inci Mertebeden Ekstrapolasyonlar", S. 40-42) hemen ardından (26.05.2017, 19:03) bu lineer ekstrapolasyonları genel bir form üzerinde araştırmaya başladım ve yeniden ortaya çıkarttım. Söz konusu bu 2 farklı formdaki ekstrapolasyonları 23.01.2017, 07:50:22'de de çıkartmışım ama genel formdan çıkartmak daha kolaydı ve nihayet 2018 yazında da bu lineer ekstrapolasyon çiftini en genel halde yazıp ispatladım. Bu bakımdan **Lewis Fry Richardson** gibi hareket ettiğim açıktır, çünkü **Richardson** 1910'da teorik olarak temellendiği ekstrapolasyonu (ki burası araştırılmaya muhtaç bir konudur) 1927'de esaslı bir şekilde ortaya koyarken ben de 2003'teki 2 farklı formdaki lineer ekstrapolasyon çiftini en genel formda 2018'de 2. kez verdim. Bu ekstrapolasyonları 2003'te iteratif düzgün çokgen algoritmaları için kullanırken 2017'den beri Romberg İntegrali Yöntemi için kullanmaya başladım (ki 30. sayfadaki Alıntı 2.1'de gördüğünüz gibi 2003'te E-ATA 1 Algoritmaları'nın, dolayısıyla bu ekstrapolasyon çiftinin sayısal (nümerik) integraller için de kullanılabileceğini belirtmiştim). Ama en efsane keşfim burada gerçekleşti diyebilirim. Çünkü **Romberg** Tablo 2.1'i biraz büyütse ve Tablo 2.3'ü bulsa (ki bu biraz "halamın bıyığı olsa" gibi şeye dönüştü) (2.51)'deki ekstrapolasyonu keşfetmesi mümkün olabilirmiş. Bana göre bu beklenmedik keşfin (ki bu keşif ya da ortaya çıkan durum benim için geçerli değil çünkü bu durumun baştan beri farkındaydım) **Romberg**'e yapılan haksızlıklarının bir sonucu olarak ortaya çıktığını düşünüyorum (Bkz. "Seiji Fujino: Romberg İntegrali'nin Mucidi Dr. Werner Romberg ile Bir Röportaj Gerçekleştirdim"). Demek ki **Romberg**'in bir alacağı varmış ama bu bugüne kadar bir türlü ortaya çıkamamış!

2.5.6. Kalan Terimli Trapez ve Orta Nokta Yaklaşıklıklarının Yakınsakları

Öncelikle kalan terimli trapez ve orta nokta yaklaşıklıklarının yakınsaklık hızına geçmeden önce Tablo 1.2'nin son sütunundaki Q_{64} ve X_{64} 'e paralel şu sonuçları verebilirim:

Artan Sıralı Yaklaşık Değerler Tablosu		
Aralık Uzunluğu	Kalan Terim	
	h^2	h^8
64h	$T_1 = 0.78539816339744830961 \dots$	$\tilde{T}_1 = 1.0000000001175161049 \dots$
	$U_1 = 1.1107207345395915617 \dots$	$\tilde{U}_1 = 0.99999999999020220227 \dots$
16h	$T_4 = 0.98711580097277541227 \dots$	$\tilde{T}_4 = 1.000000000220462587 \dots$
	$U_4 = 1.006454542799563932 \dots$	$\tilde{U}_4 = 0.9999999999222161417 \dots$
4h	$T_{16} = 0.99919668048507229329 \dots$	$\tilde{T}_{16} = 1.0000000000019327934 \dots$
	$U_{16} = 1.0004017081549652956 \dots$	$\tilde{U}_{16} = 0.9999999999905422551 \dots$
h	$T_{64} = 0.99994980009210122621 \dots$	$\tilde{T}_{64} = 1.00000000000012403814 \dots$
	$U_{64} = 1.0000251001429512867 \dots$	$\tilde{U}_{64} = 0.9999999999993806404 \dots$

Tablo 2.4. Bu yeni tablodaki aralık uzunluğu $64h = 1$ 'dir ve T_1, T_4, T_{16}, T_{64} trapez ve U_1, U_4, U_{16}, U_{64} orta nokta yaklaşıklıklarının yakınsaklık hızı h^2 iken kalan terimli $\tilde{T}_1, \tilde{T}_4, \tilde{T}_{16}, \tilde{T}_{64}$ trapez ve $\tilde{U}_1, \tilde{U}_4, \tilde{U}_{16}, \tilde{U}_{64}$ orta nokta yaklaşıklıklarının yakınsaklık hızı Tablo 1.2'nin son sütunundaki gibi h^8 'dir.

Bu tabloda $\tilde{T}_1, \tilde{T}_4, \tilde{T}_{16}, \tilde{T}_{64}$ trapez ve $\tilde{U}_1, \tilde{U}_4, \tilde{U}_{16}, \tilde{U}_{64}$ orta nokta yaklaşıklıklarının kalan terimlerine ait serilerden 5 terim alınmıştır ve T_1, T_4, T_{16}, T_{64} trapez ve U_1, U_4, U_{16}, U_{64} orta nokta yaklaşıklıklarının (2.51)'deki ekstrapolasyona göre maksimum yakınsaklık hızı $O(h^{2.3+2}) = O(h^8)$ iken bunlara ait $K(T_1), K(T_4), K(T_{16}), K(T_{64})$ ve $K(U_1), K(U_4), K(U_{16}), K(U_{64})$ kalan terimlerin yakınsaklık hızı 5 terim için $O(h^{2.5+2}) = O(h^{12})$ olduğundan $j = 0, 1, 2, 3$ için $\tilde{T}_{4^j} = T_{4^j} - K(T_{4^j}) \Rightarrow O(\tilde{T}_{4^j}) = O(T_{4^j} - K(T_{4^j})) = O(T_{4^j}) - O(K(T_{4^j})) = O(h^8) - O(h^{12}) = O(h^8)$ ve aynı şekilde $\tilde{U}_{4^j} = U_{4^j} + K(U_{4^j}) \Rightarrow O(\tilde{U}_{4^j}) = O(U_{4^j} + K(U_{4^j})) = O(U_{4^j}) + O(K(U_{4^j})) = O(h^8) + O(h^{12}) = O(h^8)$ olduğundan toplam ya da farkın yakınsaklık hızı bu yakınsaklık hızlarının minimuma eşit olur!

Bu sonuç kabaca teorik olarak doğrudur çünkü **Romberg** (2.39)'dan $m = 1$ için elde edilen ekstrapolasyona ya da Richardson ekstrapolasyonuna göre Tablo 2.1'de (ya da yeşil tablo) ve ben de $m = 2$ için elde edilen ekstrapolasyona ya da (2.51)'deki ekstrapolasyona göre Tablo 2.3'te kalan terimlerin (tablolardaki 0 olan yerlerdeki) yakınsaklık hızlarını gösterdik. Fakat bu yakınsaklık hızlarının nasıl elde edildiğini en açık şekilde ele almakta fayda var: İlk **Romberg** Tablo 2.1'de $K(V_2), K(V_4)$ ve $K(S_2), K(S_4), K(S_8)$ 'in a katsayılarını sıfırlarken bunların Richardson ekstrapolasyonundaki yakınsaklık hızları sırasıyla h_1^4, h_2^4 ve h_0^4, h_1^4, h_2^4 demektir; $K(W_4)$ ve $K(R_4), K(R_8)$ 'in b katsayılarını sıfırlarken bunların Richardson ekstrapolasyonundaki yakınsaklık hızları da sırasıyla h_1^6 ve h_0^6, h_1^6 ve son olarak $K(Q_8)$ 'in c katsayısını sıfırlarken Richardson ekstrapolasyonundaki yakınsaklık hızı h_1^8 olur. Tablo 2.3'te ise $K(V_4), K(V_{16}), K(V_{64})$ ve $K(S_4), K(S_{16}), K(S_{64})$ 'ün a katsayıları sıfırlanırken (2.51)'deki ekstrapolasyondaki yakınsaklık hızları sırasıyla h_4^4, h_7^4, h_{10}^4 ve h_5^4, h_7^4, h_8^4 ; $K(W_{16}), K(W_{64})$ ve $K(R_{16}), K(R_{64})$ 'ün b katsayıları sıfırlanırken (2.51)'deki ekstrapolasyondaki yakınsaklık hızları sırasıyla h_7^6, h_9^6 ve h_6^6, h_8^6 ve son olarak $K(X_{64})$ ve $K(Q_{64})$ 'ün c katsayıları sıfırlanırken (2.51)'deki ekstrapolasyondaki yakınsaklık hızları sırasıyla h_8^8 ve h_7^8 dir. Eğer bu yakınsaklık hızlarındaki indisleri göz önüne almazsak her 2 tablodan elde edilen karşılıklı elemanların aynı yakınsaklık hızlarında

olduğunu söyleyebiliriz. Ancak (2.39)'dan $m = 1$ için elde edilen ekstrapolasyon ya da Richardson ekstrapolasyonu ile $1 < m$ için elde edilen diğer ekstrapolasyonlar arasındaki fark da burada yatıyor. Çünkü m büyüdükçe h 'nin tabanı büyüyor ve bu da önceki ekstrapolasyonlara yakınsaklık hızında fark atmasına neden oluyor!

Ayrıca Tablo 2.4'teki 2. sütundaki kalan terimli $\tilde{T}_1, \tilde{T}_4, \tilde{T}_{16}, \tilde{T}_{64}$ trapez ve $\tilde{U}_1, \tilde{U}_4, \tilde{U}_{16}, \tilde{U}_{64}$ orta nokta yaklaşıklıklarının yakınsaklık hızlarını gösteren şu tabloları verebilirim: (2.51)'deki ekstrapolasyon $T_0, T_2, T_4, T_6, T_8, T_{10}$ trapez yaklaşıklıklarına uygulandığında

Aralık Uzunluğu	Kalan Terim					
	h_j^2	h_{4j+1}^4	h_{4j+2}^6	h_{4j+3}^8	h_{4j+4}^{10}	h_{4j+5}^{12}
h_0	$\Delta T_0 = -0.214602$					
h_2	$\Delta T_2 = -0.0128842$	$\Delta S_2 = 0.000563643$				
h_4	$\Delta T_4 = -0.00080332$	$\Delta S_4 = 2.07245 \times 10^{-6}$	$\Delta R_4 = -1.29787 \times 10^{-7}$			
h_6	$\Delta T_6 = -0.000501999$	$\Delta S_6 = 8.0659 \times 10^{-9}$	$\Delta R_6 = -2.97308 \times 10^{-11}$	$\Delta Q_6 = 1.95591 \times 10^{-12}$		
h_8	$\Delta T_8 = -3.13746 \times 10^{-6}$	$\Delta S_8 = 3.15002 \times 10^{-11}$	$\Delta R_8 = -7.23052 \times 10^{-15}$	$\Delta Q_8 = 2.7985 \times 10^{-17}$	$\Delta P_8 = -1.85987 \times 10^{-18}$	
h_{10}	$\Delta T_{10} = -1.96091 \times 10^{-7}$	$\Delta S_{10} = 1.23046 \times 10^{-13}$	$\Delta R_{10} = -1.76484 \times 10^{-18}$	$\Delta Q_{10} = 4.25354 \times 10^{-22}$	$\Delta P_{10} = -1.66293 \times 10^{-24}$	$\Delta O_{10} = 1.10778 \times 10^{-25}$

Tablo 2.5. $h_0 = 1024h = 1$ ve $l = 1$ için trapez yaklaşıklıklarının mutlak hatası $\Delta T_{2j} = T_{2j} - I$ ve (2.51)'deki ekstrapolasyona göre ekstrapolasyonik trapez yaklaşıklıklarının mutlak hataları $k = 1$ için $\Delta S_{2j} = S_{2j} - I$, $k = 2$ için $\Delta R_{2j} = R_{2j} - I$, $k = 3$ için $\Delta Q_{2j} = Q_{2j} - I$, $k = 4$ için $\Delta P_{2j} = P_{2j} - I$ ve $k = 5$ için $\Delta O_{10} = O_{10} - I$ 'dir.

ve $U_0, U_2, U_4, U_6, U_8, U_{10}$ orta nokta yaklaşıklıklarına uygulandığında

Aralık Uzunluğu	Kalan Terim					
	h_{j+1}^2	h_{4j+1}^4	h_{4j+2}^6	h_{4j+3}^8	h_{4j+4}^{10}	h_{4j+5}^{12}
h_0	$\Delta U_0 = 0.110721$					
h_2	$\Delta U_2 = 0.00645454$	$\Delta V_2 = -0.000496537$				
h_4	$\Delta U_4 = 0.000401708$	$\Delta V_4 = -1.81415 \times 10^{-6}$	$\Delta W_4 = 1.25934 \times 10^{-7}$			
h_6	$\Delta U_6 = 0.0000251001$	$\Delta V_6 = -7.05785 \times 10^{-9}$	$\Delta W_6 = 2.88046 \times 10^{-11}$	$\Delta X_6 = -1.9414 \times 10^{-12}$		
h_8	$\Delta U_8 = 1.56873 \times 10^{-6}$	$\Delta V_8 = -2.75627 \times 10^{-11}$	$\Delta W_8 = 7.00461 \times 10^{-15}$	$\Delta X_8 = -2.7767 \times 10^{-17}$	$\Delta Y_8 = 1.85462 \times 10^{-18}$	
h_{10}	$\Delta U_{10} = 9.80457 \times 10^{-8}$	$\Delta V_{10} = -1.07665 \times 10^{-13}$	$\Delta W_{10} = 1.70969 \times 10^{-18}$	$\Delta X_{10} = -4.22031 \times 10^{-22}$	$\Delta Y_{10} = 1.65969 \times 10^{-24}$	$\Delta Z_{10} = -1.10727 \times 10^{-25}$

Tablo 2.6. $h_0 = 1024h = 1$ ve $l = 1$ için orta nokta yaklaşıklıklarının mutlak hatası $\Delta U_{2j} = U_{2j} - I$ ve (2.51)'deki ekstrapolasyona göre ekstrapolasyonik orta nokta yaklaşıklıklarının mutlak hataları $k = 1$ için $\Delta V_{2j} = V_{2j} - I$, $k = 2$ için $\Delta W_{2j} = W_{2j} - I$, $k = 3$ için $\Delta X_{2j} = X_{2j} - I$, $k = 4$ için $\Delta Y_{2j} = Y_{2j} - I$ ve $k = 5$ için $\Delta Z_{10} = Z_{10} - I$ 'dir.

sonuçları geçerli olur. Burada $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ için $T_{2j} := T_{2^j}$ ve $U_{2j} := U_{2^j}$ ve (2.51)'deki ekstrapolasyondan elde edilen sonuçlar **Romberg**'in kodlama sistemine göre adlandırılmıştır. Çünkü **Romberg** tezindeki [mavi tablo](#) ve [turuncu tabloda](#) [Alman alfabesine](#) göre “A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z” harflerinden trapez için T’yi (ki Almancada “Trapez” denilmektedir) ve orta nokta için U’yu (ki Almancada “Mittelpunkregel (orta nokta kuralı)” denir ve bunun U ile bir ilgisi yoktur. **Romberg** bunu alfabetik sıralamaya göre T’den sonra U olarak aldı) seçti ve bu tablolardaki Richardson ekstrapolasyonundan elde edilen 2., 3. ve 4. sütunlardaki sonuçlara ekstrapolasyonik trapez yaklaşıklıklara T’den geriye ve ekstrapolasyonik orta nokta yaklaşıklıklara U’dan ileriye doğru harfleri atadı. Dolayısıyla Tablo 2.2, 2.3, 2.4 ve 2.5’teki ekstrapolasyonik trapez ve orta nokta yaklaşıklıkların isimlendirilmesi bu kodlama sisteminden gelir.

Fujino, Romberg'in Norveç'teyken telaffuzda zorlandığını söyler (Bkz. “[Seiji Fujino: 'Romberg İntegrali'nin Mucidi Werner Romberg ile Bir Röportaj Gerçekleştirdim', 14.10.1996](#)”): “Norveç'te sakın bir yaşam sürmeye başlamadan önce oradan oraya sürüklenirken yaşadığı zorlukları sorduğumda, yabancı dil (özellikle telaffuz) konusunda zorlandığını söyledi. Örneğin bir seferinde konuştuğu kişinin “*Kegel (Almanca'da koni veya gayrimeşru çocuk)*” ve “*Hegel (Alman bir filozof)*” kelimelerini ayırt edememesi sebebiyle yanlış anlaşıldığından bahsetti.”. Bu konuda Almanların ne düşündüğünü çok merak ediyorum. Çünkü **Romberg**'in bu makalede yayımladığım çalışmasının ellerinde olmadığını adım gibi biliyorum ama konuya en azından insani yönden yaklaşırsak, **Romberg**'in dediği gibi Almanca ile Norveççe arasındaki geçişkenliklerde bu tür azizlikler oluyor mu? Mesala Japon asıllı **M. Gündüz İkedo** adlı matematikçimiz, Hamburg'da **Hasse**'nin yanından ayrılırken kendisine **Özden Çelik** (ki kendisinden Projektif Geometri ve Cebirsel Geometri derslerini almıştım) tarafından verilen mektup zarfının üzerinde “**Cahit Arf**” adını görünce “**Kahit Arf**” şeklinde teleffuz etmişti (Bkz. “[Benim Gözümlle Matematikçi Cahit Arf 'Gençlik Rüyası'](#)”, S. 16 (PDF'de 8)).

Yukarıdaki her 2 tablodaki kırmızı üçgenlerin tepe noktalarındaki elemanlar Tablo 2.4'teki 2. sütundaki $\tilde{T}_1, \tilde{T}_4, \tilde{T}_{16}, \tilde{T}_{64}$ trapez ve $\tilde{U}_1, \tilde{U}_4, \tilde{U}_{16}, \tilde{U}_{64}$ orta nokta yaklaşıklıklarıyla hemen hemen aynı yakınsaklıktadırlar ve bu yakınsaklık hızı h^8 iken Tablo 2.5 ve 2.6'da h_3^8 'dir. Özetle her 2 tablodaki kalan terimlerdeki katsayıları (2.42)'ye göre m tane alırsanız her 2 ekstrapolasyondan elde edilen yakınsaklık hızı h^{2m+2} olur (Bkz. “[Romberg's method](#)”. Metotta (Method) Richardson ekstrapolasyonunun yakınsaklık hızı $O(h_n^{2m+2})$ yazar ama aslında bu tam olarak $O\left(h_{n+\frac{m}{2}}^{2m+2}\right)$ 'dir).

Bu makalede son olarak **Romberg**'in gözü arkada kalmasın diye konunun uzmanları tarafından iyi bilinen ve [RİK 3](#) adlı makalemin 22. sayfasındaki 12. dipnotta değindiğim ama şimdiye kadar hiçbir makalede bu kadar geniş (en geniş) açıklamaların bulunmadığı tezdeki şu konuyu tüm yönleriyle inceleyeceğim.

2.5.7. Romberg'in Richardson Ekstrapolasyonunu Kullanması Hakkında

Romberg tezinde T trapez ve U orta nokta yaklaşıklıklarını verdikten sonra bu yaklaşıklıkların yakınsaklık hızlarını artırabilmek için Richardson ekstrapolasyonunu uygular ve elde ettiği yaklaşıklıklara, Tablo 2.6'nın altında anlattığım gibi, trapez yaklaşıklıklarında S, R, Q ve orta nokta yaklaşıklıklarında V, W, (X) der ve 2 yerde (başında ve ortasında) [1] no'lu şu kaynakçayı gösterir:

[1] z.B. [L. COLLATZ: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, S. 6, Gl. \(1.7\) Springer-Verlag 1951.](#)

Bu kaynakça tezin sonunda geçer (ki orijinalde [\[1\]](#) no'lu kaynakçaya bakınız) ve başında “z.B.: Zum Beispiel (Örnek)” yazar. Bu, Almancada “Örnek”in kısaltılmış şeklidir ve tezdeki 3. sayfada açıkça belirtilir: “*Örnek olarak, aralığı $N = 1, 8h = 1$ için 8 eşit parçaya bölerek $I = \int_0^1 \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = 1$ integralini hesaplayalım (Als Beispeil berechen wir $I = \int_0^1 \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = 1$ indem wir das Intervall in 8 gleiche Teile teilen, $N = 1, 8h = 1$).*” Yani **Romberg** bunu birçok kaynakta görmüş ve örnek olarak arkadaşı **Collatz**'ın kitabını seçmiş (Bkz. “[Romberg Semineri](#)”). Bu seminerde **Lothar Collatz** “*Diferansiyel Denklemlere Rasyonel ve Logaritmik Yaklaşımın Bazı Uygulamaları (Some Applications of Rational and Logarithmic Approximation to Differential Equations)*” ve “*Düzlemin Çift Periyodik Döşemeleri ve Eşitlenmesi (Double-Periodic Tilings and Equitiling of The Plane)*” başlıklı 2 makalenin sunumunu yaptı).

Şimdi eğer yukarıdaki kitabın linkini tıklarsanız, **Romberg**, trapez yaklaşıklıklarında S, R, Q ve orta nokta yaklaşıklıklarında V, W, (X) algoritmalarını bu kitabın 6. sayfasının (ki “[L. COLLATZ: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, S. 6, Gl. \(1.7\) Springer-Verlag 1955](#)” 2. baskısında 50. sayfa. Bkz. [RİK 3](#), S. 22, Dipnot 12. O sırada 1951 baskısını bulamamış ve [1 Ocak 1955 baskısını](#) satın almak zorunda kalmıştım. Ama şimdi [1951 baskısını](#) [www.zlibrary.to'da](#) buldum ve hemen kütüphaneme ekledim) (1.7)'sinde geçen

$$(2.66) \quad y(\xi) \approx y_{2n} - \frac{\tilde{y}_n - y_{2n}}{2^k - 1}$$

algoritmasından türettiğini söyler (ki **Claude Brezinski**, “*Ekstrapolasyon Metotlarında Birkaç Öncü (Some pioneers of extrapolation methods)*” adlı makalesinde Richardson ekstrapolasyonunun tarihçesini anlatırken 31. sayfada şöyle der: “**Romberg** makalesinde **Lothar Collatz**’ın (Arnsberg, Westfalia, 1910 - Varna, 1990) 1951 tarihli kitabına atıfta bulunmaktadır (In his paper, **Romberg** refers to the book of **Lothar Collatz (Arnsberg, Westfalia, 1910 - Varna, 1990) of 1951**).”). Fakat bu henüz integral için trapez ve orta nokta yaklaşıklarına uygulanabilir formda değildir, çünkü **Collatz**’ın “*I. Farklı Artışlara Sahip 2 Yaklaşıklığın Karşılaştırılması (Vergleich zweier Näherungen mit verschiedener Schrittweite)*”nda dediği gibi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerinde kullanılmaktadır (Bkz. “*Numerical Methods*”, S. 186, Remark 4. Açıklama (Remark) 4 “*Ekstrapolasyon prosedürü (Romberg integrali için sayısal integralde açıklandığı gibi) adi diferansiyel denklemlerin çözümü için de kullanılabilir. Bu prosedürü Euler yöntemi için göstereceğiz. Adım uzunluğu h ile elde edilen sayısal değerleri $y_E(h)$ ile gösterelim. Euler’in yöntemi 1. mertebeden, yani hata ifadesi şu şekilde verilir (Extrapolation procedure (as described in numerical integration for Romberg integration) can also be used for the solution of the ordinary differential equations. We illustrate this procedure for Euler’s method. Denote the numerical values obtained with step length h by $y_E(h)$. Euler’s method is of first order, that is, the error expression is given by)*” ifadeleriyle başlar ve (4.28)’den (4.34)’e kadar devam eder).

Romberg (2.66)’daki algoritmayı nümerik diferansiyel denklemden nümerik integrale uyarlarken 2 yerine 4 aldı ve elde ettiği algoritmayı **Jacques Frederic Saigey** gibi iteratif şekilde değil trapez yaklaşıklarında S, R, Q ve orta nokta yaklaşıklıklarında V, W, (X) olarak kullandı (Bkz. [RİK 4](#), S. 25, (2.1)).

2.5.7.1. Trapez Formüllerini Araştırmak

Romberg bu yeni harfli yaklaşıklıklar sayesinde elde ettiği algoritmaları (formülleri) önceki trapez formülleriyle karşılaştırdı ve S algoritmasının (ki Richardson ekstrapolasyonunda [R\(n,1\)](#)) **Simpson**’un 1/3 kuralı olduğunu gördü (Bkz. 2. sayfanın başı): “S’nin Simpson S formülüne (Simpson 1/3 kuralı) göre tam olarak yaklaşıklığı temsil ettiği fark edilmemiş görünüyor (Man scheint nicht bemerkt zu haben, dass die S genau die Näherung nach der Simpson Formel S darstellen)”. Yani daha o saate kadar bunu kimse görememiş ve işte **Romberg** bunu bildiriyordu!

Bunun hemen altında R_4 ve R_8 algoritmalarının (ki Richardson ekstrapolasyonunda [R\(n,2\)](#)) G^1 ya da 1. Gauss formülüne karşılık geldiğini gördü (ki şimdi kaynaklarda bu kural “[Boole kuralı](#)” ya da “[Milne kuralı](#)” geçer ama **Romberg**’in araştırmasına göre bunlar doğru değil. Çünkü **Romberg** “[Görevimiz Tehlike 4: Hayalet Protokolü](#)”ndeki gibi Trondheim’dayken bu formülün ilk kez **Gauss** tarafından verilmiş olduğunu gördü ve ona “ G^1 ” dedi): “ R_4 ve R_8 , G^1 (1. Gauss formülü) ağırlık faktörleri kullanılmış olsaydı ortaya çıkacak olan I ’ya tam olarak yaklaşır. R ve W kalan terim olarak h^6 ’ya sahiptir, bu nedenle oluşturmaya devam ediyoruz (R_4 und R_8 sind genau die Näherung an I, die sich bei Verwendung der Gewichtungsfaktoren G^1 ergeben hätten. R und W haben ein Restglied prop. h^6 , daher bilden wir weiter)”.

Sonraki ekstrapolasyonik yaklaşıklıklar ya da bunlara karşılık gelen algoritmalar Newton-Cotes formüllerinden farklıdır. Özellikle Romberg algoritmaları (ekstrapolasyonları) **Boole**’un kuralını çok küçük şekillerde genişleterek, ağırlıkları **Boole**’un kuralındakine benzer oranlara dönüştürür. Buna karşılık, daha ileri [Newton-Cotes formülleri](#) giderek farklılaşan ağırlıklar üretir ve sonunda büyük pozitif ve negatif ağırlıklara yol açar. Bu, Romberg integrali daha kararlı iken, büyük dereceli interpolasyon polinomlu Newton-Cotes formüllerinin birçok integral için yakınsamada nasıl başarısız olduğunu göstergesidir.

2.5.7.2. Takabe Algoritması

Tokyo Üniversitesi’nden Doç. Dr. [Naoki Osada](#) 18.3.2012’de **Claude Brezinski**’nin 70. doğum gününe ithaf ettiği “[Yakınsaklığı Hızlandırma Yöntemlerinin Erken Tarihi](#)” adlı makalesinde (ki [2011 baskısına](#) da bakabilirsiniz) **Lewis Fry Richardson**’a ithaf edilen **Romberg**’in kullandığı ekstrapolasyonun ilk kez Japon matematikçi **Katahiro Takabe** tarafından 1710’dan önce, muhtemelen 1695’ten önce keşfedildiğini duyurdu. Çünkü Üstat **Claude Brezinski**, **Naoki Osada**’nın bildirdiğine göre, “[Aitken \$\delta^2\$ İşlemi](#)”nin Usta **Seki Kowa**’dan geldiğini keşfetmişti ama bu son gelişmeyi bilmiyordu (Bkz. “[Extrapolation Method: Theory and Practice](#)”, “[Extrapolation and Rational Approximation](#)”).

Şimdi **Naoki Osada**’nın bildirdiğine göre “Richardson Ekstrapolasyonu” olarak bilinen ekstrapolasyon **Seki Kowa**’nın öğrencisi **Katahiro Takebe** tarafından 1710’dan önce, muhtemelen 1695’ten önce keşfedilmiştir (Bkz. “[Tetsujutsu Sankei \(1722\)](#)”, “[2.1. Richardson Ekstrapolasyonu](#)”, S. 25). Aynı şey en büyük Japon matematikçi **Seki Kowa**’nın da başına geldi. O da 2^n -genle çemberin çevresini ölçerken “[Aitken \$\delta^2\$ İşlemi](#)” olarak bilinen ekstrapolasyonla $s_{15} = 3.1415926487769856708$, $s_{16} = 3.1415926523865913571$ ve $s_{17} = 3.1415926532889927759$ değerlerini bulmuştu (Bkz. “[Katsuyo Sampo \(1712\)](#)”). Bu konuda 8-10. sayfalarındaki “[5.3. Takakazu Seki](#)”den gerekli bilgileri alabilirsiniz). İşte **Seki Kowa**’nın öğrencisi **Katahiro Takabe** burada devreye giriyor ve **Seki Kowa**’nın algoritmasını Richardson ekstrapolasyonuna çevirerek π ’nin 41 ondalığını hesaplıyor (Bkz. “[6.2. Katahiro Takabe](#)”, S. 218-220).

Bu konuda [RİK 3](#)’ün 21-22. sayfalarında “[2018 Türk-Japon Dostluğu İçin Katkıları](#)”da sözüne ettiğim **Takabe**’nin algoritmasını onayladığıma ilişkin şu çalışmamı verebilirim: “[Takabe’nin Algoritması](#)”, Romberg İntegrali 2016-2019, 27.06.2019, 04:14:19, S. 75-80.

Buna göre “Richardson ekstrapolasyonu” olarak anılan (ki **Richardson**’dan önceki **Saigey** ve **Sheppard**’ı saymıyorum bile) ekstrapolasyonu ilk keşfedenin **Katahiro Takabe** olduğu anlaşılmaktadır. İngiliz matematikçi [Lewis Fry Richardson](#) bu ekstrapolasyonu 1927’de keşfetmişti ama **Naoki Osada**’ya göre **Takabe** bunu 1695’ten önce keşfetmiştir. Burada akla şu gelebilir: **Richardson** bu ekstrapolasyonu **Sheppard**’ın “[Some quadrature formulas, Proc. London Math. Soc., 32, 1900, pp. 258-277](#)” adlı tezinden türetmiş olabilir. Çünkü **Sheppard** (2.50)’deki ekstrapolasyonu $k = 1, 2, 3$ için biliyordu (bkz. “[Genelleştirilmiş Ole Amble Algoritması](#)”, “[Keşke...](#)”, S. 15) ve bunlar (2.1)’de görüldüğü gibi **Saigey** tarafından 1856 ve 1859’da verilmişti (Bkz. [RİK 4](#), (2.1), S. 25). O zaman **Richardson**’daki bu sıçramayı yani (2.1)’deki algoritmaların iteratif olarak verilmesini **Romberg**’de olduğu gibi mi açıklayacağız? Eğer **Richardson** (2.50)’deki ekstrapolasyonu tek seferde verseydi buna inanırdım ama 1910’da temellendirmeye çalıştığı bu ekstrapolasyonu 1927’de tekrar ele alarak (2.49)’da gördüğünüz gibi formunu değiştirmesi kötü şeyleri çağırıştırır. Çünkü aynı şeyleri Antik Yunan matematikçileri de yapıyordu!

Anladınız siz onu. Özetle **Takabe**’nin (2.50)’deki ekstrapolasyon hakkındaki çalışması **Naoki Osada**’nın “[6.2. Katahiro Takabe](#)”de bildirdiğine göre ve daha açık şekliyle anlattığım “[Takabe’nin Algoritması](#)”nda görüldüğü üzere günümüzdeki gibi açıktır. Aynı şekilde **Alexander Aiken**’nin 1926’da keşfettiği algoritma ya da ekstrapolasyon da **Seki Kowa**’ya aittir!

Burada bir noktanın altını çizmek gerekiyor: **Alexander Thomaso** 2018 tarihli “[Sayısal İntegral Yöntemleri: İntegrallerin Etkin Hesaplanması İçin Yöntemler \(Numerische Integration – Verfahren zur effizienten Berechnung von Integralen\)](#)” başlıklı yüksek lisans tezinde Richardson ekstrapolasyonunun adını hiç anmaz; bunun yerine “Romberg-Ekstrapolasyon (Romberg-Extrapolation)” yazar. Demek ki **Thomaso** bu gerçeği bir yerlerden öğrenmiş ama **Romberg**’in tezinin elinde olmaması 1. Gauss formülünün (G^1) Milne kuralı veya Boole kuralı olduğunu zannetmesine yol açmıştır!